

Spécialité mathématiques

Primitives et équations différentielles

Sujet 1

31/03/2026

Note : / 20

Durée : 1 h

- La calculatrice est autorisée en mode examen.
— Le sujet est à rendre avec la copie.

Exercice 1 [/ 3]

Donner les primitives F des fonctions suivantes f (on ne se souciera pas de leur ensemble de validité).

1. [/ 1] $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{2}{3}$.
2. [/ 1] $f(x) = e^x + \frac{1}{x^2}$.
3. [/ 1] $f(x) = \cos(x) - \frac{1}{x^3}$.

Exercice 2 [/ 5]

Déterminer, en justifiant, les primitives F des fonctions suivantes f et préciser leur ensemble de validité.

1. [/ 1] $f(x) = (5x - 1)e^{5x^2 - 2x}$.
2. [/ 2] $f(x) = \frac{\sin(x)}{2 + \cos(x)}$.
3. [/ 2] $f(x) = \frac{3x - 2}{\sqrt{3x^2 - 4x + 1}}$.

Exercice 3 [/ 5]

On considère l'équation différentielle

$$(E) \quad y' + 2y = \cos(x).$$

1. [/ 2] Rechercher une solution particulière à (E) sous la forme

$$y_p(x) = a \cos(x) + b \sin(x).$$

2. [/ 2] En déduire la solution générale de (E) .
3. [/ 1] Déterminer la solution de (E) vérifiant $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

Exercice 4 [/ 7]

Un parachutiste chutait à une vitesse de 66 m.s^{-1} avant d'ouvrir son parachute. On note $v(t)$ la vitesse m.s^{-1} du parachutiste t seconde après l'ouverture du parachute. Les frottements de l'air croissent rapidement avec la vitesse et on a, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$,

$$v'(t) + \frac{g}{36}v^2(t) = g,$$

où g est la constante gravitationnelle.

1. f est a fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $f(t) = \frac{1}{v(t) - 6}$.

- (a) [/ $\frac{1}{2}$] Exprimer v en fonction de f .
- (b) [/ $\frac{1}{2}$] Exprimer v^2 en fonction de f .
- (c) [/ $\frac{1}{2}$] Exprimer v' en fonction de f et f' .
- (d) [/ $1\frac{1}{2}$] En déduire que f est solution sur $[0; +\infty[$ de l'équation différentielle

$$(E) \quad y' = \frac{g}{3}y + \frac{g}{36}.$$

- 2. (a) [/ 1] Déterminer les solutions de (E).
 - (b) [/ $1\frac{1}{2}$] Déterminer $f(0)$ puis l'expression de f .
 - (c) [/ $\frac{1}{2}$] En déduire l'expression de v .
3. [/ 1] Étudier la limite de v en $+\infty$. Interpréter le résultat.

Non noté : Si vous avez fini l'évaluation, vous pouvez colorier cet hippopotame faisant du saut en parachute.

