

# BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE BLANCHE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2026

## MATHÉMATIQUES

Mardi 10 mars

*Correction*

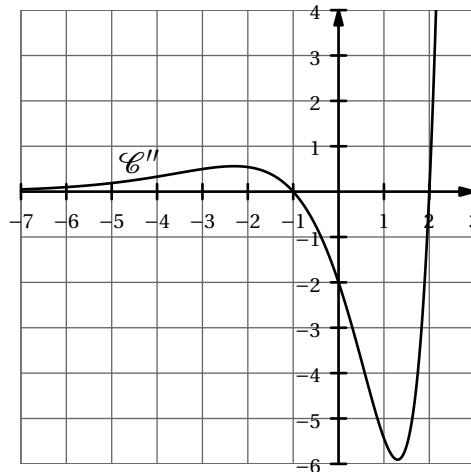
*Jour 1*

### Exercice 1 [ / 9]

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Une réponse non justifiée, fautive, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point. Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la réponse choisie en la justifiant.

1. [ / 1] On considère une fonction  $f$  définie et deux fois dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

On appelle  $\mathcal{C}$  sa représentation graphique.  
On désigne par  $f''$  la dérivée seconde de  $f$ .  
On a représenté sur le graphique ci-contre la courbe de  $f''$ , notée  $\mathcal{C}''$ .



1.  $\mathcal{C}$  admet un unique point d'inflexion ;
2.  $f$  est convexe sur l'intervalle  $[-1; 2]$  ;
3.  $f$  est convexe sur  $]-\infty; -1]$  et sur  $[2; +\infty[$  ;
4.  $f$  est convexe sur  $\mathbb{R}$ .

**Réponse:** On remarque que  $f''$  s'annule en changeant de signe deux fois en  $-1$  et  $2$  donc  $\mathcal{C}$  admet deux points d'inflexion.

$f''$  est positive sur  $]-\infty; -1]$  et sur  $[2; +\infty[$  et négative sur  $[-1; 2]$  donc  $f$  est convexe sur  $]-\infty; -1]$  et sur  $[2; +\infty[$  et concave sur  $[-1; 2]$ .

Réponse 3

2. [ / 2] On considère la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = \frac{2e^x}{e^x + 1}$ . La courbe représentative de la fonction  $g$  admet pour asymptote en  $+\infty$  la droite d'équation :

1.  $x = 2$  ;
2.  $y = 2$  ;
3.  $y = 0$  ;
4.  $x = -1$ .

**Réponse:**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2e^x = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x + 1) = +\infty$ .

On obtient alors la forme indéterminée  $\frac{\infty}{\infty}$ .

Levons l'indétermination :

Soit  $x$  un réel.

$$g(x) = \frac{e^x \times 2}{e^x \left(1 + \frac{1}{e^x}\right)} = \frac{2}{1 + \frac{1}{e^x}}$$

Or,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$  donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{e^x}\right) = 1$ .

Ainsi, par quotient, on a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \frac{2}{1} = 2$ .

Cl : La courbe représentative de la fonction  $g$  admet pour asymptote en  $+\infty$  la droite d'équation  $y = 2$ .

Réponse 2

3. [ / 2] Soit  $(v_n)$  la suite définie pour tout entier naturel  $n$  par :  $v_n = \frac{n}{2 + \cos(n)}$ . La suite  $(v_n)$  :

- |                        |                                  |
|------------------------|----------------------------------|
| 1. n'a pas de limite ; | 3. converge vers $\frac{1}{2}$ ; |
| 2. converge vers 0 ;   | 4. diverge vers $+\infty$ .      |

**Réponse:** Pour tout entier naturel  $n$ , on a  $-1 \leq \cos(n) \leq 1$ .

Or,  $-1 \leq \cos(n) \leq 1 \Leftrightarrow 2 - 1 \leq 2 + \cos(n) \leq 2 + 1 \Leftrightarrow 1 \leq 2 + \cos(n) \leq 3$

$\Leftrightarrow 1 \geq \frac{1}{2 + \cos(n)} \geq \frac{1}{3}$  car la fonction inverse est décroissante sur  $]0; +\infty[$

$\Leftrightarrow n \geq \frac{n}{2 + \cos(n)} \geq \frac{n}{3}$

Or,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{3} = +\infty$  donc par comparaison,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$

Réponse 4

4. [ / 2] On considère l'inéquation suivante :  $\ln(x^2 - 4x + 3) \geq 0$ . L'ensemble des solutions de cette inéquation est :

- |  |   |
|--|---|
| 1. $] -\infty ; 1[ \cup ] 3 ; +\infty [$ ;                       | 3. $] -\infty ; 2 - \sqrt{2}] \cup ] 3 ; +\infty [$ ; |
| 2. $] -\infty ; 2 - \sqrt{2}] \cup [ 2 + \sqrt{2} ; +\infty [$ ; | 4. $] -\infty ; 1[ \cup [ 2 + \sqrt{2} ; +\infty [$ . |

**Réponse:**  $\ln(x^2 - 4x + 3)$  est bien défini si et seulement si  $x^2 - 4x + 3 > 0$

Or, 1 est une racine évidente de  $x^2 - 4x + 3$ . De plus, si on note  $x_2$  la deuxième racine, d'après la relation coefficients-racines, on a  $1 \times x_2 = 3$  donc  $x_2 = 3$ .

D'où  $x^2 - 4x + 3 = (x - 1)(x - 3)$ .

Enfin, le coefficient du monôme de plus haut degré est  $1 > 0$  donc  $x^2 - 4x + 3 > 0$  si et seulement si  $x \in ] -\infty ; 1[ \cup ] 3 ; +\infty [$ .

De plus,  $\ln(x^2 - 4x + 3) \geq 0 \Leftrightarrow \ln(x^2 - 4x + 3) \geq \ln(1) \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 \geq 1$

$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 2 \geq 0$

Or, le discriminant de  $x^2 - 4x + 2$  est  $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 2 = 16 - 8 = 8$  donc  $\Delta > 0$ .

Alors  $x^2 - 4x + 2$  admet deux racines réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-(-4) - \sqrt{8}}{2 \times 1} = \frac{4 - 2\sqrt{2}}{2} = 2 - \sqrt{2} \text{ et } x_2 = \frac{-(-4) + \sqrt{8}}{2 \times 1} = \frac{4 + 2\sqrt{2}}{2} = 2 + \sqrt{2}.$$

Or, le coefficient du monôme du plus haut degré de  $x^2 - 4x + 2$  est  $1 > 0$ .

Donc,  $x^2 - 4x + 2 \geq 0$  à l'extérieur de ses racines soit sur  $] -\infty ; 2 - \sqrt{2}] \cup [ 2 + \sqrt{2} ; +\infty [$ .

Enfin, en combinant les deux ensembles précédents, l'ensemble des solutions de  $\ln(x^2 - 4x + 3) \geq 0$  est  $] -\infty ; 2 - \sqrt{2}] \cup [ 2 + \sqrt{2} ; +\infty [$ .

Réponse 2

5. [ / 2] On considère les points  $A(-3; 1; 4)$ ,  $B(1; 5; 2)$  et  $C(0; 1; -1)$  dans un repère orthonormé de l'espace. La valeur de l'angle  $\widehat{BAC}$  arrondi au degré est :

- |         |         |         |       |
|---------|---------|---------|-------|
| 1. 90 ; | 2. 51 ; | 3. 39 ; | 4. 0. |
|---------|---------|---------|-------|

**Réponse:**  $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$ .

$$\text{Or, } \vec{AB} \begin{pmatrix} 1 - (-3) \\ 5 - 1 \\ 2 - 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{AB} \begin{pmatrix} 1 + 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{AB} \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\text{et } \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 0 - (-3) \\ 1 - 1 \\ -1 - 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 0 + 3 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$$

De plus, comme le repère considéré est orthonormé, on a

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 4 \times 3 + 4 \times 0 + (-2) \times (-5) = 12 + 0 + 10 = 22$$

$$\text{De plus, } AB = \sqrt{4^2 + 4^2 + (-2)^2} = \sqrt{16 + 16 + 4} = \sqrt{36} = 6$$

$$\text{et } AC = \sqrt{3^2 + 0^2 + (-5)^2} = \sqrt{9 + 0 + 25} = \sqrt{34}.$$

$$\text{Enfin } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC}) \Leftrightarrow 22 = 6 \times \sqrt{34} \times \cos(\widehat{BAC})$$

$$\Leftrightarrow \frac{22}{6 \times \sqrt{34}} = \cos(\widehat{BAC}) \Leftrightarrow \cos(\widehat{BAC}) = \frac{11\sqrt{34}}{3 \times 34} \Leftrightarrow \widehat{BAC} = \cos^{-1}\left(\frac{11\sqrt{34}}{102}\right)$$

$$\Leftrightarrow \widehat{BAC} \approx 51$$

Réponse 2

### Exercice 2 [ / 10]

L'espace est rapporté à un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ . On considère les points suivants:

$$A(1; 3; 0), \quad B(-1; 4; 5), \quad C(0; 1; 0) \quad \text{et} \quad D(-2; 2; 1).$$

1. [ / 1] Montrer que les points  $A$ ,  $B$  et  $C$  déterminent un plan.

**Réponse:**  $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -1 - 1 \\ 4 - 3 \\ 5 - 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$  et  $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 0 - 1 \\ 1 - 3 \\ 0 - 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

On remarque que  $x_{\overrightarrow{AB}} = -2x_{\overrightarrow{AC}}$  mais  $y_{\overrightarrow{AB}} \neq 2y_{\overrightarrow{AC}}$ .

Alors les vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$  ne sont pas colinéaires.

Cl : Les points  $A$ ,  $B$  et  $C$  déterminent bien un plan.

2. [ / 1] Montrer que le triangle  $ABC$  est rectangle en  $A$ .

**Réponse:** On remarque que le repère  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  est bien orthonormé.

$$\text{D'où } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -2 \times (-1) + 1 \times (-2) + 5 \times 0 = 2 - 2 = 0.$$

Alors, les vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$  sont orthogonaux.

Cl : Le triangle  $ABC$  est bien rectangle en  $A$ .

3. Soit  $\Delta$  la droite passant par le point  $D$  et de vecteur directeur  $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

- (a) [ / 1½] Démontrer que la droite  $\Delta$  est orthogonale au plan  $(ABC)$ .

**Réponse:**  $\vec{u} \cdot \overrightarrow{AB} = 2 \times (-2) + (-1) \times 1 + 1 \times 5 = -4 - 1 + 5 = 0$

$$\text{et } \vec{u} \cdot \overrightarrow{AC} = 2 \times (-1) + (-1) \times (-2) + 1 \times 0 = -2 + 2 + 0 = 0.$$

Donc,  $\vec{u}$  est orthogonal aux vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$ .

Or,  $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$  est une base de  $(ABC)$  et  $\vec{u}$  dirige  $\Delta$ .

Cl : La droite  $\Delta$  est orthogonale au plan  $(ABC)$ .

- (b) [ / 1] Justifier que le plan  $(ABC)$  admet pour équation cartésienne :

$$2x - y + z + 1 = 0.$$

**Réponse:** D'après la question précédente,  $\vec{u}$  est normal au plan  $(ABC)$  donc ce plan admet une équation de la forme  $2x - y + z + d = 0$  avec  $d$  réel.

Or,  $A$  appartient au plan  $(ABC)$  si et seulement si  $2x_A - y_A + z_A + d = 0$  si et seulement si  $2 \times 1 - 3 + 0 + d = 0$  si et seulement si  $2 - 3 + 0 + d = 0$  si et seulement si  $-1 + d = 0$  si et seulement si  $d = 1$ .

Cl :  $2x - y + z + 1 = 0$  est bien une équation du plan  $(ABC)$ .

- (c) [ / 1/2] Déterminer une représentation paramétrique de la droite  $\Delta$ .

**Réponse:**  $\Delta$  est dirigée par  $\vec{u}$  et passe par  $D$  donc une représentation paramétrique de  $\Delta$  est

$$\begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = 1 + t \end{cases} \quad \text{où } t \in \mathbb{R}$$

4. [ / 1 1/2] On appelle  $H$  le point de coordonnées  $\left(-\frac{2}{3}; \frac{4}{3}; \frac{5}{3}\right)$ . Vérifier que  $H$  est le projeté orthogonal du point  $D$  sur le plan  $(ABC)$ .

**Réponse:** On remarque que :

$$2x_H - y_H + z_H + 1 = 2 \times \left(-\frac{2}{3}\right) - \frac{4}{3} + \frac{5}{3} + 1 = -\frac{4}{3} - \frac{4}{3} + \frac{5}{3} + \frac{3}{3} = 0.$$

Donc le point  $H$  appartient au plan  $(ABC)$ .

$$\text{De plus, } \begin{cases} -\frac{2}{3} = -2 + 2t \\ \frac{4}{3} = 2 - t \\ \frac{5}{3} = 1 + t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{2}{3} + 2 = 2t \\ t = 2 - \frac{4}{3} \\ \frac{5}{3} - 1 = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2t = -\frac{2}{3} + \frac{6}{3} \\ t = \frac{6}{3} - \frac{4}{3} \\ t = \frac{5}{3} - \frac{3}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2t = \frac{4}{3} \\ t = \frac{2}{3} \\ t = \frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{2}{3} \\ t = \frac{2}{3} \\ t = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Ce système admet donc une unique solution. Ainsi, le point  $H$  appartient également à la droite  $\Delta$  orthogonale au plan  $(ABC)$  et passant par le point  $D$ .

Cl :  $H$  est le projeté orthogonal du point  $D$  sur le plan  $(ABC)$ .

5. On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par  $V = \frac{1}{3}B \times h$ , où  $B$  est l'aire d'une base du tétraèdre et  $h$  est sa hauteur relative à cette base.

- (a) [ / 1/2] Montrer que  $DH = \frac{2\sqrt{6}}{3}$ .

**Réponse:** On remarque que le repère considéré est bien orthonormé.

$$\begin{aligned} \text{D'où } DH &= \sqrt{(x_H - x_D)^2 + (y_H - y_D)^2 + (z_H - z_D)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{-2}{3} - (-2)\right)^2 + \left(\frac{4}{3} - 2\right)^2 + \left(\frac{5}{3} - 1\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{-2}{3} + \frac{6}{3}\right)^2 + \left(\frac{4}{3} - \frac{6}{3}\right)^2 + \left(\frac{5}{3} - \frac{3}{3}\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^2 + \left(\frac{-2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{16}{9} + \frac{4}{9} + \frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{24}{9}} = \frac{\sqrt{4 \times 6}}{\sqrt{9}} = \frac{2\sqrt{6}}{3}. \end{aligned}$$

$$\text{Cl : } DH = \frac{2\sqrt{6}}{3}$$

(b) [ / 1½] En déduire le volume du tétraèdre  $ABCD$ .

**Réponse:** D'après la question 4,  $H$  est le projeté orthogonal de  $D$  sur le plan  $(ABC)$  donc  $DH$  est la hauteur relativement à la base  $ABC$ .

De plus, d'après la question 2, le triangle  $ABC$  est rectangle en  $A$ .

$$\text{Or, } AB = \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 5^2} = \sqrt{4 + 1 + 25} = \sqrt{30}$$

$$\text{et } AC = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + 0^2} = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}$$

$$\text{D'où } B = \frac{AB \times AC}{2} = \frac{\sqrt{30} \times \sqrt{5}}{2} = \frac{\sqrt{30 \times 5}}{2} = \frac{\sqrt{5^2 \times 6}}{2} = \frac{5\sqrt{6}}{2}.$$

$$\text{Alors } V = \frac{1}{3}B \times DH = \frac{1}{3} \times \frac{5\sqrt{6}}{2} \times \frac{2\sqrt{6}}{3} = \frac{10\sqrt{6}^2}{3 \times 2 \times 3} = \frac{60}{18} = \frac{10}{3}.$$

Cl : Le volume du tétraèdre  $ABCD$  est  $\frac{10}{3}$  u.v.

6. [ / 1½] On considère la droite  $d$  de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 1 - 2k \\ y = -3k \\ z = 1 + k \end{cases} \quad \text{où } k \in \mathbb{R}.$$

La droite  $d$  et le plan  $(ABC)$  sont-ils sécants ou parallèles ?

**Réponse:** Le vecteur  $\vec{v} \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$  dirige la droite  $d$ .

De plus, d'après la question 3. (b),  $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$  est normal au plan  $(ABC)$ .

$$\text{Or, } \vec{u} \cdot \vec{v} = -2 \times 2 + (-3) \times (-1) + 1 \times 1 = -4 + 3 + 1 = 0.$$

Ainsi, les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont orthogonaux.

Cl : La droite  $d$  et le plan  $(ABC)$  sont parallèles.

**Exercice 3** [ / 10]

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = e^{3x} - (2x + 1)e^x.$$

Le but de cet exercice est d'étudier la fonction  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .

### Partie A - Étude d'une fonction auxiliaire

On définit la fonction  $g$  sur  $\mathbb{R}$  par :

$$g(x) = 3e^{2x} - 2x - 3.$$

1. (a) [ / ½] Déterminer la limite de la fonction  $g$  en  $-\infty$ .

**Réponse:**  $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2x = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$  donc, par composée,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x} = 0$ .

De plus,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x - 3) = -\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x) - 3 = +\infty$ .

Cl : Par somme,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$

(b) [ / 1] Déterminer la limite de la fonction  $g$  en  $+\infty$ .

**Réponse:**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$  donc, par composée,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x} = +\infty$ .

De plus,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-2x - 3) = -\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x) - 3 = -\infty$ .

On obtient alors la forme indéterminée  $\infty - \infty$ .

Levons l'indétermination :

Soit  $x$  un réel. Alors  $g(x) = e^{2x} \left( 3 - \frac{2x}{e^{2x}} - \frac{3}{e^{2x}} \right) = e^{2x} (3 - 2xe^{-2x} - 3e^{-2x})$ .

Or,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} -2x = -\infty$  et par croissances comparées,  $\lim_{X \rightarrow -\infty} Xe^X = 0$  donc, par composées  $\lim_{x \rightarrow +\infty} -2xe^{-2x} = 0$ .

D'où, par somme,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3 - 2xe^{-2x} - 3e^{-2x}) = 3$ .

Enfin, par produit,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x} (3 - 2xe^{-2x} - 3e^{-2x}) = +\infty$ .

Cl :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$

2. (a) [ / 1/2] On admet que la fonction  $g$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ , et on note  $g'$  sa fonction dérivée. Démontrer que pour tout nombre réel  $x$ , on a  $g'(x) = 6e^{2x} - 2$ .

**Réponse:** On admet que  $g$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

Alors pour tout réel  $x$ ,  $g'(x) = 3 \times 2e^{2x} - 2 + 0 = 6e^{2x} - 2$ .

Cl : Pour tout réel  $x$ ,  $g'(x) = 6e^{2x} - 2$ .

(b) [ / 1] Étudier le signe de la fonction dérivée  $g'$  sur  $\mathbb{R}$ .

**Réponse:**  $g'(x) > 0 \Leftrightarrow 6e^{2x} - 2 > 0 \Leftrightarrow 6e^{2x} > 2 \Leftrightarrow e^{2x} > \frac{2}{6} \Leftrightarrow e^{2x} > \frac{1}{3}$

$\Leftrightarrow \ln(e^{2x}) > \ln\left(\frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow 2x > -\ln(3) \Leftrightarrow x > -\frac{1}{2}\ln(3)$ .

D'où le tableau de signes suivant :

Valeurs de $x$	$-\infty$	$-\frac{1}{2}\ln(3)$	$+\infty$
Signes de $g'(x)$	-	0	+

(c) [ / 1] En déduire le tableau de variations de la fonction  $g$  sur  $\mathbb{R}$ . Vérifier que la fonction  $g$  admet un minimum égal à  $\ln(3) - 2$ .

**Réponse:** D'après les questions précédentes, le tableau de variations de  $g$  est :

Valeurs de $x$	$-\infty$	$-\frac{1}{2}\ln(3)$	$+\infty$
Variations de $g$	$+\infty$	$\searrow$ $\ln(3) - 2$ $\nearrow$	$+\infty$

Avec  $g\left(-\frac{1}{2}\ln(3)\right) = 3e^{2 \times \left(-\frac{1}{2}\ln(3)\right)} - 2 \times \left(-\frac{1}{2}\ln(3)\right) - 3 = 3e^{-\ln(3)} + \ln(3) - 3$   
 $= 3e^{\ln\left(\frac{1}{3}\right)} + \ln(3) - 3 = 3 \times \frac{1}{3} + \ln(3) - 3 = 1 + \ln(3) - 3 = \ln(3) - 2$ .

Cl :  $g$  admet un minimum égal à  $\ln(3) - 2$  atteint en  $-\frac{1}{2}\ln(3)$ .

3. (a) [ / 1/2] Montrer que  $x = 0$  est solution de l'équation  $g(x) = 0$ .

**Réponse:**  $g(0) = 3e^{2 \times 0} - 2 \times 0 - 3 = 3e^0 - 3 = 3 \times 1 - 3 = 0$ .

Cl :  $x = 0$  est bien une solution de l'équation  $g(x) = 0$ .

- (b) [ / 1 1/2] Montrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet une deuxième solution, non nulle, notée  $\alpha$ , dont on donnera un encadrement d'amplitude  $10^{-1}$ .

**Réponse:** D'après la question 2. (a), la fonction  $g$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  donc  $g$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .

De plus, d'après la question 2. (c),  $g\left(-\frac{1}{2}\ln(3)\right) = \ln(3) - 2 \approx -0,9 < 0$  et

$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$ . Ainsi, 0 est compris entre  $g\left(-\frac{1}{2}\ln(3)\right)$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ .

Enfin, d'après la question 2. (c),  $g$  est monotone sur  $\left]-\infty; -\frac{1}{2}\ln(3)\right[$ .

Cl : D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation  $g(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$  dans  $\left]-\infty; -\frac{1}{2}\ln(3)\right[$ .

Par balayage à l'aide de la calculatrice, on a :  $-1,5 < \alpha < -1,4$ .

- (c) [ / 1/2] Dédurre des questions précédentes le signe de la fonction  $g$  sur  $\mathbb{R}$ .

**Réponse:** D'après les questions précédentes, le signe de  $g$  est donné par le tableau suivant :

Valeurs de $x$	$-\infty$	$\alpha$	0	$+\infty$
Signes de $g(x)$	+	0	-	+

### Partie B - Étude de la fonction $f$

1. [ / 1] La fonction  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ , et on note  $f'$  sa fonction dérivée.

Démontrer que pour tout nombre réel  $x$ , on a  $f'(x) = e^x g(x)$ , où  $g$  est la fonction définie dans la **partie A**.

**Réponse:** On admet que la fonction  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

La fonction  $x \mapsto (2x + 1)e^x$  est le produit de deux fonctions dérivables  $u : x \mapsto 2x + 1$  et  $v : x \mapsto e^x$ .

Cette fonction a donc pour fonction dérivée  $u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = 2e^x + (2x + 1)e^x = e^x(2 + 2x + 1) = e^x(2x + 3)$ .

Alors, pour tout réel  $x$ ,  $f'(x) = 3e^{3x} - e^x(2x + 3) = 3e^{2x}e^x - e^x(2x + 3) = e^x(3e^{2x} - (2x + 3)) = e^x g(x)$ .

Cl : Pour tout nombre réel  $x$ , on a  $f'(x) = e^x g(x)$ .

2. [ / 1] En déduire alors le signe de la fonction dérivée  $f'$  puis les variations de la fonction  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .

**Réponse:** On rappelle que la fonction exponentielle est strictement positive sur  $\mathbb{R}$ .

Donc d'après la partie A, le signe de  $f'$  est donné par :

Valeurs de $x$	$-\infty$	$\alpha$	$0$	$+\infty$	
Signes de $f'(x)$	$+$	$0$	$-$	$0$	$+$
Variations de $f$		$f(\alpha)$			$+\infty$
	$0$			$0$	

3. [ / 1½] Pourquoi la fonction  $f$  n'est-elle pas convexe sur  $\mathbb{R}$  ? Expliquer.

**Réponse:** Raisonnons par l'absurde :

On suppose que la fonction  $f$  est convexe sur  $\mathbb{R}$  alors sa fonction dérivée  $f'$  est croissante sur  $\mathbb{R}$ .

Or on a vu que la fonction  $f'$  est à valeurs positives sur  $]-\infty; \alpha[$  puis à valeurs strictement négatives sur  $]\alpha; 0[$ .

On a donc :  $f'(-2) > 0$  et  $f'(-1) < 0$  d'où  $f'(-2) > f'(-1)$ , ce qui est contradictoire avec la croissance de la fonction  $f'$  puisque  $-2 < -1$ .

Cl :  $f$  n'est pas convexe sur  $\mathbb{R}$ .

#### Exercice 4 [ / 11]

Le but de cet exercice est d'étudier les convergences de deux suites vers une même limite.

#### Partie A

On considère la fonction  $f$  définie sur  $[2; +\infty[$  par  $f(x) = \sqrt{3x - 2}$ .

1. [ / 2] Déterminer les variations et les limites en 2 et  $+\infty$  de  $f$ .

**Réponse:**  $f$  est de la forme  $v \circ u$  où  $u : x \mapsto 3x - 2$  et  $v : x \mapsto \sqrt{x}$ .

La fonction  $v$  est dérivable sur  $]0; +\infty[$  de dérivée  $v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ .

La fonction  $u$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  de dérivée  $u'(x) = 3$ .

Enfin,  $u(x) > 0 \Leftrightarrow 3x - 2 > 0 \Leftrightarrow 3x > 2 \Leftrightarrow x > \frac{2}{3}$  et  $[2; +\infty[ \subset ]\frac{2}{3}; +\infty[$ .

Alors  $f$  est dérivable sur  $[2; +\infty[$  de dérivée :

$$f'(x) = u'(x) \times v'(u(x)) = 3 \times \frac{1}{2\sqrt{3x-2}} = \frac{3}{2\sqrt{3x-2}}$$

On remarque que pour tout  $x$  de  $[2; +\infty[$ ,  $f'(x) > 0$  donc  $f$  est strictement croissante sur  $[2; +\infty[$ .

$\lim_{x \rightarrow 2} (3x - 2) = 3 \times 2 - 2 = 6 - 2 = 4$  et  $\lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{x} = \sqrt{4} = 2$  donc, par composée,  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 2$ .

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x - 2) = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$  donc, par composée,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .

2. On admet que la suite  $(u_n)$  vérifiant  $u_0 = 6$  et, pour tout  $n$  entier naturel,  $u_{n+1} = f(u_n)$  est bien définie.
- (a) [ / 2] Démontrer par récurrence que, pour tout  $n$  entier naturel :

$$2 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 6.$$

**Réponse:** Démontrons à l'aide d'une récurrence sur  $n \in \mathbb{N}$  la propriété  $\mathcal{P}_n$  :

$$2 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 6.$$

Initialisation :  $n = 0$

$u_0 = 6$  et  $u_1 = f(u_0) = \sqrt{3 \times 6 - 2} = \sqrt{16} = 4$ .

On remarque que  $2 \leq u_1 \leq u_0 \leq 6$ .

La propriété  $\mathcal{P}_0$  est donc vérifiée.

Hérédité :

Soit  $n \in \mathbb{N}$  quelconque fixé.

On suppose que  $\mathcal{P}_n$  est vraie et on montre que  $\mathcal{P}_{n+1}$  est vérifiée.

Par hypothèse de récurrence,  $2 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 6$ .

Or, d'après la question précédente,  $f$  est strictement croissante sur  $[2; +\infty[$  donc  $f(2) \leq f(u_{n+1}) \leq f(u_n) \leq f(6)$ .

Or,  $f(2) = \sqrt{3 \times 2 - 2} = \sqrt{4} = 2$  et  $f(6) = u_1 = 4$ .

Alors  $2 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1} \leq 4 \leq 6$ .

La propriété  $\mathcal{P}_{n+1}$  est alors vérifiée.

Conclusion :

D'après le principe de récurrence, pour tout entier naturel  $n$ ,  $2 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 6$ .

(b) [ / 1½] En déduire que la suite  $(u_n)$  converge et déterminer sa limite.

**Réponse:** D'après la question précédente, pour tout entier naturel  $n$ ,

$2 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 6$ .

La suite  $(u_n)$  est alors décroissante et minorée par 2.

Alors, la suite  $(u_n)$  converge.

Or, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} = f(u_n)$  avec  $f$  continue donc sa limite  $\ell$  est solution de  $f(x) = x$ .

De plus,  $f(x) = x \Leftrightarrow \sqrt{3x - 2} = x \Leftrightarrow \sqrt{3x - 2}^2 = x^2 \Leftrightarrow 3x - 2 = x^2 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0$ .

Or 1 et 2 sont deux racines évidentes de  $x^2 - 3x + 2$  :

$1^2 - 3 \times 1 + 2 = 1 - 3 + 2 = 0$  et  $2^2 - 3 \times 2 + 2 = 4 - 6 + 2 = 0$

Donc  $\ell \in \{1; 2\}$ .

De plus, d'après ce qui précède, pour tout entier naturel  $n$ ,  $2 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 6$ . Donc, par passage à la limite,  $2 \leq \ell \leq 6$ .

Cl :  $\ell = 2$ .

3. On rappelle que `sqrt(x)` renvoie la racine carrée du nombre  $x$ .

```
1 from math import *
2
3 def rang(a) :
4     u = 6
5     n = 0
6     while u >= a :
7         u = sqrt(3 * u - 2)
8         n = n + 1
9     return n
```

(a) [ / ½] Pourquoi peut-on affirmer que `rang(2.000001)` renvoie une valeur ?

**Réponse:** `rang(2.000001)` renvoie une valeur si et seulement si il existe un rang à partir duquel les termes de la suite deviennent inférieurs strictement à 2.000001.

Or, d'après la question précédente,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2$  donc tout intervalle ouvert contenant 2 contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

Cl : On peut affirmer que `rang(2.000001)` renvoie une valeur.

- (b) [ / 1/2] Pour quelles valeurs du paramètre  $a$  l'instruction  $\text{rang}(a)$  renvoie-t-elle un résultat ?

**Réponse:** D'après la question précédente, l'instruction renvoie un résultat si et seulement si  $a > \ell = 2$ .

Cl : L'instruction  $\text{rang}(a)$  renvoie un résultat pour tout  $a > 2$ .

## Partie B

On admet que la suite  $(v_n)$  vérifiant  $v_0 = 6$  et, pour tout  $n$ , entier naturel,  $v_{n+1} = 3 - \frac{2}{v_n}$  est bien définie.

1. [ / 1/2] Calculer  $v_1$ .

**Réponse:**  $v_1 = 3 - \frac{2}{v_0} = 3 - \frac{2}{6} = 3 - \frac{1}{3} = \frac{9-1}{3} = \frac{8}{3}$

Cl :  $v_1 = \frac{8}{3}$ .

2. Pour tout  $n$  entier naturel, on admet que  $v_n \neq 2$  et on pose :  $w_n = \frac{v_n - 1}{v_n - 2}$ .

- (a) [ / 1] Démontrer que la suite  $(w_n)$  est géométrique de raison 2 et préciser son premier terme  $w_0$ .

**Réponse:** Soit  $n$  un entier naturel.

$$\begin{aligned} w_{n+1} &= \frac{v_{n+1} - 1}{v_{n+1} - 2} = \frac{3 - \frac{2}{v_n} - 1}{3 - \frac{2}{v_n} - 2} = \frac{2 - \frac{2}{v_n}}{1 - \frac{2}{v_n}} = \frac{\frac{2v_n - 2}{v_n}}{\frac{v_n - 2}{v_n}} = \frac{2v_n - 2}{v_n} \times \frac{v_n}{v_n - 2} \\ &= \frac{2v_n - 2}{v_n - 2} = \frac{2(v_n - 1)}{v_n - 2} = 2w_n. \end{aligned}$$

$$\text{Enfin, } w_0 = \frac{v_0 - 1}{v_0 - 2} = \frac{6 - 1}{6 - 2} = \frac{5}{4}.$$

Cl : La suite  $(w_n)$  est géométrique de raison 2 et de premier terme  $w_0 = \frac{5}{4}$ .

- (b) [ / 1] On admet que, pour tout  $n$  entier naturel,  $w_n - 1 = \frac{1}{v_n - 2}$ . En déduire que, pour tout  $n$  entier naturel,

$$v_n = 2 + \frac{1}{1,25 \times 2^n - 1}$$

**Réponse:** Comme, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $w_n - 1 \neq 0$ , alors  $w_n \neq 1$ , et on a :

$$w_n - 1 = \frac{1}{v_n - 2} \Leftrightarrow \frac{1}{w_n - 1} = v_n - 2 \Leftrightarrow v_n = 2 + \frac{1}{w_n - 1}.$$

Or, d'après la question précédente,  $(w_n)$  est géométrique de raison  $q = 2$  et de premier terme  $w_0 = \frac{5}{4}$ . Donc pour tout entier naturel  $n$ ,  $w_n = w_0 q^n = \frac{5}{4} \times 2^n = 1,25 \times 2^n$ .

$$\text{Alors, } w_n - 1 = \frac{1}{v_n - 2} \Leftrightarrow v_n = 2 + \frac{1}{1,25 \times 2^n - 1}.$$

Cl : Pour tout entier naturel  $n$ ,  $v_n = 2 + \frac{1}{1,25 \times 2^n - 1}$ .

(c) [ / 1/2] Calculer la limite de  $(v_n)$ .

**Réponse:**  $2 > 1$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n = +\infty$  d'où  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1,25 \times 2^n - 1) = +\infty$  et, par

l'inverse,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{1,25 \times 2^n - 1} = 0$ .

Enfin, par somme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( 2 + \frac{1}{1,25 \times 2^n - 1} \right) = 2$ .

Cl :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2$

3. [ / 1 1/2] Déterminer le plus petit entier naturel  $n$  pour lequel  $v_n < 2,01$  en résolvant l'inéquation.

**Réponse:**  $v_n < 2,01 \Leftrightarrow 2 + \frac{1}{1,25 \times 2^n - 1} < 2,01 \Leftrightarrow \frac{1}{1,25 \times 2^n - 1} < 0,01$

$\Leftrightarrow 1,25 \times 2^n - 1 > \frac{1}{0,01}$  car la fonction inverse est décroissante sur  $]0; +\infty[$

$\Leftrightarrow 1,25 \times 2^n - 1 > 100 \Leftrightarrow 1,25 \times 2^n > 101 \Leftrightarrow 2^n > \frac{101}{1,25} \Leftrightarrow 2^n > 80,8$

$\Leftrightarrow \ln(2^n) > \ln(80,8) \Leftrightarrow n \ln(2) > \ln(80,8) \Leftrightarrow n > \frac{\ln(80,8)}{\ln(2)}$  car  $2 > 1$  donc  $\ln(2) > 0$

Or,  $\frac{\ln(80,8)}{\ln(2)} \approx 6,34$ .

Cl : Le plus petit entier naturel  $n$  pour lequel  $v_n < 2,01$  est 7.