

Spécialité mathématiques

Géométrie analytique

Sujet 1

05/02/2026

Note : / 14

Durée : 1 h

- La calculatrice est autorisée.
- Le sujet est à rendre avec la copie.

Exercice 1 [/ 14]

Soient $A(0; 4; 1)$, $B(-2; 0; 1)$, $C(1; 3; 0)$ et $D(1; 0; 1)$ quatre points d'un repère orthonormé de l'espace.

1. (a) [/ 1½] Démontrer que A , B et C définissent un plan de l'espace.

Solution: A , B et C définissent un plan de l'espace si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires, si et seulement si il n'existe pas de $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AB} = \lambda \overrightarrow{AC}$.

On a $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$. De même, on a $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$. On a alors

$$\overrightarrow{AB} = \lambda \overrightarrow{AC} \iff \begin{cases} -2 = \lambda \\ -4 = -\lambda \\ 0 = -\lambda \end{cases}.$$

Le système est incompatible. On en déduit que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires et donc que A , B et C définissent un plan de l'espace.

- (b) [/ ½] Donner une représentation paramétrique de la droite (AB) .

Solution: Comme (AB) est dirigée par $\overrightarrow{AB}$ et passe par le point A , une représentation paramétrique de (AB) est

$$(AB) : \begin{cases} x = x_A + \lambda x_{\overrightarrow{AB}} \\ y = y_A + \lambda y_{\overrightarrow{AB}} \\ z = z_A + \lambda z_{\overrightarrow{AB}} \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R} \implies (AB) : \begin{cases} x = -2\lambda \\ y = 4 - 4\lambda \\ z = 1 \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

- (c) [/ 3] Déterminer les coordonnées $(x_H; y_H; z_H)$ du projeté orthogonal H de C sur (AB) .

Solution: H est le projeté orthogonal de C sur (AB) si et seulement si :

1. $H \in (AB)$;
2. (CH) et (AB) sont orthogonales.

1. $H \in (AB)$, donc il existe $\lambda_H \in \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{cases} x_H &= -2\lambda_H \\ y_H &= 4 - 4\lambda_H \\ z_H &= 1 \end{cases}.$$

2. (CH) et (AB) sont orthogonales si et seulement si $\overrightarrow{CH}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont orthogonaux si et seulement si $\overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$.

On a $\overrightarrow{CH} \begin{pmatrix} x_H - 1 \\ y_H - 3 \\ z_H \end{pmatrix}$. Puisque le repère est orthonormé, on en déduit que

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CH} = 0 &\iff x_{\overrightarrow{AB}} \times x_{\overrightarrow{CH}} + y_{\overrightarrow{AB}} \times y_{\overrightarrow{CH}} + z_{\overrightarrow{AB}} \times z_{\overrightarrow{CH}} = 0 \\ &\iff -2 \times (x_H - 1) - 4 \times (y_H - 3) + 0 \times z_H = 0 \\ &\iff -2x_H - 4y_H + 14 = 0 \\ &\iff -x_H - 2y_H + 7 = 0. \end{aligned}$$

On en déduit donc que

$$\begin{aligned} -(-2\lambda_H) - 2(4 - 4\lambda_H) + 7 &= 0 \iff 2\lambda_H - 8 + 8\lambda_H + 7 = 0 \\ &\iff 10\lambda_H - 1 = 0 \\ &\iff \lambda_H = \frac{1}{10}. \end{aligned}$$

On en déduit que $H \left(-\frac{1}{5}; \frac{18}{5}; 1 \right)$.

- (d) [/ 1] En déduire l'aire du triangle ABC .

Solution: Comme H est le projeté orthogonal de C sur (AB) , on en déduit que $[CH]$ est la hauteur issue de C et donc que $\mathcal{A}_{ABC} = \frac{AB \times CH}{2}$. Calculons AB et CH . On a

$$AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(-2)^2 + (-4)^2 + 0^2} = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}.$$

De même, on trouve $CH = \frac{\sqrt{70}}{5}$. On a donc

$$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{2\sqrt{5} \times \frac{\sqrt{70}}{5}}{2} = \frac{\sqrt{5} \times \sqrt{5} \times \sqrt{14}}{5} = \sqrt{14}.$$

2. (a) [/ 2] Déterminer un vecteur normal au plan (ABC) .

Solution: Comme $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ forment une base du plan (ABC) , $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ en est un vecteur normal si et seulement si il est orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, si et seulement si

$$\begin{aligned}
& \begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \end{cases} \\
& \iff \begin{cases} -2a - 4b + 0c = 0 \\ a - b - c = 0 \end{cases} \text{ (car le repère est orthonormé)} \\
& \iff \begin{cases} a = -2b \\ c = a - b \end{cases} \\
& \iff \begin{cases} a = -2b \\ c = -3b \end{cases}.
\end{aligned}$$

En prenant $b = -1$, on obtient $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

(b) [/ 1] En déduire une équation cartésienne du plan (ABC) .

Solution: Comme $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ est normal à (ABC) , il existe $d \in \mathbb{R}$ tel que ait (ABC) pour équation cartésienne :

$$x_{\vec{d}}x + y_{\vec{d}}y + z_{\vec{d}}z + d = 0 \implies 2x - y + 3z + d = 0$$

Comme $A \in (ABC)$, on a

$$2x_A - y_A + 3z_A + d = 0 \iff 2 \times 0 - 4 + 3 \times 1 + d = 0 \iff d = 1.$$

(ABC) a donc pour équation cartésienne $2x - y + 3z + 1 = 0$.

3. (a) [/ 1] Démontrer que A, B, C et D sont non coplanaires.

Solution: On a $2x_D - y_D + 3z_D + 1 = 2 + 3 + 1 = 6 \neq 0$ donc $D \notin (ABC)$, autrement dit A, B, C et D sont non coplanaires.

(b) [/ 3] Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal E de D sur (ABC) .

Solution: E est le projeté orthogonal de D sur (ABC) si et seulement si E est le point d'intersection entre le plan (ABC) et la droite $\mathcal{D}$ orthogonale à (ABC) passant par D .

Comme $\mathcal{D}$ orthogonale à (ABC) , elle est dirigée par le vecteur normal à (ABC) : $\vec{n}$. Une représentation paramétrique de $\mathcal{D}$ est alors

$$\mathcal{D} : \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = -\lambda \\ z = 1 + 3\lambda \end{cases}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Comme $E \in \mathcal{D}$, il existe $\lambda_E \in \mathbb{R}$ tel que

$$\mathcal{D} : \begin{cases} x_E = 1 + 2\lambda_E \\ y_E = -\lambda_E \\ z_E = 1 + 3\lambda_E \end{cases}.$$

Et puisque $E \in (ABC)$, on a

$$\begin{aligned} 2x_E - y_E + 3z_E + 1 = 0 &\iff 2(1 + 2\lambda_E) - (-\lambda_E) + 3(1 + 3\lambda_E) + 1 = 0 \\ &\iff 14\lambda_E + 6 = 0 \\ &\iff \lambda_E = -\frac{3}{7}. \end{aligned}$$

On en déduit que $E\left(\frac{1}{7}; \frac{3}{7}; -\frac{2}{7}\right)$.

(c) [/ 1] En déduire le volume du tétraèdre $ABCD$. *Indication* : on a

$$\text{volume tétraèdre} = \frac{\text{aire de la base} \times \text{hauteur}}{3}.$$

Solution: Comme E est le projeté orthogonal de D sur (ABC) , $[DE]$ est la hauteur issue de D du tétraèdre et on a alors $\mathcal{V}_{ABCD} = \frac{\mathcal{A}_{ABC} \times DE}{3}$. Calculons donc DE . On a

$$DE = \|\overrightarrow{DE}\| = \frac{3}{7}\sqrt{14}.$$

On a alors $\mathcal{V}_{ABCD} = \frac{1}{3} \times \sqrt{14} \times \frac{3}{7}\sqrt{14} = 2$.

Non noté : Si vous avez fini l'évaluation, vous pouvez colorier Chochodile.

