

Spécialité mathématiques

Logarithme népérien

Sujet 1

19/02/2026

Note : / 15

Durée : 1 h

- La calculatrice est autorisée.
- Le sujet est à rendre avec la copie.

Exercice 1 [/ 3]

Raichu est niveau 25 et à chaque montée de niveau, sa vitesse augmente de 5%. On note v_n cette vitesse au niveau $25 + n$.

1. [/ 1] Justifier que (v_n) est géométrique de raison 1,05 et donner son terme général.

Solution: Le coefficient multiplicateur associé à une augmentation de $t = 5\%$ est $c = 1 + t = 1 + 0,05$. On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = 1,05v_n$. (v_n) est donc géométrique de raison 1,05. Le terme général de (v_n) est alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n = 1,05^n v_0.$$

2. [/ 2] Déterminer à quel niveau au minimum Raichu va devoir monter pour doubler sa vitesse par rapport au niveau 25.

Solution: On cherche n tel que

$$\begin{aligned} v_n \geq 2v_0 &\iff 1,05^n v_0 \geq 2v_0 \\ &\iff 1,05^n \geq 2 \\ &\iff \ln(1,05^n) \geq \ln(2) \quad (\text{car } \ln \text{ croissante sur } \mathbb{R}_+^*) \\ &\iff n \ln(1,05) \geq \ln(2) \\ &\iff n \geq \frac{\ln(2)}{\ln(1,05)} \quad (\ln(1,05) > 0 \text{ car } 1,05 > 1) \end{aligned}$$

Or $\frac{\ln(2)}{\ln(1,05)} \simeq 14,2$ et $n \in \mathbb{N}$. Raichu va devoir monter de 15 niveaux pour doubler sa vitesse, il devra donc atteindre le niveau 40.

Exercice 2 [/ 12]**Partie A**

On considère la fonction f définie par : $f(x) = x - \ln(1+x)$.

1. [/ 1/2] Justifier que la fonction f est définie sur l'intervalle $] -1 ; +\infty[$.

Solution: f est définie si et seulement si

$$1+x > 0 \iff x > -1 \iff x \in]-1 ; +\infty[.$$

2. (a) [/ 1] Déterminer la limite en -1 de la fonction f .

Solution: On a $\lim_{x \rightarrow -1} x = -1$. Par ailleurs, $\lim_{x \rightarrow -1} 1+x = 0$, donc par composition, on en déduit que $\lim_{x \rightarrow -1} \ln(1+x) = -\infty$. Ainsi, par somme, on a $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -\infty$.

- (b) [/ 1/2] Montrer que, pour tout x appartenant à l'intervalle $] -1 ; +\infty[$, on a :

$$f(x) = \ln \left(\frac{e^x}{1+x} \right).$$

Solution: Soit $x \in]-1 ; +\infty[$, on a

$$\ln \left(\frac{e^x}{1+x} \right) = \ln(e^x) - \ln(1+x) = x - \ln(1+x).$$

- (c) [/ 1] En déduire la limite en $+\infty$ de la fonction f .

Solution: D'après la question précédente, pour tout $x \in]-1 ; +\infty[$, on a $f(x) = \ln \left(\frac{e^x}{1+x} \right)$. Or, par croissance comparée, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{1+x} = +\infty$, donc, par continuité de $\ln$, on en déduit que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left(\frac{e^x}{1+x} \right) = +\infty.$$

3. [/ 1] On admet que la fonction f est dérivable sur $] -1 ; +\infty[$. Déterminer l'expression de sa fonction dérivée $f'(x)$.

Solution: $\ln(1+x)$ est de la forme $u \circ v$ avec $u(x) = \ln(x)$ et $v(x) = 1+x$. Comme $(u \circ v)' = v' \times u'(v)$ avec $u'(x) = \frac{1}{x}$ et $v'(x) = 1$, on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = 1 - 1 \times \frac{1}{1+x} = \frac{1+x}{1+x} - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x}.$$

4. (a) [/ 1] En déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $] -1 ; +\infty[$.

Solution: Comme $1+x > 0$ sur $] -1 ; +\infty[$, f' est du signe de son numérateur x sur $] -1 ; +\infty[$:

x	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$+$
f		$+\infty$	$+\infty$

- (b) [/ $\frac{1}{2}$] En déduire le signe de la fonction f sur l'intervalle $]-1; +\infty[$.

Solution: f admet pour minimum 0 sur $]-1; +\infty[$, elle est donc positive.

Partie B

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 10$ et, pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = u_n - \ln(1 + u_n).$$

On admet que la suite (u_n) est bien définie.

1. [/ $\frac{1}{2}$] Donner la valeur arrondie au millièm de u_1 .

Solution: On a $u_1 = u_0 - \ln(1 + u_0) = 10 - \ln(11) = 7,602$.

2. [/ 2] Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a $u_n \geq 0$.

Solution: On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_n : u_n \geq 0$.

Initialisation : On a $u_0 = 10 \geq 0$ donc P_0 est vraie.

Hérédité : soit $k \in \mathbb{N}$.

Hypothèse de récurrence : On suppose P_k vraie : $u_k \geq 0$.

Objectif : Montrons que P_{k+1} l'est aussi : $u_{k+1} \geq 0$.

Par HR, on a

$$\begin{aligned} u_k &\geq 0 \\ \implies f(u_k) &\geq f(0) \quad (\text{inég. conservée car } f \text{ croissante sur } [0; +\infty[) \\ \implies u_{k+1} &\geq 0. \end{aligned}$$

Donc $P_k \implies P_{k+1}$, la propriété est héréditaire.

Conclusion : par principe de récurrence, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$.

3. [/ $1\frac{1}{2}$] Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.

Solution: Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\begin{aligned} u_n &\geq 0 &\iff u_n + 1 &\geq 1 \\ &&\iff \ln(u_n + 1) &\geq 0 \\ &&\iff -\ln(u_n + 1) &\leq 0 \\ &\iff u_n - \ln(u_n + 1) &\leq u_n \\ &\iff u_{n+1} &\leq u_n. \end{aligned}$$

(u_n) est donc décroissante.

4. [/ 1] Déduire des questions précédentes que la suite (u_n) converge.

Solution: (u_n) est décroissante et minorée par 0, elle converge donc vers une limite $\ell \geqslant 0$.

5. [/ 1½] Déterminer la limite de la suite (u_n) .

Solution: f est dérivable et donc continue sur $] -1 ; +\infty[$. Par passage à la limite dans $u_{n+1} = f(u_n)$, on en déduit que $\ell = f(\ell)$. On a

$$\begin{aligned}\ell = f(\ell) &\iff \ell = \ell - \ln(1 + \ell) \\ &\iff 0 = \ln(1 + \ell) \\ &\iff 1 + \ell = 1 \\ &\iff \ell = 0.\end{aligned}$$

(u_n) converge donc vers 0.

Non noté : Si vous avez fini l'évaluation, vous pouvez colorier Pikachu.

