Nom : **Prénom :** **T$^{\text{le}}$:**

Spécialité mathématiques

Orthogonalité dans l'espace

Sujet 1 09/12/2025

Note : $/ \ 15$ Durée : 1 h

— La calculatrice n'est pas autorisée.
— Le sujet est à rendre avec la copie.

Exercice 1 [/ 3]

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace tels que $\|\vec{u}\| = 3$, $\|\vec{v}\| = 4$ et $\|\vec{u}+\vec{v}\| = \sqrt{25-12\sqrt{3}}$.
Déterminer les mesures possibles de l'angle $(\vec{u}\,;\vec{v})$.

Solution: On va utiliser la formule

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos((\vec{u}\,;\vec{v})).$$

Cependant, pour cela, on a besoin de $\vec{u}\cdot\vec{v}$ que l'on calcule comme suit

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right).$$

Cela nous donne

$$\begin{aligned}\vec{u}\cdot\vec{v} &= \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\sqrt{25-12\sqrt{3}}^2 - 3^2 - 4^2\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(25-12\sqrt{3}-9-16\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(-12\sqrt{3}\right)\\ &= -6\sqrt{3}.\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}& -6\sqrt{3} = 3\times 4\times\cos((\vec{u}\,;\vec{v}))\\ \iff{}& \cos((\vec{u}\,;\vec{v})) = -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \iff{}& (\vec{u}\,;\vec{v}) = \pm\frac{5\pi}{6}.\end{aligned}$$

Exercice 2 [/ 4]

$A\,(0\,;1\,;0)$, $B\,(-1\,;2\,;1)$ et $C\,(3\,;0\,;1)$ sont des points dans l'espace muni d'un repère orthonormé.

1. [/ 2] Montrer que A, B et C définissent un plan.

Solution: A, B et C définissent un plan si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires. Calculons leurs coordonnées.

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix} \implies \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

De même, on trouve $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. On a alors

$$\overrightarrow{AB} = \lambda\overrightarrow{AC} \iff \left\{\begin{array}{rcl} -1 & = & 3\lambda \\ 1 & = & -\lambda \\ 1 & = & \lambda \end{array}\right. .$$

Le système est incompatible. $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires et donc A, B et C définissent un plan.

2. [/ 2] Déterminer un vecteur normal au plan (ABC).

Solution: Soit $\vec{n}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. $\vec{n}$ est normal au plan (ABC) si et seulement si $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs directeurs de (ABC) : $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ (d'après 1.) ; et, étant dans un repère orthonormé ($\bigstar$), si et seulement si

$$\begin{aligned}
\left\{\begin{array}{rcl} \vec{n}\cdot\overrightarrow{AB} & = & 0 \\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AC} & = & 0 \end{array}\right.
&\underset{\star}{\iff} \left\{\begin{array}{rcl} x_{\vec{n}} \times x_{\overrightarrow{AB}} + y_{\vec{n}} \times y_{\overrightarrow{AB}} + z_{\vec{n}} \times z_{\overrightarrow{AB}} & = & 0 \\ x_{\vec{n}} \times x_{\overrightarrow{AC}} + y_{\vec{n}} \times y_{\overrightarrow{AC}} + z_{\vec{n}} \times z_{\overrightarrow{AC}} & = & 0 \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcl} (-1)\times x + 1 \times y + 1 \times z & = & 0 \\ 3 \times x + (-1) \times y + 1 \times z & = & 0 \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcll} -x + y + z & = & 0 & (L_1) \\ 3x - y + z & = & 0 & (L_2) \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcll} -x + y + z & = & 0 & (L_1) \\ 2x + 2z & = & 0 & (L_2 \leftarrow L_2 + L_1) \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcl} -x + y + z & = & 0 \\ x & = & -z \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcl} -(-z) + y + z & = & 0 \\ x & = & -z \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcl} y & = & -2z \\ x & = & -z \end{array}\right. .
\end{aligned}$$

Pour $z = 1$, on obtient $\vec{n}\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, vecteur normal au plan (ABC).

Exercice 3 [/ 8]

$A\,(1\,;-2\,;-1)$, $B\,(1\,;1\,;-1)$ et $C\,(1\,;-2\,;2)$, $D\,(3\,;-1\,;0)$ sont des points dans l'espace muni d'un repère orthonormé.

1. [/ 2] Montrer que A, B, C et D sont non coplanaires.

Solution: A, B, C et D sont non coplanaires si et seulement si $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont linéairement indépendants, si et seulement si

$$a\overrightarrow{AB}+b\overrightarrow{AC}+c\overrightarrow{AD}=\vec{0} \implies a=b=c=0.$$

On a

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B-x_A \\ y_B-y_A \\ z_B-z_A \end{pmatrix} \implies \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

De même, on trouve $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. On a alors

$$a\overrightarrow{AB}+b\overrightarrow{AC}+c\overrightarrow{AD}=\vec{0} \iff \begin{cases} 0a+0b+2c &= 0 \\ 3a+0b+1c &= 0 \\ 0a+3b+1c &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} c &= 0 \\ a &= 0 \\ b &= 0 \end{cases}.$$

2. [/ 1] Montrer que le triangle ABC est rectangle en A.

Solution: ABC est rectangle en A si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux, si et seulement si $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$. Puisque l'on est dans un repère orthonormé, on a

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} &= x_{\overrightarrow{AB}}\times x_{\overrightarrow{AC}}+y_{\overrightarrow{AB}}\times y_{\overrightarrow{AC}}+z_{\overrightarrow{AB}}\times z_{\overrightarrow{AC}} \\ &= 0\times 0+3\times 0+0\times 3 \\ &= 0. \end{aligned}$$

ABC est donc bien rectangle en A.

3. [/ 3] Montrer que le point $H\,(1\,;-1\,;0)$ est le projeté orthogonal de D sur le plan (ABC).

Solution: H est le projeté orthogonal de D sur le plan (ABC) si et seulement si

1. $H\in(ABC)$;
2. $\overrightarrow{HD}$ est normal à (ABC).

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ forment une base du plan (ABC) puisqu'ils sont orthogonaux, et donc non colinéaires.

1. $H\in(ABC) \iff \exists\,(\lambda\,;\mu)\in\mathbb{R}^2 \,/\, \overrightarrow{AH}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC}$.

   On a $\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\overrightarrow{AH}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC} \iff \begin{cases} 0 &= 0\lambda+0\mu \\ 1 &= 3\lambda+0\mu \\ 1 &= 0\lambda+3\mu \end{cases} \iff \lambda=\mu=\frac{1}{3}.$$

   Donc $H\in(ABC)$.

2. $\overrightarrow{HD}$ est normal à (ABC) si et seulement si $\overrightarrow{HD}$ est orthogonal à deux vecteurs de base du plan : $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$. On a

   On a $\overrightarrow{HD}\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}$. On en déduit que

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{HD} = 0\times 2 + 3\times 0 + 0\times 0 = 0 \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{HD} = 0\times 2 + 0\times 0 + 3\times 0 = 0.$$

   Étant un dans un repère orthonormé, $\overrightarrow{HD}$ est orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ et donc normal à (ABC).

H est donc bien le projeté orthogonal de D sur (ABC).

4. [/ 2] Calculer le volume du tétraèdre $ABCD$. *Rappel :* le volume d'un tétraèdre est donné par la formule $\mathcal{V} = \frac{1}{3}\mathcal{A}h$ où h est la hauteur issue d'un point et $\mathcal{A}$ l'aire de la base associée à cette hauteur.

Solution:
Comme H est le projeté orthogonal de D sur (ABC), $[HD]$ est la hauteur issue de D. Il suffit donc de calculer HD et l'aire du triangle ABC. On a

$$HD = \sqrt{x^2_{\overrightarrow{HD}} + y^2_{\overrightarrow{HD}} + z^2_{\overrightarrow{HD}}} = \sqrt{2^2+0^2+0^2} = 2.$$

D'après la question 2, ABC est rectangle en A, on a donc

$$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{AB\times AC}{2}.$$

On a

$$AB = \sqrt{0^2+3^2+0^2} = 3 \quad \text{et} \quad AC = \sqrt{0^2+0^2+3^2} = 3.$$

Donc

$$\mathcal{V}_{ABCD} = \frac{1}{3}\times\frac{3\times 3}{2}\times 2 = 3.$$

Non noté : Si vous avez fini l'évaluation, vous pouvez colorier Lokhlass.