Nom : **Prénom :** **T$^{\text{le}}$:**

Mathématiques

Loi binomiale

Sujet 1 14/04/2026

Note : / 15 Durée : 1 h

— La calculatrice est autorisée en mode examen.
— Le sujet est à rendre avec la copie.

Exercice 1 [/ 4]

Les Psykokwak sont en général jaunes sauf en de très rares cas où ils sont bleus, on dit alors qu'ils sont « chromatiques ». On estime que 6% des Psykokwak sont chromatiques. Le professeur Chen a entendu parler d'une colonie de 42 Psykokwak dont un nombre anormal d'individus seraient chromatiques. Afin de décider s'il s'agit d'un cas exceptionnel demandant une étude approfondie, il se demande s'il s'agit d'une anomalie statistique au sens où il y avait moins d'une chance sur cent que cela se produise.

Le professeur Chen considère l'hypothèse suivante : le fait qu'un Psykokwak soit chromatique ou non est indépendant du fait que ses congénères le soient aussi. Il note X le nombre de Psykokwak chromatiques dans la colonie.

1. [/ 1½] Quelle est la loi suivie par X ? Justifier.

Solution: Le fait qu'un Psykokwak soit chromatique ou non constitue une épreuve de Bernoulli de paramètre $p = 0,06$.

Comme le professeur Chen a supposé l'indépendance du caractère chromatique des individus entre eux, l'observation répétée et identique des $n = 42$ individus de la colonie un à un constitue alors un schéma de Bernoulli.

X compte le nombre de « succès » (Psykokwak chromatiques) dans ce schéma de Bernoulli, elle suit donc une loi binomiale $\mathscr{B}(42\,; 0,06)$.

2. [/ 1] Déterminer le plus petit entier a tel que $\mathbb{P}(X \leqslant a) > 0,99$. Justifier.

Solution: À l'aide de la calculatrice, on trouve $a = 7$. En effet, $\mathbb{P}(X \leqslant 6) = 0,9882 < 0,99$ et $\mathbb{P}(X \leqslant 7) = 0,9968 > 0,99$.

3. [/ 1] En déduire le plus petit entier b tel que $\mathbb{P}(X \geqslant b) < 0,01$. Justifier.

Solution: On a $\mathbb{P}(X \geqslant b) = 1 - \mathbb{P}(X < b)$. Donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \geqslant b) < 0,01 &\iff 1 - \mathbb{P}(X < b) < 0,01\\ &\iff 1 - 0,01 < \mathbb{P}(X < b)\\ &\iff 0,99 < \mathbb{P}(X \leqslant b-1).\end{aligned}$$

On cherche alors le plus petit entier b tel que $\mathbb{P}(X \leqslant b-1) > 0,99$. D'après la question précédente, avec $a = b-1$, on a alors $b = a+1 = 8$.

4. **[/ ½]** Le professeur Chen dénombre 9 Psykokwak chromatiques dans la colonie. S'agit-il d'une anomalie statistique ?

Solution: D'après la question précédente, ce résultat de 9 Psykokwak chromatiques fait partie des 1% les moins probables, on peut donc considérer qu'il s'agit d'une anomalie statistique.

Exercice 2 [/ 11]

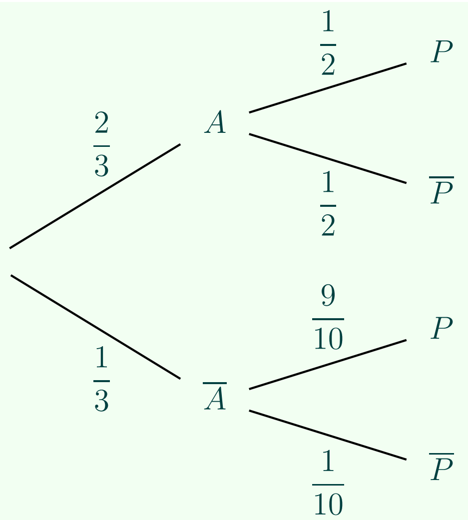
1. Lors de ses aventures, Zoro se perd beaucoup. Ses amis le savent et essayent de l'accompagner le plus possible afin qu'il ne se perde pas. Zoro a ainsi une chance sur deux de se perdre sachant qu'il est accompagné alors que c'est neuf chances sur dix s'il ne l'est pas. Il y a enfin deux chances sur trois pour que Zoro soit accompagné par au moins un de ses compagnons. On note :

— A l'événement « Zoro est accompagné par ses compagnons » ;

— P l'événement « Zoro se perd ».

(a) **[/ 1]** Représenter cette situation à l'aide d'un arbre de probabilité.

Solution:



(b) **[/ 1]** Calculer la probabilité que Zoro soit accompagné et ne se perde pas. On laissera le résultat sous forme de fraction.

Solution: Zoro est accompagné et ne se perd pas est l'événement $A \cap \overline{P}$, on a

$$\mathbb{P}(A \cap \overline{P}) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}_A(\overline{P}) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3}.$$

Il y a une chance sur trois que Zoro soit accompagné et ne se perde pas.

(c) **[/ 1]** Calculer la probabilité que Zoro ne se perde pas. On laissera le résultat sous forme de fraction.

Solution: Zoro ne se perd pas est l'événement $\overline{P}$. Comme A et $\overline{A}$ forment une partition de l'univers, on a d'après la formule des probabilités totales,

$$\mathbb{P}(\overline{P}) = \mathbb{P}(A \cap \overline{P}) + \mathbb{P}(\overline{A} \cap \overline{P}) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{3} + \frac{1}{30} = \frac{11}{30}.$$

Il y a 11 chances sur 30 que Zoro ne perde pas.

2. Lors de l'année écoulée, Zoro a vécu une quinzaine d'aventures sur différentes îles. On note X la variable aléatoire comptant le nombre de fois où Zoro s'est perdu au cours d'une aventure.

(a) **[/ 1½]** Quelle est la loi suivie par X ? Justifier.

Solution: Le fait que Zoro se perde ou non constitue une épreuve de Bernoulli de paramètre

$$p = \mathbb{P}(P) = 1 - \mathbb{P}(\overline{P}) = 1 - \frac{11}{30} = \frac{19}{30}.$$

Comme les aventures et les îles sont différentes, on peut supposer que les aventures sont indépendantes les unes des autres. Leurs $n = 15$ répétitions identiques et indépendantes constituent alors un schéma de Bernoulli.

X compte le nombre de « succès » (égarements de Zoro) dans ce schéma de Bernoulli, elle suit donc une loi binomiale $\mathscr{B}\left(15\,;\dfrac{19}{30}\right)$.

(b) **[/ ½]** Quelle est la probabilité que Zoro se perde les quinze fois ? Donner la formule permettant d'effectuer ce calcul et arrondir au millième.

Solution: La probabilité que Zoro se perde les quinze fois est

$$\mathbb{P}(X = 15) = \binom{15}{15}\left(\frac{19}{30}\right)^{15}\left(1 - \frac{19}{30}\right)^{15-15} = 1 \times \left(\frac{19}{30}\right)^{15} \times 1 \simeq 0,001.$$

(c) **[/ 1]** Quelle est la probabilité qu'il y ait au moins une aventure où Zoro ne se perde pas ? Arrondir au millième.

Solution: « Zoro ne s'est pas perdu au moins une fois » est l'événement contraire de « Zoro s'est perdu quinze fois », ou encore « Zoro s'est perdu au plus quatorze fois » On a donc

$$\mathbb{P}(X \leqslant 14) = \mathbb{P}(\overline{X = 15}) = 1 - \mathbb{P}(X = 15) \simeq 0,999.$$

(d) **[/ 1]** En moyenne, combien de fois Zoro s'est perdu au cours de ces aventures ?

Solution: On cherche ici $\mathbb{E}(X)$. On a

$$\mathbb{E}(X) = np = 15 \times \frac{19}{30} \simeq 10.$$

Zoro s'est perdu en moyenne dix fois.

3. Avant leurs trois prochaines aventures, Luffy, Nami et Robin décident de parier sur laquelle des trois Zoro va se perdre pour la première fois.

— Robin pense que Zoro va se perdre dès la première aventure.

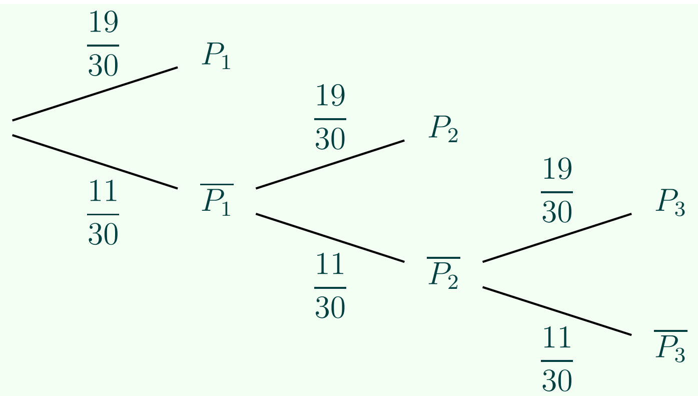
— Nami parie que Zoro va se perdre pour la première fois lors de la seconde aventure.

— Luffy est très ambitieux et parie sur le fait que Zoro ne va pas se perdre du tout.

On note P_i les événements « Zoro se perd pour la première fois lors de la i-ème aventure » et Y la variable aléatoire qui donne le rang de la première aventure lors de laquelle Zoro va se perdre.

(a) **[/ 1]** Représenter cette situation à l'aide d'un arbre de probabilité.

Solution:



(b) **[/ 1]** Quelle est la probabilité que Luffy perde son pari ? Arrondir au centième.

Solution: Luffy perd son pari si Zoro se perd sur au l'une des trois aventures. Comme il s'agit du contraire du fait que Zoro ne se perde sur aucune des trois aventures, la probabilité que cela se produise est

$$P(Y \leqslant 3) = \mathbb{P}\left(\overline{\overline{P_1} \cap \overline{P_2} \cap \overline{P_3}}\right) = 1 - \mathbb{P}(\overline{P_1} \cap \overline{P_2} \cap \overline{P_3}) = 1 - \left(\frac{11}{30}\right)^3 \simeq 0,95.$$

(c) **[/ 1]** Quelle est la probabilité que Nami ou Robin gagne ? Arrondir au centième.

Solution: La probabilité que Robin gagne est $\mathbb{P}(Y = 0) = \dfrac{19}{30} \simeq 0,63$. La probabilité que Nami gagne est $\mathbb{P}(Y = 1) = \mathbb{P}(\overline{P_1} \cap P_2) = \dfrac{11}{30} \times \dfrac{19}{30} \simeq 0,23$.
La probabilité que Nami ou Robin gagne est donc, puisque les deux événements sont disjoints,

$$\mathbb{P}(Y \leqslant 1) = \mathbb{P}(Y = 0) + \mathbb{P}(Y = 1) \simeq 0,63 + 0,23 = 0,86.$$

(d) **[/ 1]** Donner, sans justifier, le nom et l'expression de la loi suivie par Y.

Solution: Y renvoie le rang premier succès dans un schéma de Bernoulli, elle suit donc une loi géométrique et on a

$$\mathbb{P}(Y = k) = \left(\frac{19}{30}\right)^{k-1} \times \frac{11}{30},$$

(probabilité de $k - 1$ échecs multipliée par celle d'un succès lors de la k-ième expérience).