BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE BLANCHE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2026

MATHÉMATIQUES

Mercredi 11 mars

Correction

Jour 2

Exercice 1 [/ 8]

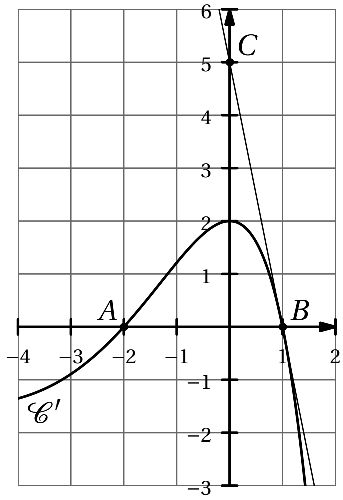
Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Une réponse non justifiée, fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point. Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la réponse choisie en la justifiant.

Pour les questions 1. et 2., on considère une fonction f deux fois dérivable sur l'intervalle $[-4\,;2]$. On note f' la fonction dérivée de f et f'' la dérivée seconde de f.

On donne ci-dessous la courbe représentative $\mathscr{C}'$ de la fonction dérivée f' dans un repère du plan. On donne de plus les points $A\,(-2\,;0)$, $B\,(1\,;0)$ et $C\,(0\,;5)$.

1. [/ 1] La fonction f est :

1. concave sur $[-2\,;1]$;
2. convexe sur $[-4\,;0]$;
3. convexe sur $[-2\,;1]$;
4. convexe sur $[0\,;2]$.



Réponse: D'après la courbe représentative de f', on remarque que f' semble croissante sur $[-4; 0]$ et décroissante sur $[0; 2]$.
Cl : La fonction f semble convexe sur $[-4; 0]$ et concave sur $[0; 2]$.

Réponse 2

2. [/ 1] On admet que la droite (BC) est la tangente à la courbe $\mathscr{C}'$ au point B. On a :

1. $f'(1) < 0$;
2. $f'(1) = 5$;
3. $f''(1) > 0$;
4. $f''(1) = -5$.

Réponse: On remarque que la tangente à la courbe représentative de f' au point d'abscisse 1 est descendante donc son coefficient directeur est négatif.
Or, le coefficient directeur de cette tangente est $f''(1)$. D'où $f''(1) = \dfrac{-5}{1} = -5$.

Réponse 4

3. [/ 2] On considère la fonction g définie sur $[0\,;+\infty[$ par $g(t) = \dfrac{a}{b+\mathrm{e}^{-t}}$ où a et b sont deux nombres réels. On sait que $g(0) = 2$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} g(t) = 3$. Les valeurs de a et b sont :

1. $a = 2$ et $b = 3$;
2. $a = 4$ et $b = 1$;
3. $a = 4$ et $b = \dfrac{4}{3}$;
4. $a = 6$ et $b = 2$.

Réponse: $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-t} = 0$ donc, par somme, $\lim\limits_{t\to+\infty} b+e^{-t} = b$ et, par quotient, $\lim\limits_{t\to+\infty} g(t) = \dfrac{a}{b}$.

Alors, $\left\{\begin{array}{rcl} g(0) & = & 2 \\ \lim\limits_{t\to+\infty} g(t) & = & 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{a}{b+e^{-0}} & = & 2 \\ \dfrac{a}{b} & = & 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{a}{b+1} & = & 2 \\ a & = & 3b \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 3b & = & 2(b+1) \\ a & = & 3b \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 3b & = & 2b+2 \\ a & = & 3b \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 3b-2b & = & 2 \\ a & = & 3b \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} b & = & 2 \\ a & = & 3\times 2 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} b & = & 2 \\ a & = & 6 \end{array} \right.$

Réponse 4

4. [/ 2] On considère la fonction g définie par $g(x) = \ln\left(\dfrac{x-1}{2x+4}\right)$. La fonction g est définie sur :

1. $\mathbb{R}$;
2. $]-2\,;+\infty[$;
3. $]-\infty\,;-2[\cup]1\,;+\infty[$;
4. $]-2\,;1[$.

Réponse: $g(x)$ est bien définie si et seulement si $\dfrac{x-1}{2x+4} > 0$.

Or, $\dfrac{x-1}{2x+4} = 0 \overset{TQN}{\Leftrightarrow} x-1 = 0$ et $2x+4 \neq 0 \Leftrightarrow x = 1$ et $2x \neq -4 \Leftrightarrow x = 1$ et $x \neq -2$.

D'où le tableau :

Valeurs de x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
Signe de $x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
Signe de $2x+4$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $g(x)$		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

Alors $g(x)$ est bien définie si et seulement si $x \in]-\infty\,;-2[\cup]1\,;+\infty[$

Réponse 3

5. [/ 2] On considère une suite (u_n) telle que, pour tout entier naturel, on a :

$$1 + \left(\frac{1}{4}\right)^n \leqslant u_n \leqslant 2 - \frac{n}{n+1}.$$

On peut affirmer que la suite (u_n) :

1. converge vers 2 ;
2. converge vers 1 ;
3. diverge vers $+\infty$;
4. n'a pas de limite.

Réponse: On a $-1 < \dfrac{1}{4} < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{4}\right)^n = 0$.

Donc, par somme $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \left(\dfrac{1}{4}\right)^n\right) = 1$.

De plus, $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} (n+1) = +\infty$. On obtient alors la forme indéterminée $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Levons l'indétermination :

Soit n un entier naturel.

Alors $\dfrac{n}{n+1} = \dfrac{n}{n\left(1+\dfrac{1}{n}\right)} = \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{n}}$.

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ d'où, par quotient, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{1+\frac{1}{n}} = \dfrac{1}{1+0} = 1$.

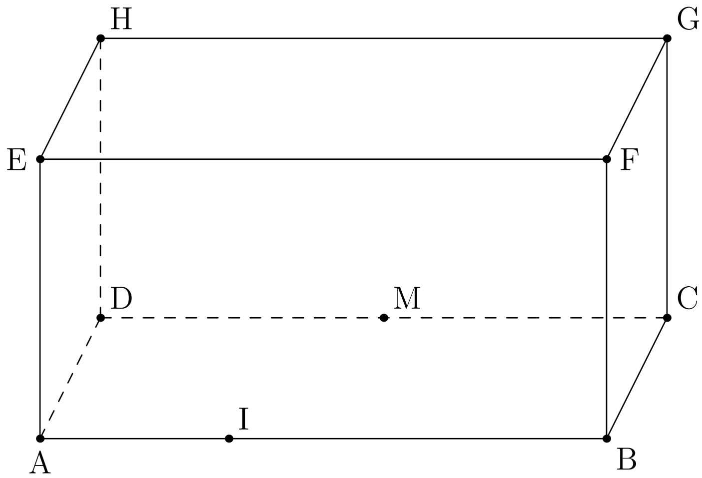
Ainsi, $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\left(\frac{1}{4}\right)^n\right)=1=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}}$.

Cl : D'après le théorème d'encadrement, $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$.

Réponse 2

Exercice 2 [/ 9]

On considère le pavé droit $ABCDEFGH$ tel que $AB = 3$ et $AD = AE = 1$ représenté ci-dessous.



On considère le point I du segment $[AB]$ tel que $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AI}$ et on appelle M le milieu du segment $[CD]$.

On se place dans le repère orthonormé $\left(A;\overrightarrow{AI};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE}\right)$.

1. [/ 1] Sans justifier, donner les coordonnées des points F, H et M.

Réponse: On a $F\,(3\,;0\,;1)$, $H\,(0\,;1\,;1)$ et $M\,(1,5\,;1\,;0)$.

2. (a) **[/ 2]** Montrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\6\\3\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (HMF).

Réponse: $\overrightarrow{HM}\begin{pmatrix}1,5-0\\1-1\\0-1\end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{HM}\begin{pmatrix}1,5\\0\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{MF}\begin{pmatrix}3-1,5\\0-1\\1-0\end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{MF}\begin{pmatrix}1,5\\-1\\1\end{pmatrix}$.

On rappelle que le repère considéré est orthonormé donc

$\vec{n}\cdot\overrightarrow{HM} = 2\times 1,5 + 6\times 0 + 3\times(-1) = 3-3 = 0$

et $\vec{n}\cdot\overrightarrow{MF} = 2\times 1,5 + 6\times(-1) + 3\times 1 = 3-6+3 = 0$.

Alors le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{HM}$ et $\overrightarrow{MF}$.

Or, les vecteurs $\overrightarrow{HM}$ et $\overrightarrow{MF}$ ne sont pas colinéaires car $x_{\overrightarrow{HM}} = x_{\overrightarrow{MF}}$ mais $y_{\overrightarrow{HM}} \neq y_{\overrightarrow{MF}}$.

Cl : Le vecteur $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (HMF).

(b) **[/ 1]** En déduire qu'une équation cartésienne du plan (HMF) est :

$$2x + 6y + 3z - 9 = 0.$$

Réponse: D'après la question précédente, $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (HMF). Donc le plan (HMF) admet une équation cartésienne de la forme $2x+6y+3z+d=0$ avec d un réel.

Or, H appartient au plan (HMF) si et seulement si $2x_H + 6y_H + 3z_H + d = 0$ si et seulement si $2\times 0+6\times 1+3\times 1+d = 0$ si et seulement si $6+3+d = 0$ si et seulement si $d = -9$.
Cl : Une équation cartésienne du plan (HMF) est bien $2x + 6y + 3z - 9 = 0$.

(c) **[/ 1]** Le plan $\mathscr{P}$ dont une équation cartésienne est $5x + 15y - 3z + 7 = 0$ est-il parallèle au plan (HMF) ? Justifier la réponse.

Réponse: Un vecteur directeur de $\mathscr{P}$ est $\vec{m}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} 5 \\ 15 \\ -3 \end{pmatrix}$.
Or, $z_{\vec{n}} = -z_{\vec{m}}$ mais $x_{\vec{n}} \neq -x_{\vec{m}}$ donc $\vec{n}$ et $\vec{m}$ ne sont pas colinéaires.
Cl : Les plans (HMF) et $\mathscr{P}$ ne sont pas parallèles.

3. [/ ½] Déterminer une représentation paramétrique de la droite (DG).

Réponse: On a $D\,(0\,;1\,;0)$ et $G\,(3\,;1\,;1)$ d'où $\overrightarrow{DG}\begin{pmatrix} 3-0 \\ 1-1 \\ 1-0 \end{pmatrix}$ alors $\overrightarrow{DG}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Or, $\overrightarrow{DG}$ dirige la droite (DG) passant, entre autre, par D.
Une représentation paramétrique de (DG) est alors :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 3t \\ y & = & 1 \\ z & = & t \end{array}\right. \quad \text{où } t \in \mathbb{R}$$

4. [/ 1½] On appelle N le point d'intersection de la droite (DG) avec le plan (HMF). Déterminer les coordonnées du point N.

Réponse: $\left\{\begin{array}{lcl} N & \in & (DG) \\ N & \in & (HMF) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_N = 3t \\ y_N = 1 \\ z_N = t \\ 2x_N + 6y_N + 3z_N - 9 = 0 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_N = 3t \\ y_N = 1 \\ z_N = t \\ 2\times(3t) + 6\times 1 + 3\times t - 9 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_N = 3t \\ y_N = 1 \\ z_N = t \\ 6t + 6 + 3t - 9 = 0 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x_N & = & 3t \\ y_N & = & 1 \\ z_N & = & t \\ 9t-3 & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x_N & = & 3t \\ y_N & = & 1 \\ z_N & = & t \\ 9t & = & 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x_N & = & 3t \\ y_N & = & 1 \\ z_N & = & t \\ t & = & \frac{1}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x_N & = & 1 \\ y_N & = & 1 \\ z_N & = & \frac{1}{3} \\ t & = & \frac{1}{3} \end{array}\right.$

Cl : Les coordonnées de N sont $\left(1\,;1\,;\frac{1}{3}\right)$.

5. [/ 1] Déterminer les coordonnées du point R projeté orthogonal du point G sur le plan (HMF).

Réponse: Notons Δ la droite perpendiculaire à (HMF) passant par G.
Or, $\vec{n}$ est orthogonal à (HMF) donc $\vec{n}$ dirige Δ.

Une représentation paramétrique de Δ est alors :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 3+2k \\ y & = & 1+6k \quad \text{où } k \in \mathbb{R} \\ z & = & 1+3k \end{array}\right.$$

R est le projeté orthogonal du point G sur le plan (HMF). Alors R est le point d'intersection de (DG) et de (HMF).

Or, H est le point d'intersection de Δ et de $(HMF) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} R & \in & (HMF) \\ R & \in & (DG) \end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2x+6y+3z-9=0 \\ x=3+2k \\ y=1+6k \\ z=1+3k \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2(3+2k)+6(1+6k)+3(1+3k)-9=0 \\ x=3+2k \\ y=1+6k \\ z=1+3k \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 6+4k+6+36k+3+9k-9=0 \\ x=3+2k \\ y=1+6k \\ z=1+3k \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 6+49k=0 \\ x=3+2k \\ y=1+6k \\ z=1+3k \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 49k & = & -6 \\ x & = & 3+2k \\ y & = & 1+6k \\ z & = & 1+3k \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} k & = & \dfrac{-6}{49} \\ x & = & 3+2\times\dfrac{-6}{49} \\ y & = & 1+6\times\dfrac{-6}{49} \\ z & = & 1+3\times\dfrac{-6}{49} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} k & = & \dfrac{-6}{49} \\ x & = & \dfrac{147-12}{49} \\ y & = & \dfrac{49-36}{49} \\ z & = & \dfrac{49-18}{49} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} k & = & \dfrac{-6}{49} \\ x & = & \dfrac{135}{49} \\ y & = & \dfrac{13}{49} \\ z & = & \dfrac{31}{49} \end{array}\right.$$

Cl : Les coordonnées du point H projeté orthogonal du point A sur le plan $\mathcal{P}$ sont $\left(\dfrac{135}{49}; \dfrac{13}{49}; \dfrac{31}{49}\right)$.

6. [/ 1] On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par $V = \dfrac{1}{3}B \times h$, où B est l'aire d'une base du tétraèdre et h est sa hauteur relative à cette base. On admet que l'aire du triangle HMF est égale à $1,75$ u.a. Déterminer le volume du tétraèdre $GHMF$.

Réponse: D'après la question précédente, R est le projeté orthogonal de G sur le plan (HMF) donc RG est la hauteur relativement à la base HMF.

On a $\overrightarrow{RG}\begin{pmatrix} 3-\dfrac{135}{49} \\ 1-\dfrac{13}{49} \\ 1-\dfrac{31}{49} \end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{RG}\begin{pmatrix} \dfrac{147-135}{49} \\ \dfrac{49-13}{49} \\ \dfrac{49-31}{49} \end{pmatrix}$ enfin $\overrightarrow{RG}\begin{pmatrix} \dfrac{12}{49} \\ \dfrac{36}{49} \\ \dfrac{18}{49} \end{pmatrix}$

Or, le repère considéré est orthonormé d'où $RG = \sqrt{\left(\dfrac{12}{49}\right)^2 + \left(\dfrac{36}{49}\right)^2 + \left(\dfrac{18}{49}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{12^2+36^2+18^2}{49^2}}$

$= \dfrac{\sqrt{144+1296+324}}{49} = \dfrac{\sqrt{1764}}{49} = \dfrac{42}{49} = \dfrac{6}{7}$

Alors $V = \dfrac{1}{3} \times B \times RG = \dfrac{1}{3} \times 1,75 \times \dfrac{6}{7} = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{7}{4} \times \dfrac{6}{7} = \dfrac{6}{3\times 4} = \dfrac{1}{2}$.

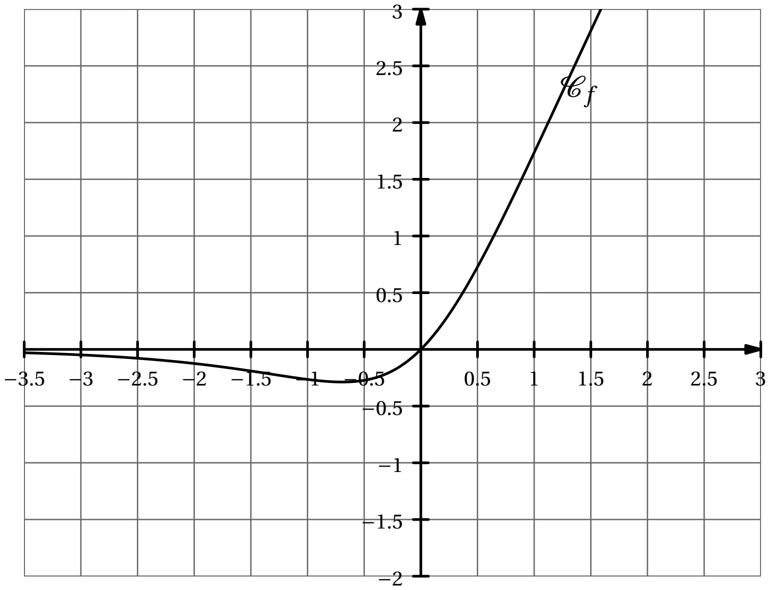
Cl : Le volume du tétraèdre $ABCD$ est $0,5$ u.v.

Exercice 3 [/ 10]

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \ln\left(e^{2x} - e^{x} + 1\right).$$

On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative représentée ci-dessous.



Un élève formule les conjectures suivantes à partir de cette représentation graphique :

1. L'équation $f(x) = 2$ semble admettre au moins une solution.
2. Le plus grand intervalle sur lequel la fonction f semble être croissante est $[-0,5\,;+\infty[$.
3. L'équation de la tangente au point d'abscisse $x = 0$ semble être: $y = 1,5x$.

Le but de cet exercice est de valider ou rejeter les conjectures concernant la fonction f.

Partie A - Étude d'une fonction auxiliaire

On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction g définie par

$$g(x) = e^{2x} - e^{x} + 1.$$

1. [/ ½] Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$.

Réponse: $\lim\limits_{x\to-\infty} 2x = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x} = 0$ donc, par composée, $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x} = 0$.
De plus, par somme, $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = 0 - 0 + 1 = 1$.
Cl : $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = 1$.

2. [/ 1] Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.

Réponse: $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x} = +\infty$ donc, par composée, $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{2x} = +\infty$.
De plus, par somme, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ donne la forme indéterminée $\infty - \infty$.
Soit x un réel.

Alors $g(x) = \mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^x + 1 = (\mathrm{e}^x)^2 - \mathrm{e}^x + 1 = \mathrm{e}^x\left(\mathrm{e}^x - 1 + \dfrac{1}{\mathrm{e}^x}\right)$.
Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\mathrm{e}^x} = 0$ donc, par somme, $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x - 1 + \dfrac{1}{\mathrm{e}^x} = +\infty$
Alors, par produit, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.
Cl : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.

3. [/ ½] Montrer que $g'(x) = \mathrm{e}^x(2\mathrm{e}^x - 1)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Réponse: g est une somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ donc g est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $g'(x) = 2\mathrm{e}^{2x} - e^x + 0 = 2\mathrm{e}^{2x} - e^x = 2(\mathrm{e}^x)^2 - \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x(2\mathrm{e}^x - 1)$.
Cl : Pour tout x de $\mathbb{R}$, $g'(x) = \mathrm{e}^x(2\mathrm{e}^x - 1)$.

4. [/ 1½] Étudier le sens de variation de la fonction g sur $\mathbb{R}$. Dresser le tableau des variations de la fonction g en y faisant figurer la valeur exacte des extremums s'il y en a, ainsi que les limites de g en $-\infty$ et $+\infty$.

Réponse: On rappelle que pour tout réel x, $\mathrm{e}^x > 0$ donc $g'(x)$ est du signe de $2\mathrm{e}^x - 1$.
De plus, $2\mathrm{e}^x - 1 > 0 \Leftrightarrow 2\mathrm{e}^x > 1 \Leftrightarrow \mathrm{e}^x > \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \ln(\mathrm{e}^x) > \ln\left(\dfrac{1}{2}\right) \Leftrightarrow x > -\ln(2)$.
D'où le tableau :

Valeurs de x	$-\infty$		$-\ln(2)$		$+\infty$
Signes de $g'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de g	1	$\searrow$	$\dfrac{3}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

Avec $g(-\ln(2)) = \mathrm{e}^{2(-\ln(2))} - \mathrm{e}^{-\ln(2)} + 1 = \mathrm{e}^{-\ln(2^2)} - \mathrm{e}^{\ln\left(\frac{1}{2}\right)} + 1 = \mathrm{e}^{\ln\left(\frac{1}{2^2}\right)} - \dfrac{1}{2} + 1$
$= \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{2} + 1 = \dfrac{3}{4}$

5. [/ ½] En déduire le signe de g sur $\mathbb{R}$.

Réponse: D'après la question précédente, le minimum de g sur $\mathbb{R}$ est $\dfrac{3}{4} > 0$.
Cl : g est positive sur $\mathbb{R}$.

Partie B - Étude de la fonction f

1. [/ ½] Justifier que la fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}$.

Réponse: $f(x)$ est bien définie si et seulement si $\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^x + 1 > 0$ si et seulement si $g(x) > 0$.
Or, d'après la partie précédente, la fonction g est bien positive sur $\mathbb{R}$.
Cl : La fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}$.

2. **[/ ½]** La fonction dérivée de la fonction f est notée f'. Justifier que $f'(x) = \dfrac{g'(x)}{g(x)}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Réponse: f est de la forme $\ln(g)$ définie sur $\mathbb{R}$ donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $f'(x) = \dfrac{g'(x)}{g(x)}$.

3. **[/ 1]** Déterminer une équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse 0.

Réponse: Une équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse 0 est de la forme $y = f'(0)(x-0) + f(0)$.
Or, pour tout réel x, $f'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x\left(2\mathrm{e}^x - 1\right)}{\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^x + 1}$ donc $f'(0) = \dfrac{\mathrm{e}^0\left(2\mathrm{e}^0 - 1\right)}{\mathrm{e}^{2\times 0} - \mathrm{e}^0 + 1} = \dfrac{1}{1} = 1$
et $f(0) = \ln\left(\mathrm{e}^{2\times 0} - \mathrm{e}^0 + 1\right) = 0$.
Or, $y = f'(0)(x-0) + f(0) \Leftrightarrow y = 1(x-0) + 0 \Leftrightarrow y = x$.
Cl : Une équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse 0 est alors $y = x$.

4. **[/ 1]** Montrer que la fonction f est strictement croissante sur $[-\ln(2)\,;+\infty[$.

Réponse: D'après ce qui précède, pour tout réel x, $f'(x) = \dfrac{g'(x)}{g(x)}$.
Or, d'après la partie précédente, g est positive sur $\mathbb{R}$ et g' est positive sur $]-\ln(2)\,;+\infty[$.
Alors, d'après la règle des signes, f' est positive sur $]-\ln(2)\,;+\infty[$.
Cl : La fonction f est strictement croissante sur $[-\ln(2)\,;+\infty[$.

5. **[/ 1½]** Montrer que l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution α sur $[-\ln(2)\,;+\infty[$ et déterminer une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

Réponse: On sait que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc f est continue sur $\mathbb{R}$.
De plus, $f\left(-\ln(2)\right) = \ln\left(g\left(-\ln(2)\right)\right) = \ln(0,75) \approx -0,3$.
De même, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$.
Donc, par composée, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
Or, $2 \in [\ln(0,75)\,;+\infty[$.
Enfin, d'après la question précédente, f est strictement croissante sur $[-\ln(2)\,;+\infty[$.
Cl : D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution α sur $[-\ln(2)\,;+\infty[$.
Enfin, par balayage à l'aide de la calculatrice, on a : $1,12 \leqslant \alpha \leqslant 1,13$. D'où $\alpha \approx 1,13$.

6. **[/ 1½]** À l'aide des résultats précédents, indiquer, pour chaque conjecture de l'élève, si elle est vraie ou fausse. Justifier.

Réponse: Affirmation 1 :
D'après la question précédente, l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution sur $[-\ln(2)\,;+\infty[$. Donc cette équation admet bien au moins une solution.
Cl : L'affirmation 1 est vraie.
Affirmation 2 :
D'après la question 4., f est strictement croissante sur $[-\ln(2)\,;+\infty[$.
Or, $-\ln(2) \approx -0,70$.
Or, $[-0,5\,;+\infty[\subset [-\ln(2)\,;+\infty[$.
Cl : L'affirmation 2 est fausse.

Affirmation 3 :
D'après la question 3., une équation de la tangente à la courbe représentative au point

d'abscisse 0 est $y = x + 1$.
Cl : L'affirmation 3 est fausse.

Exercice 4 [/ 13]

On se propose de comparer l'évolution d'une population animale dans deux milieux distincts A et B. Au 1^{er} janvier 2025, on introduit 6 000 individus dans chacun des milieux A et B.

Partie A

Dans cette partie, on étudie l'évolution de la population dans le milieu A.

On suppose que dans ce milieu, l'évolution de la population est modélisée par une suite géométrique (u_n) de premier terme $u_0 = 6$ et de raison $0,93$.

Pour tout entier naturel n : u_n représente la population au 1^{er} janvier de l'année $2025 + n$, exprimée en millier d'individus.

1. [/ ½] Donner, selon ce modèle, la population au 1^{er} janvier 2026.

Réponse: $u_1 = 0,93 \times u_0 = 0,93 \times 6 = 5,58$
Cl : Selon ce modèle, la population au 1^{er} janvier 2026 est 5 580.

2. [/ ½] Pour tout entier naturel n, exprimer u_n en fonction de n.

Réponse: On sait que la suite (u_n) est géométrique de raison $0,93$ et de premier terme $u_0 = 6$.
Donc pour tout entier naturel n, $u_n = u_0 \times 0,93^n$.
Cl : Pour tout entier naturel n, $u_n = 6 \times 0,93^n$.

3. [/ 1½] Déterminer la limite de la suite (u_n). Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Réponse: On remarque que $0 < 0,93 < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,93^n = 0$.
Alors, par produit, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 6 \times 0 = 0$.
Cl : Après un nombre très important d'années, la population dans le milieu A tendra à disparaitre.

Partie B

Dans cette partie, on étudie l'évolution de la population dans le milieu B.

On suppose que dans ce milieu, l'évolution de la population est modélisée par la suite (v_n) définie par

$$v_0 = 6 \text{ et pour tout entier naturel } n,\ v_{n+1} = -0,05v_n^2 + 1,1v_n.$$

Pour tout entier naturel n, v_n représente la population au 1^{er} janvier de l'année $2025+n$, exprimée en millier d'individus.

1. [/ ½] Donner, selon ce modèle, la population au 1^{er} janvier 2026.

Réponse: $v_1 = -0,05v_0^2 + 1,1v_0 = -0,05 \times 6^2 + 1,1 \times 6 = -0,05 \times 36 + 6,6 = -1,8 + 6,6$ $= 4,8$.
Cl : Selon ce modèle, la population au 1^{er} janvier 2026 est 4 800.

2. [/ 1] Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par

$$f(x) = -0,05x^2 + 1,1x.$$

Démontrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0\,;11]$.

Réponse: f est une fonction polynôme de degré 2 représentée par une parabole de sommet $(\alpha;\beta)$ avec $\alpha = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-1,1}{2 \times (-0,05)} = \dfrac{-1,1}{-0,1} = 11$.
De plus, le coefficient du monôme de plus haut degré est $-0,05 < 0$.
Alors f est croissante sur $[0\,;11]$ puis décroissante sur $[11\,;+\infty[$.
Cl : La fonction f est croissante sur l'intervalle $[0\,;11]$.

3. [/ 2] Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a

$$2 \leqslant v_{n+1} \leqslant v_n \leqslant 6.$$

Réponse: Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, la propriété $\mathscr{P}_n$: $2 \leqslant v_{n+1} \leqslant v_n \leqslant 6$.
<u>Initialisation</u> : $n = 0$
D'après la question 1., $v_0 = 6$ et $v_1 = 4,8$ donc on a bien $2 \leqslant 4,8 \leqslant 6 \leqslant 6$.
Donc la propriété $\mathscr{P}_0$ est vérifiée.
<u>Hérédité</u> :
Soit $n \in \mathbb{N}$ quelconque fixé.
On suppose que $\mathscr{P}_n$ est vraie et montrons que $\mathscr{P}_{n+1}$ est vérifiée.
D'après l'hypothèse de récurrence, $2 \leqslant v_{n+1} \leqslant v_n \leqslant 6$.
Or, d'après la question précédente, f est croissante sur $[0\,;11]$. De plus, $[2\,;6] \subset [0\,;11]$.
Alors $f(2) \leqslant f(v_{n+1}) \leqslant f(v_n) \leqslant f(6)$.
Enfin, $f(2) = -0,05 \times 2^2 + 1,1 \times 2 = -0,05 \times 4 + 2,2 = -0,2 + 2,2 = 2$
et $f(6) = f(v_0) = v_1 = 4,8 \leqslant 6$.
Ainsi, $2 \leqslant v_{n+2} \leqslant v_{n+1} \leqslant 6$.
Alors, $\mathscr{P}_{n+1}$ est vérifiée.
<u>Conclusion</u> :
D'après le principe de récurrence, pour tout entier naturel n, $2 \leqslant v_{n+1} \leqslant v_n \leqslant 6$.

4. [/ ½] En déduire que la suite (v_n) est convergente vers une limite ℓ.

Réponse: D'après la question précédente, la suite (v_n) est décroissante et minorée par 2 donc la suite (v_n) est convergente vers une limite que l'on note ℓ.

5. (a) **[/ 1]** Justifier que la limite ℓ vérifie $f(\ell) = \ell$ puis en déduire la valeur de ℓ.

Réponse: La suite (v_n) est définie par $v_{n+1} = f(v_n)$ avec f un polynôme de degré 2 donc f est continue sur son ensemble de définition.
De plus, d'après la question précédente, la suite (v_n) est convergente vers ℓ.
Alors ℓ est solution de $f(x) = x$.
De plus, $f(x) = x \Leftrightarrow -0,05x^2 + 1,1x = x \Leftrightarrow -0,05x^2 + 0,1x = 0$
$\Leftrightarrow -0,05x\,(x-2) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 2$.
Or, d'après la question 2., pour tout entier naturel n, $2 \leqslant v_n \leqslant 6$. Donc, par passage

à la limite, $2 \leqslant \ell \leqslant 6$.
Cl : $\ell = 2$.

(b) **[/ ½]** Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Réponse: D'après la question précédente, après un très grand nombre d'années, la population dans le milieu B tendra vers le nombre de 2 000 individus.

Partie C

Cette partie a pour but de comparer l'évolution de la population dans les deux milieux.

1. **[/ 1]** En résolvant une inéquation, déterminer l'année à partir de laquelle la population du milieu A sera strictement inférieure à 3 000 individus.

Réponse: $u_n < 3 \Leftrightarrow 6 \times 0,93^n < 3 \Leftrightarrow 0,93^n < \dfrac{3}{6} \Leftrightarrow 0,93^n < 0,5$
$\Leftrightarrow \ln(0,93^n) < \ln(0,5) \Leftrightarrow n \ln(0,93) < \ln(0,5)$
$\Leftrightarrow n > \dfrac{\ln(0,5)}{\ln(0,93)}$ car $0 < 0,93 < 1 \Rightarrow \ln(0,93) < 0$
Or, $\dfrac{\ln(0,5)}{\ln(0,93)} \approx 9,55$.
Alors, le plus petit entier n tel que $u_n < 3$ est 10.
Cl : La population du milieu A sera strictement inférieure à 3 000 individus à partir de 2035.

2. **[/ ½]** À l'aide de la calculatrice, déterminer l'année à partir de laquelle la population du milieu B sera strictement inférieure à 3 000 individus.

Réponse: Par balayage, on a $v_5 \approx 3,14 > 3$ et $v_6 \approx 2,96 < 3$.
Cl : La population du milieu B sera strictement inférieure à 3 000 individus à partir de 2031.

3. **[/ 1½]** Justifier qu'à partir d'une certaine année, la population du milieu B dépassera la population du milieu A.

Réponse: D'après la partie A, la suite (u_n) converge vers 0 et d'après la partie B, la suite (v_n) converge vers 2.
Or, les suites (u_n) et (v_n) sont décroissantes de premier terme $u_0 = v_0 = 6$. Il existe alors un rang N tel que $v_N > u_N$.
Cl : À partir d'une certaine année, la population du milieu B dépassera la population du milieu A.

4. On considère le programme Python ci-contre.

(a) **[/ 1½]** Recopier et compléter ce programme afin qu'après exécution, il affiche l'année à partir de laquelle la population du milieu B est strictement supérieure à la population du milieu A.

(b) **[/ ½]** Déterminer l'année affichée après exécution du programme.

Réponse: L'année affichée après exécution du programme est 2025 + 13 soit 2038.

```
n = 0
u = 6
v = 6
while u>=v :
    u = 0,93*u
    v= -0,05*v**2+1,1*v
    n = n+1
print (2025 + n)
```