

Spécialité mathématiques

Primitives et équations différentielles

Sujet 1

31/03/2026

Note : / 20

Durée : 1 h

- La calculatrice est autorisée.
- Le sujet est à rendre avec la copie.

Exercice 1 [/ 3]

Donner les primitives F des fonctions suivantes f (on ne se souciera pas de leur ensemble de validité).

1. [/ 1] $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{2}{3}$.

Solution:

$$F(x) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}x^3 + 3 \times \frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{3}x + c = \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{2}{3}x + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

2. [/ 1] $f(x) = e^x + \frac{1}{x^2}$.

Solution:

$$F(x) = e^x - \frac{1}{x} + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

3. [/ 1] $f(x) = \cos(x) - \frac{1}{x^3}$.

Solution: On a

$$f(x) = \cos(x) - \frac{1}{x^3} = \cos(x) - x^{-3}.$$

Donc

$$F(x) = \sin(x) - \frac{1}{(-2)}x^{-2} + c = \sin(x) + \frac{1}{2x^2} + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Exercice 2 [/ 5]

Déterminer, en justifiant, les primitives F des fonctions suivantes f et préciser leur ensemble de validité.

1. [/ 1] $f(x) = (5x - 1)e^{5x^2 - 2x}$.

Solution: On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = (5x - 1)e^{5x^2 - 2x} = \frac{1}{2}(10x - 2)e^{5x^2 - 2x}.$$

On a alors $f = u'e^u$ avec $u(x) = 5x^2 - 2x$ et $u'(x) = 10x - 2$. On a donc $F = e^u + c$ avec $c \in \mathbb{R}$. Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$F(x) = e^{5x^2 - 2x} + c.$$

2. [/ 2] $f(x) = \frac{\sin(x)}{2 + \cos(x)}$.

Solution: Comme, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-1 \leq \cos(x)$, on a alors $0 < 1 \leq 2 + \cos(x)$. On a donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{2 + \cos(x)} = -\frac{-\sin(x)}{2 + \cos(x)}.$$

On a alors $f = -\frac{u'}{u}$ avec $u(x) = 2 + \cos(x)$ et $u'(x) = -\sin(x)$. Comme $u > 0$, on a donc $F = \ln(u) + c$ avec $c \in \mathbb{R}$. Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$F(x) = \ln(2 + \cos(x)) + c.$$

3. [/ 2] $f(x) = \frac{3x - 2}{\sqrt{3x^2 - 4x + 1}}$.

Solution: f est bien définie si et seulement si $3x^2 - 4x + 1 > 0$ qui est un polynôme de degré deux avec $a = 3$, $b = -4$ et $c = 1$. Calculons le discriminant de ce polynôme. On a

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \times 3 \times 1 = 16 - 12 = 4.$$

$\Delta > 0$, on a donc deux racines : $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-4) \pm 2}{6}$, donc $x_1 = 1$ et $x_2 = \frac{1}{3}$.

On a $a = 3 > 0$, donc f est définie sur $\left] -\infty; \frac{1}{3} \right[\cup]1; +\infty[$. Pour tout $x \in \left] -\infty; \frac{1}{3} \right[\cup]1; +\infty[$, on a

$$f(x) = \frac{3x - 2}{\sqrt{3x^2 - 4x + 1}} = \frac{6x - 4}{2\sqrt{3x^2 - 4x + 1}}.$$

On a alors $f = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$ avec $u(x) = 3x^2 - 4x + 1$ et $u'(x) = 6x - 4$. Comme $u > 0$ sur $\left] -\infty; \frac{1}{3} \right[\cup]1; +\infty[$, on a donc $F = \sqrt{u} + c$ avec $c \in \mathbb{R}$. Donc, pour tout $x \in \left] -\infty; \frac{1}{3} \right[\cup]1; +\infty[$,

$$F(x) = \sqrt{3x^2 - 4x + 1} + c.$$

Exercice 3 [/ 5]

On considère l'équation différentielle

$$(E) \quad y' + 2y = \cos(x).$$

1. [/ 2] Rechercher une solution particulière à (E) sous la forme

$$y_p(x) = a \cos(x) + b \sin(x).$$

Solution: y_p est solution de (E) si et seulement si pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} y_p' + 2y_p = \cos(x) &\iff -a \sin(x) + b \cos(x) + 2(a \cos(x) + b \sin(x)) = \cos(x) \\ &\iff (b + 2a) \cos(x) + (2b - a) \sin(x) = \cos(x). \end{aligned}$$

Par identification, on a alors

$$\begin{cases} b + 2a = 1 \\ 2b - a = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 2b \\ b + 4b = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} a = \frac{2}{5} \\ b = \frac{1}{5} \end{cases}.$$

Une solution particulière de (E) est donc $y_p(x) = \frac{2}{5} \cos(x) + \frac{1}{5} \sin(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

2. [/ 2] En déduire la solution générale de (E).

Solution: On a

$$y' + 2y = \cos(x) \iff y' = -2y + \cos(x).$$

(E) est de la forme $y' = ay + f$ avec $a = -2$ et $f(x) = \cos(x)$. Une solution générale de (E) est donc de la forme, pour $c \in \mathbb{R}$ et tout $x \in \mathbb{R}$,

$$y(x) = ce^{ax} + y_p(x) = ce^{-2x} + \frac{2}{5} \cos(x) + \frac{1}{5} \sin(x).$$

3. [/ 1] Déterminer la solution de (E) vérifiant $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

Solution: On a

$$\begin{aligned} y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 &\iff ce^{-2\frac{\pi}{2}} + \frac{2}{5} \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{5} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \\ &\iff ce^{-\pi} + \frac{1}{5} = 0 \\ &\iff c = -\frac{1}{5}e^{\pi}. \end{aligned}$$

On a donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$y(x) = ce^{ax} + y_p(x) = -\frac{1}{5}e^{-2x+\pi} + \frac{2}{5} \cos(x) + \frac{1}{5} \sin(x).$$

Exercice 4 [/ 7]

Un parachutiste chutait à une vitesse de 66 m.s^{-1} avant d'ouvrir son parachute. On note $v(t)$ la vitesse m.s^{-1} du parachutiste t seconde après l'ouverture du parachute. Les frottements de l'air croissent rapidement avec la vitesse et on a, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$,

$$v'(t) + \frac{g}{36}v^2(t) = g,$$

où g est la constante gravitationnelle.

1. f est a fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $f(t) = \frac{1}{v(t) - 6}$.

(a) [/ ½] Exprimer v en fonction de f .

Solution:

$$f = \frac{1}{v - 6} \iff \frac{1}{f} = v - 6 \iff v = \frac{1}{f} + 6.$$

(b) [/ ½] Exprimer v^2 en fonction de f .

Solution:

$$v^2 = \left(\frac{1}{f} + 6\right)^2 = \frac{1}{f^2} + \frac{12}{f} + 36.$$

(c) [/ ½] Exprimer v' en fonction de f et f' .

Solution:

$$v' = \left(\frac{1}{f} + 6\right)' = -\frac{f'}{f^2}.$$

(d) [/ 1½] En déduire que f est solution sur $[0; +\infty[$ de l'équation différentielle

$$(E) \quad y' = \frac{g}{3}y + \frac{g}{36}.$$

Solution: Sur $[0; +\infty[$, on a, d'après les questions précédentes,

$$\begin{aligned} v' + \frac{g}{36}v^2 = g &\iff -\frac{f'}{f^2} + \frac{g}{36} \left(\frac{1}{f^2} + \frac{12}{f} + 36 \right) = g \\ &\iff -\frac{f'}{f^2} + \frac{g}{36} \times \frac{1}{f^2} + \frac{g}{3} \times \frac{1}{f} + g = g \\ &\iff -\frac{f'}{f^2} + \frac{g}{36} \times \frac{1}{f^2} + \frac{g}{3} \times \frac{1}{f} = 0 \\ &\iff -f' + \frac{g}{36} + \frac{g}{3}f = 0 \\ &\iff f' = \frac{g}{3}f + \frac{g}{36}. \end{aligned}$$

Donc f est bien solution de (E).

2. (a) [/ 1] Déterminer les solutions de (E).

Solution: (E) est de la forme $y' = ay + f$ avec $a = \frac{g}{3}$ et $b = \frac{g}{36}$. Une solution générale de (E) est donc de la forme, pour $c \in \mathbb{R}$ et tout $x \in \mathbb{R}$,

$$y(t) = ce^{at} - \frac{b}{a} = ce^{\frac{g}{3}t} - \frac{\frac{g}{36}}{\frac{g}{3}} = ce^{\frac{g}{3}t} - \frac{1}{12}.$$

- (b) [/ 1½] Déterminer $f(0)$ puis l'expression de f .

Solution: Comme la vitesse du parachutiste au moment de l'ouverture du parachute est de 66 m.s^{-1} , on a $v(0) = 66$ et donc $f(0) = \frac{1}{60}$.

f est solution de (E), on a donc, pour tout $t \in [0; +\infty[$,

$$f(t) = ce^{\frac{g}{3}t} - \frac{1}{12}.$$

On a donc

$$\begin{aligned} f(0) = \frac{1}{60} &\iff ce^{\frac{g}{3} \times 0} - \frac{1}{12} = \frac{1}{60} \\ &\iff c - \frac{1}{12} = \frac{1}{60} \\ &\iff c = \frac{1}{60} + \frac{1}{12} \\ &\iff c = \frac{1}{10}. \end{aligned}$$

Donc, pour tout $t \in [0; +\infty[$,

$$f(t) = \frac{1}{10}e^{\frac{g}{3}t} - \frac{1}{12}.$$

- (c) [/ ½] En déduire l'expression de v .

Solution:

Comme $v = \frac{1}{f} + 6$, on en déduit que, pour tout $t \in [0; +\infty[$,

$$v(t) = \frac{1}{\frac{1}{10}e^{\frac{g}{3}t} - \frac{1}{12}} + 6.$$

3. [/ 1] Étudier la limite de v en $+\infty$. Interpréter le résultat.

Solution:

Comme $g > 0$, on a $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{g}{3}t = +\infty$.

Par composition $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{\frac{g}{3}t} = +\infty$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{10}e^{\frac{g}{3}t} - \frac{1}{12} = +\infty$.

Par quotient $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{1}{10}e^{\frac{g}{3}t} - \frac{1}{12}} = 0^+$.

On a alors $\lim_{t \rightarrow +\infty} v(t) = 6^+$.

La vitesse du parachutiste va donc tendre vers 6 m.s^{-1} .

Non noté : Si vous avez fini l'évaluation, vous pouvez colorier cet hippopotame faisant du saut en parachute.

