

Spécialité mathématiques

Logarithme népérien

Sujet 1

19/02/2026

Note : / 15

Durée : 1 h

- La calculatrice est autorisée.
- Le sujet est à rendre avec la copie.

Exercice 1 [/ 3]

Raichu est niveau 25 et à chaque montée de niveau, sa vitesse augmente de 5%. On note v_n cette vitesse au niveau $25 + n$.

1. [/ 1] Justifier que (v_n) est géométrique de raison 1,05 et donner son terme général.
2. [/ 2] Déterminer à quel niveau au minimum Raichu va devoir monter pour doubler sa vitesse par rapport au niveau 25.

Exercice 2 [/ 12]

Partie A

On considère la fonction f définie par : $f(x) = x - \ln(1 + x)$.

1. [/ $\frac{1}{2}$] Justifier que la fonction f est définie sur l'intervalle $] -1 ; +\infty[$.
2. (a) [/ 1] Déterminer la limite en -1 de la fonction f .
- (b) [/ $\frac{1}{2}$] Montrer que, pour tout x appartenant à l'intervalle $] -1 ; +\infty[$, on a :

$$f(x) = \ln \left(\frac{e^x}{1+x} \right).$$

- (c) [/ 1] En déduire la limite en $+\infty$ de la fonction f .
3. [/ 1] On admet que la fonction f est dérivable sur $] -1 ; +\infty[$. Déterminer l'expression de sa fonction dérivée $f'(x)$.
4. (a) [/ 1] En déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $] -1 ; +\infty[$.
- (b) [/ $\frac{1}{2}$] En déduire le signe de la fonction f sur l'intervalle $] -1 ; +\infty[$.

Partie B

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 10$ et, pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = u_n - \ln(1 + u_n).$$

On admet que la suite (u_n) est bien définie.

1. [/ $\frac{1}{2}$] Donner la valeur arrondie au millième de u_1 .
2. [/ 2] Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a $u_n \geq 0$.
3. [/ $1\frac{1}{2}$] Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.
4. [/ 1] Dédurre des questions précédentes que la suite (u_n) converge.
5. [/ $1\frac{1}{2}$] Déterminer la limite de la suite (u_n) .

Non noté : Si vous avez fini l'évaluation, vous pouvez colorier Pikachu.

