

Chapitre 14

Sommes de variables aléatoires

14.1 Sommes de variables aléatoires

Définition 14.1. *[Rappel] Soit Ω l'univers associé à une expérience aléatoire. On suppose qu'une loi de probabilité est définie sur Ω . On appelle **variable aléatoire** toute fonction définie sur Ω et à valeurs dans $\mathbb{R}$: pour toute issue $\omega \in \Omega$,*

$$X : \omega \mapsto X(\omega) \in \mathbb{R}.$$

Exemple : On lance à deux reprises une pièce de monnaie équilibrée. L'univers associé à cette expérience est l'ensemble :

$$\Omega = \{(F; F) ; (F; P) ; (P; F) ; (P; P)\}.$$

On définit la variable aléatoire X associant à chaque tirage le nombre de fois que « pile » a été obtenu. On a alors

Issue ω	$(F; F)$	$(F; P)$	$(P; F)$	$(P; P)$
$X(\omega)$	0	1	1	2

Définition 14.2. *Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un univers fini Ω .*

- *La **somme de variables aléatoires** $Z = X + Y$ est définie par $Z(\omega) = X(\omega) + Y(\omega)$ pour tout $\omega \in \Omega$.*
- *Pour toute valeur z prise par $Z = X + Y$, $\mathbb{P}(X + Y = z)$ est la somme de toutes les probabilités $\mathbb{P}(\{X = x\} \cap \{Y = y\})$ où $x + y = z$:*

$$\mathbb{P}(X + Y = z) = \sum_{\substack{x \in X(\Omega), \ y \in Y(\Omega), \\ x + y = z}} \mathbb{P}(\{X = x\} \cap \{Y = y\}).$$

Exemple : On lance deux dés cubiques équilibrés numérotés de 1 à 6. On définit les variables aléatoires X_1 et X_2 associant à chaque lancer la valeur des dés 1 et 2. On définit alors $Z = X_1 + X_2$, la variable aléatoire qui donne le résultat de la somme des deux dés.

$Z = X_1 + X_2$						
$X_1(\omega) \backslash X_2(\omega)$	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

La probabilité d'avoir une somme valant 4 est alors

$$\mathbb{P}(Z = 4) = \mathbb{P}(\{X_1 = 1\} \cap \{X_2 = 3\}) + \mathbb{P}(\{X_1 = 2\} \cap \{X_2 = 2\}) + \mathbb{P}(\{X_1 = 3\} \cap \{X_2 = 1\}) = \frac{3}{36}.$$

La loi de Z est alors

z	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\mathbb{P}(Z = z)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Remarque : dans l'exemple ci-dessus, ω désigne un couple $(\omega_1; \omega_2)$ où ω_1 et ω_2 sont les issues des dés 1 et 2.

Définition 14.3. Soit X une variable aléatoire définie sur un univers fini Ω et $a \in \mathbb{R}^*$.

- La variable aléatoire $Y = aX$ est définie par $Y(\omega) = aX(\omega)$ pour tout $\omega \in \Omega$.
- Pour toute valeur y prise par Y , il existe x tel que $a \times x = y$ et on a alors

$$\mathbb{P}(Y = y) = \mathbb{P}(aX = ax) = \mathbb{P}(X = x).$$

Exemple : On lance un dé cubique équilibré numéroté de 1 à 6. On définit la variable aléatoire X associant au lancer la valeur du dé. On définit alors $Y = 2X$, la variable aléatoire qui donne le résultat du dé multiplié par 2. On a alors

x	1	2	3	4	5	6
$\mathbb{P}(X = x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

y	2	4	6	8	10	12
$\mathbb{P}(Y = y)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Exercices : 14.1 à 14.4; 14.17 et 14.18.

14.2 Propriétés d'une somme de variables aléatoires

14.2.1 Espérance d'une somme de variables aléatoires

Définition 14.4. [Rappel] On considère une expérience aléatoire d'univers fini $\Omega = \{\omega_1; \dots; \omega_m\}$ sur lequel est défini une loi de probabilité $\mathbb{P}$. Soit X une variable aléatoire définie sur Ω , ses valeurs sont notées $x_1, x_2, \dots, x_n$ avec $n \in \mathbb{N}$. **L'espérance** de X est le nombre noté $\mathbb{E}(X)$ défini par :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^n x_i \mathbb{P}(X = x_i).$$

Lemme 14.1. [Admis] Sous les hypothèses de la définition précédente, on a

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{j=1}^m X(\omega_j) \mathbb{P}(\{\omega_j\}).$$

Proposition 14.1. [Linéarité de l'espérance] Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un univers fini Ω et a un réel. Alors

1. $\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$;
2. $\mathbb{E}(aX) = a\mathbb{E}(X)$.

Démonstration. Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un univers fini $\Omega = \{\omega_1; \dots; \omega_m\}$ et a un réel.

1. Soit Z la variable aléatoire définie par $Z = X + Y$. On a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X + Y) &= \mathbb{E}(Z) = \sum_{j=1}^m Z(\omega_j) \mathbb{P}(\{\omega_j\}) \\ &= \sum_{j=1}^m (X + Y)(\omega_j) \mathbb{P}(\{\omega_j\}) \\ &= \sum_{j=1}^m (X(\omega_j) + Y(\omega_j)) \mathbb{P}(\{\omega_j\}) \\ &= \sum_{j=1}^m X(\omega_j) \mathbb{P}(\{\omega_j\}) + \sum_{j=1}^m Y(\omega_j) \mathbb{P}(\{\omega_j\}) \\ &= \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y). \end{aligned}$$

2. Si $a = 0$, la propriété est évidente puisque $\mathbb{E}(0X) = 0 = 0\mathbb{E}(X)$. Supposons $a \neq 0$. On a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(aX) &= \sum_{i=1}^n (ax_i) \mathbb{P}(aX = ax_i) \\ &= a \sum_{i=1}^n x_i \mathbb{P}(X = x_i) \\ &= a\mathbb{E}(X). \end{aligned}$$

□



Exemples :

1. Considérons le lancer de deux dés équilibrés : un dé 10 et un dé 20. On note X_1 et X_2 les variables aléatoires associées aux résultats respectifs des deux dés et $S = X_1 + X_2$ la variable aléatoire associée à la somme des résultats. On a alors

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_1) &= \sum_{i=1}^{10} i\mathbb{P}(X_1 = i) \\ &= \sum_{i=1}^{10} i \times \frac{1}{10} \\ &= \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} i \\ &= \frac{1}{10} \frac{(10 - 1 + 1)(1 + 10)}{2} \\ &= \frac{1}{10} \times \frac{10 \times 11}{2} \\ &= 5,5.\end{aligned}$$

De même, on a $\mathbb{E}(X_2) = 10,5$. On a alors

$$\mathbb{E}(S) = \mathbb{E}(X_1 + X_2) = \mathbb{E}(X_1) + \mathbb{E}(X_2) = 5,5 + 10,5 = 16.$$

2. Considérons le lancer d'un dé 6 équilibré comme vu dans les exemples précédents. On note X la variable aléatoire associée au résultat du dé et $Y = 2X$ la variable aléatoire associée à la multiplication par deux des résultats. On a $\mathbb{E}(X) = 3,5$ et donc $\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(2X) = 2\mathbb{E}(X) = 7$.

Remarque : Pour X une variable aléatoire, autant on a $X + X \neq 2X$, autant on a $\mathbb{E}(X + X) = \mathbb{E}(2X)$. En effet, par linéarité de l'espérance, on a :

$$\mathbb{E}(X + X) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(X) = 2\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(2X).$$

Exercices : 14.5 et 14.6 ; 14.19.

14.2.2 Variables aléatoires indépendantes

Définition 14.5. [Indépendance de variables aléatoires] Soient $X_1, \dots, X_n$, n variables aléatoires à valeurs respectives dans $E_1, \dots, E_n$. On dit que $X_1, \dots, X_n$ sont **indépendantes** si et seulement si

$$\forall (x_1; \dots; x_n) \in E_1 \times \dots \times E_n, \quad \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n \{X_i = x_i\}\right) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i = x_i).$$

Exemple : Soient X et Y deux variables aléatoires telles que $\mathbb{P}(\{X = x_i\} \cap \{Y = y_i\})$ soit donnée par le tableau ci-dessous à gauche. On en déduit alors les lois de X et Y dans les tableaux ci-dessous à droite.

$\mathbb{P}(\{X = x_i\} \cap \{Y = y_i\})$		
$y_i \backslash x_i$	2	3
0	0,28	0,42
1	0,12	0,18

On a bien

x_i	0	1
$\mathbb{P}(X = x_i)$	0,7	0,3

y_i	2	3
$\mathbb{P}(Y = y_i)$	0,4	0,6

$$\mathbb{P}(X = 0) \times \mathbb{P}(Y = 2) = 0,7 \times 0,4 = 0,28 = \mathbb{P}(\{X = 0\} \cap \{Y = 2\}).$$

De même, on vérifie que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X = 0) \times \mathbb{P}(Y = 3) &= \mathbb{P}(\{X = 0\} \cap \{Y = 3\}), \\ \mathbb{P}(X = 1) \times \mathbb{P}(Y = 2) &= \mathbb{P}(\{X = 1\} \cap \{Y = 2\}), \\ \mathbb{P}(X = 1) \times \mathbb{P}(Y = 1) &= \mathbb{P}(\{X = 0\} \cap \{Y = 3\}).\end{aligned}$$

X et Y sont donc indépendantes.

Contre-exemple : Soient X et Y deux variables aléatoires telles que $\mathbb{P}(\{X = x_i\} \cap \{Y = y_i\})$ soit donnée par le tableau ci-dessous à gauche. On en déduit alors les lois de X et Y dans les tableaux ci-dessous à droite.

$\mathbb{P}(\{X = x_i\} \cap \{Y = y_i\})$		
$y_i \backslash x_i$	2	3
0	0,1	0,1
1	0,24	0,56

On a

x_i	0	1
$\mathbb{P}(X = x_i)$	0,2	0,8

y_i	2	3
$\mathbb{P}(Y = y_i)$	0,34	0,66

$$\mathbb{P}(X = 0) \times \mathbb{P}(Y = 2) = 0,2 \times 0,34 = 0,068 \neq 0,1 = \mathbb{P}(\{X = 0\} \cap \{Y = 2\}).$$

X et Y ne sont donc pas indépendantes.

Exercices : 14.7 et 14.8; 14.20.

14.2.3 Variance d'une somme de variables aléatoires indépendantes

Proposition 14.2. Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un univers fini Ω et a un réel. Alors

1. $\mathbb{V}(aX) = a^2\mathbb{V}(X)$.
2. Si X et Y sont indépendantes, alors $\mathbb{V}(X + Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y)$.



Démonstration.

1. Soit X une variable aléatoire définie sur un univers fini Ω et a un réel. Si $a = 0$, la propriété est évidente puisque $\mathbb{V}(0X) = 0 = 0\mathbb{V}(X)$. Supposons $a \neq 0$. On a

$$\begin{aligned}
 \mathbb{V}(aX) &= \mathbb{E}(aX - \mathbb{E}(aX))^2 \\
 &= \sum_{i=1}^n (ax_i - \mathbb{E}(aX))^2 \mathbb{P}(aX = ax_i) \\
 &= \sum_{i=1}^n (ax_i - a\mathbb{E}(X))^2 \mathbb{P}(X = x_i) \\
 &= \sum_{i=1}^n a^2 (x_i - \mathbb{E}(X))^2 \mathbb{P}(X = x_i) \\
 &= a^2 \sum_{i=1}^n (x_i - \mathbb{E}(X))^2 \mathbb{P}(X = x_i) \\
 &= a^2 \mathbb{E}(X - \mathbb{E}(X))^2 \\
 &= a^2 \mathbb{V}(X).
 \end{aligned}$$

2. Exercice.

□

Exemples : Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes de lois de probabilité ci-dessous.

x	-6	9
$\mathbb{P}(X_1 = x)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

x	-2	6
$\mathbb{P}(X_1 = x)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

1. On a $\mathbb{E}(X_1) = -1$, donc

$$\mathbb{V}(X_1) = \frac{2}{3}(-6 - (-1))^2 + \frac{1}{3}(9 - (-1))^2 = 50.$$

On a alors $\mathbb{V}(2X_1) = 2^2 \mathbb{V}(X_1) = 200$.

2. De la même façon que pour X_2 , on a $\mathbb{E}(X_2) = 2$ et $\mathbb{V}(X_2) = 16$. Comme X_1 et X_2 sont indépendantes, on a

$$\mathbb{V}(X_1 + X_2) = \mathbb{V}(X_1) + \mathbb{V}(X_2) = 50 + 16 = 66.$$

Exercices : 14.9 à 14.11 ; 14.21.

14.3 Applications

14.3.1 Variables aléatoires identiquement distribuées

Définition 14.6. Deux variables aléatoires sont dites **identiquement distribuées** lorsqu'elles ont la même loi de probabilité.

Remarque : Deux variables aléatoires identiquement distribuées peuvent être indépendantes comme ne pas l'être.

Exercice : 14.12.

14.3.2 Loi binomiale

Proposition 14.3. [Admise] Soit X suivant la binomiale $\mathcal{B}(n; p)$. Alors il existe n variable aléatoire X_i indépendantes, identiquement distribuées suivant la loi de Bernoulli de paramètre p telles que $X = X_1 + \cdots + X_n$.

Proposition 14.4. Si X suit la binomiale $\mathcal{B}(n; p)$, alors :

1. $\mathbb{E}(X) = np$;
2. $\mathbb{V}(X) = np(1 - p)$.

Démonstration. Soit X suivant la binomiale $\mathcal{B}(n; p)$. Alors il existe n variable aléatoire X_i indépendantes, identiquement distribuées suivant la loi de Bernoulli de paramètre p telles que $X = X_1 + \cdots + X_n$. On a donc, pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $\mathbb{E}(X_i) = p$ et $\mathbb{V}(X_i) = p(1 - p)$.

1. Par linéarité de l'espérance, on a

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(X_1 + \cdots + X_n) = \mathbb{E}(X_1) + \cdots + \mathbb{E}(X_n) = np.$$

2. Comme les X_i sont indépendantes, on a

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{V}(X_1 + \cdots + X_n) = \mathbb{V}(X_1) + \cdots + \mathbb{V}(X_n) = np(1 - p).$$

□

14.3.3 Échantillonnage

Définition 14.7.

- Un **échantillon** est une liste $(X_1; X_2; \cdots; X_n)$ de n variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées.
- Soit $(X_1; X_2; \cdots; X_n)$ un échantillon de taille n . On note S_n la **somme** et M_n la **moyenne** de cet échantillon :

$$S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n \quad \text{et} \quad M_n = \frac{S_n}{n}.$$



Proposition 14.5. Soit $(X_1; X_2; \dots; X_n)$ un échantillon de taille n .

1. $\mathbb{E}(S_n) = n\mathbb{E}(X_1)$;
2. $\mathbb{V}(S_n) = n\mathbb{V}(X_1)$.

Démonstration. Soit $(X_1; X_2; \dots; X_n)$ un échantillon de taille n .

1. Par linéarité de l'espérance, on a

$$\mathbb{E}(S_n) = \mathbb{E}(X_1) + \dots + \mathbb{E}(X_n).$$

Comme $(X_1; X_2; \dots; X_n)$ est un échantillon, les X_k sont identiquement distribuées et ont donc toutes la même espérance : $\mathbb{E}(X_1) = \dots = \mathbb{E}(X_n)$. On en déduit que $\mathbb{E}(S_n) = n\mathbb{E}(X_1)$.

2. Comme les X_k sont identiquement distribuées, elles ont donc toutes la même variance : $\mathbb{V}(X_1) = \dots = \mathbb{V}(X_n)$. Par ailleurs, les X_k étant indépendantes, on a

$$\mathbb{V}(S_n) = \mathbb{V}(X_1) + \dots + \mathbb{V}(X_n) = n\mathbb{V}(X_1).$$

□

Remarque : Cette propriété est une généralisation des résultats sur la loi binomiale pour laquelle les variables aléatoires sont un échantillon de la loi de Bernoulli.

Proposition 14.6. Soit $(X_1; X_2; \dots; X_n)$ un échantillon de taille n .

1. $\mathbb{E}(M_n) = \mathbb{E}(X_1)$;
2. $\mathbb{V}(M_n) = \frac{\mathbb{V}(X_1)}{n}$.

Démonstration. Soit $(X_1; X_2; \dots; X_n)$ un échantillon de taille n .

1. Par linéarité de l'espérance, on a $\mathbb{E}(M_n) = \mathbb{E}\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{1}{n}\mathbb{E}(S_n) = \frac{1}{n} \times n\mathbb{E}(X_1) = \mathbb{E}(X_1)$.
2. Par propriété de la variance, on a $\mathbb{V}(M_n) = \mathbb{V}\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2}\mathbb{V}(S_n) = \frac{1}{n^2} \times n\mathbb{V}(X_1) = \frac{\mathbb{V}(X_1)}{n}$.

□

Exemple : On lance cinq dés équilibrés à six faces. On note X la variable aléatoire correspondant à la somme des résultats. Calculons $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.

Pour tout $k \in \{1; \dots; 5\}$, on note X_k la variable aléatoire correspondant au résultat du dé k . On a alors $X = X_1 + \dots + X_5$. Les dés étant identiques, les X_k sont identiquement distribuées. Par ailleurs, les lancers de dés étant indépendants, les X_k le sont aussi.

- On a $\mathbb{E}(X_1) = 3,5$. D'après la propriété précédente, on a $\mathbb{E}(X) = 5\mathbb{E}(X_1) = 17,5$.
- On a $\mathbb{V}(X_1) = \frac{35}{12}$. D'après la propriété précédente, on a $\mathbb{V}(X) = 5\mathbb{V}(X_1) = \frac{175}{12}$.

Exercices : 14.13 à 14.16; 14.22 et 14.23.

14.4 Capacités attendues

- Représenter une variable comme somme de variables aléatoires plus simples.
- Calculer l'espérance d'une variable aléatoire, notamment en utilisant la propriété de linéarité.
- Calculer la variance d'une variable aléatoire, notamment en l'exprimant comme somme de variables aléatoires indépendantes.

14.5 Exercices

14.5.1 Progresser

Sommes de variables aléatoires

Exercice 14.1. Soient X et Y deux variables aléatoires. Le tableau suivant donne les probabilités des événements $\{X = x\} \cap \{Y = y\}$ pour toutes les valeurs x prises par X et toutes les valeurs y prises par Y .

$X \backslash Y$	0	1	2
0	0,3	0,15	0,15
1	0,2	0,15	0,05

1. Représenter sous forme de tableaux les lois de probabilités de X et Y .
2. Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{E}(Y)$.
3. Déterminer mentalement $\mathbb{P}(X + Y = 0)$ et $\mathbb{P}(X + Y = 2)$.
4. Déterminer la loi de probabilité de $X + Y$.

Exercice 14.2. On lance trois dés cubiques équilibrés et on note X la variable aléatoires correspondant à la somme obtenue. On note X_1 la variable aléatoire correspondant au résultat du premier dé. A-t-on $X = 3X_1$?

Exercice 14.3. On lance un dé cubique équilibré et on joue au jeu suivant : le nombre de points récoltés est le triple du résultat de ce dé. On joue deux fois à ce jeu et on note X_1 et X_2 les variables aléatoires correspondant aux points respectivement obtenus au premier et au deuxième lancer.

1. Calculer $X_1((3; 4))$, $X_2((1; 6))$ et $X_1((4; 2))$.
2. Soit X la variable aléatoire définie par $X = X_1 + X_2$.
 - (a) Que représente la variable aléatoire X dans le contexte de l'exercice ?
 - (b) Calculer $X((3; 5))$.



Exercice 14.4. Lors de leur entrée au parc Safari, les visiteurs paient différents droits d'accès en fonction de leur âge :

- 40 pokédollars pour les moins de 18 ans ;
- 50 pokédollars pour les plus de 60 ans ;
- 100 pokédollars pour les autres.

De plus, ils peuvent choisir parmi deux options supplémentaires :

- 50 pokédollars pour un nombre illimité de pokéballs ;
- 20 pokédollars pour un nombre d'appâts illimités ;
- 60 pokédollars pour les deux suppléments à la fois.

On prend au hasard un visiteur du parc et on note X la variable aléatoire correspondant au montant total payé par celui-ci pour visiter le parc.

1. Proposer une décomposition de X en somme de variables aléatoires dont on donnera une interprétation.
2. Expliciter l'ensemble des valeurs prises par ces variables aléatoires.

Espérance d'une somme de variables aléatoires

Exercice 14.5. Calculer $\mathbb{E}(2X)$, $\mathbb{E}(X + Y)$ et $\mathbb{E}(5X - 2Y)$ où X et Y sont les deux variables aléatoires de l'exercice 14.1.

Exercice 14.6. Soit a un nombre réel. On donne ci-dessous les lois de probabilité de trois variables aléatoires X , Y et Z définies sur un univers Ω .

x_i	-5	2	4	12
$\mathbb{P}(X = x_i)$	0,4	0,05	0,25	0,3

y_i	0	3	7
$\mathbb{P}(Y = y_i)$	0,3	0,2	0,5

z_i	12	a
$\mathbb{P}(Z = z_i)$	0,75	0,25

Déterminer l'ensemble des valeurs prises par Z sachant que $\mathbb{E}(X + 3Y) = \mathbb{E}(Z)$.

Variables aléatoires indépendantes

Exercice 14.7. Soient X_1 , X_2 , Y_1 et Y_2 quatre variables aléatoires telles que :

$\mathbb{P}(\{X_1 = x_i\} \cap \{Y_1 = y_i\})$		
$y_i \backslash x_i$	2	3
0	0,24	0,06
1	0,07	0,63

$\mathbb{P}(\{X_2 = x_i\} \cap \{Y_2 = y_i\})$		
$y_i \backslash x_i$	2	3
0	0,04	0,36
1	0,06	0,54

1. (a) Déterminer les lois de X_1 et Y_1 .
(b) X_1 et Y_1 sont-elles indépendantes ? Justifier.
2. Mêmes questions avec X_2 et Y_2 .

Exercice 14.8. [Espérance d'un produit sous hypothèse d'indépendance] Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un univers Ω . On souhaite montrer que $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.

Soit Z la variable définie par $Z = XY$. On notera dans la suite $\text{Val}_X = \{x_1; \dots; x_r\}$ l'ensemble des valeurs prises par X , $\text{Val}_Y = \{y_1; \dots; y_r\}$ l'ensemble des valeurs prises par Y et Val_Z l'ensemble des valeurs prises par Z .

Pour $z \in \text{Val}_Z$, il peut exister plusieurs couples $(x; y)$ tels que $z = xy$. On va donc regrouper ces différents couples dans un ensemble que l'on notera A_z : pour tout $z \in \text{Val}_Z$,

$$A_z = \{(x; y) \in \text{Val}_X \times \text{Val}_Y / xy = z\}.$$

1. Justifier que les ensembles A_z sont deux à deux disjoints.
2. À quoi la réunion des ensembles A_z correspond-elle ?
3. Démontrer que, pour tout $z \in \text{Val}_Z$, $\mathbb{P}(Z = a) = \sum_{(x; y) \in A_z} \mathbb{P}((X = x) \cap (Y = y))$.
4. Montrer que $\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in \text{Val}_X} \sum_{(x; y) \in A_z} xy \mathbb{P}(X = x) \mathbb{P}(Y = y)$.
5. En déduire que $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.

Variance d'une somme de variables aléatoires

Exercice 14.9. Soient X et Y les deux variables aléatoires de l'exercice 14.1. On suppose par ailleurs que X et Y sont indépendantes.

1. Calculer $\mathbb{V}(2X)$, $\mathbb{V}(X + Y)$ et $\mathbb{V}(5X - 2Y)$.
2. En déduire $\sigma(2X)$, $\sigma(X + Y)$ et $\sigma(5X - 2Y)$. On arrondira à 10^{-3} près.

Exercice 14.10. Soient a et b deux réels et X et Y deux variables aléatoires dont on donne les lois de probabilités.

x_i	-5	2	a	8	10
$\mathbb{P}(X = x_i)$	0,06	0,23	0,21	0,37	0,13

y_i	b	-4	-2	5	20
$\mathbb{P}(Y = x_i)$	0,01	0,35	0,12	0,22	0,3

On pose T et Z les variables aléatoires définies par $T = Y - X$ et $Z = 3X + 2Y$.

1. (a) Exprimer $\mathbb{E}(T)$ et $\mathbb{E}(Z)$ en fonction de a et b .
 (b) On suppose que $\mathbb{E}(T) = 0,1$ et $\mathbb{E}(Z) = 26,5$, déterminer les valeurs de a et b .
2. (a) On donne $\mathbb{V}(10Z) = 54\,853,32$. Les variables aléatoires X et Y peuvent-elles être indépendantes ?
 (b) On donne $\mathbb{V}(T) = 89,058$. Les variables aléatoires X et Y peuvent-elles être indépendantes ?



Exercice 14.11. [Additivité de la variance] Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un univers Ω . Soit Z la variable aléatoire définie par $Z = X + Y$.

1. Appliquer la formule de Huygens-König à Z .
2. En déduire que $\mathbb{V}(X + Y) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 + \mathbb{E}(Y^2) - \mathbb{E}(Y)^2 + 2\mathbb{E}(XY) - 2\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.
3. En admettant le résultat de l'exercice 14.6 : si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes, alors $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$; montrer que si X et Y sont indépendantes, alors

$$\mathbb{V}(X + Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y).$$

Variables aléatoires identiquement distribuées

Exercice 14.12. On considère deux rencontres successives de pokémons. Sur chacune des deux rencontres, on a deux possibilités : soit on rencontre un Chochodile, soit on n'en rencontre pas.

- À la première rencontre, il y a 10% de chances de rencontrer un Chochodile.
- À la seconde rencontre, si le pokémon était un Chochodile lors de la première rencontre, les chances d'en rencontrer un à nouveau sont de 55%. Sinon, les chances d'en rencontrer un sont de 5%.

On note X_1 , respectivement X_2 , la variable aléatoire correspondant au nombre de Chochodile rencontrés lors de la première, respectivement deuxième, rencontre. On note

- C_1 l'événement « on a rencontré un Chochodile lors de la première rencontre » ;
 - C_2 l'événement « on a rencontré un Chochodile lors de la deuxième rencontre ».
1. Construire un arbre pondéré adapté à la situation.
 2. En déduire les lois de probabilités des variables aléatoires X_1 et X_2 .
 3. Les variables aléatoires X_1 et X_2 sont-elles identiquement distribuées ? Justifier.
 4. Calculer $\mathbb{P}(\{X_1 = 0\} \cap \{X_2 = 0\})$ et $\mathbb{P}(X_1 = 0) \times \mathbb{P}(X_2 = 0)$. Les variables aléatoires X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ? Justifier.
 5. Dans un autre lieu, les probabilités de rencontres sont différentes : que ce soit la première ou la seconde rencontre, il y a 10% de chances de rencontrer un Chochodile. On note Y_1 , respectivement Y_2 , la variable aléatoire correspondant au nombre de Chochodile rencontrés lors de la première, respectivement deuxième, rencontre.
 - (a) Déterminer les lois de probabilités de Y_1 et Y_2 .
 - (b) Ces variables aléatoires sont-elles identiquement distribuées ? Indépendantes ? Justifier.

Échantillonnage

Exercice 14.13. On considère dix variables aléatoires $X_1, \dots, X_{10}$ définies sur un même univers Ω . On suppose que ces variables aléatoires sont identiquement distribuées et indépendantes. On donne ci-dessous la loi de X_1 .

x_i	-5	0	1	3
$\mathbb{P}(X_1 = x_i)$	0,4	0,3	0,2	0,1

1. On pose S_{10} la variable aléatoire définie par $S_{10} = X_1 + \dots + X_{10}$.
 - (a) Calculer $\mathbb{E}(S_{10})$.
 - (b) Calculer $\mathbb{V}(S_{10})$ et $\sigma(S_{10})$. On arrondira la valeur de $\sigma(S_{10})$ au centième.
2. On pose M_{10} la variable aléatoire définie par $M_{10} = \frac{S_{10}}{10}$.
 - (a) Calculer $\mathbb{E}(M_{10})$.
 - (b) Calculer $\mathbb{V}(M_{10})$ et $\sigma(M_{10})$. On arrondira la valeur de $\sigma(S_{10})$ à 10^{-4} près.

Exercice 14.14. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $X_1, \dots, X_n$ n variables aléatoires identiquement distribuées et indépendantes. On donne ci-dessous la loi de X_k pour tout $k \in \{1; \dots; n\}$.

x_i	4	10	12
$\mathbb{P}(X_k = x_i)$	0,25	0,5	0,25

On pose S_n la variable aléatoire définie par $S_n = X_1 + \dots + X_n$.

1. Quelle est la valeur minimale de n pour laquelle $\mathbb{E}(S_n) \geq 2\,453$?
2. Quelle est la valeur maximale de n pour laquelle $\sigma(S_n) \leq 60$?

Exercice 14.15. La majorité des contraventions liées aux infractions au code de la route concernent les contraventions de 4^e catégorie : utilisation du téléphone au volant, feu rouge grillé, non respect du port de la ceinture, chevauchement d'une ligne blanche continue, etc.

Le tarif forfaitaire d'une telle contravention s'élève à 135€. Il est cependant possible de payer la contravention moins chère si on procède rapidement au paiement, elle s'élève alors à 90€ et on parle d'amende minorée. À l'inverse, en cas de retard de paiement, elle s'élève à 345€ et on parle d'amende majorée.

Une préfecture transmet les informations suivantes concernant ces contraventions.

Montant de l'amende (en €)	90	135	375
Fréquence observée (en %)	79	15	6

Afin d'étudier de manière plus précise ces données, on prélève cent dossiers concernant les amendes de 4^e classe. On suppose que le nombre d'amendes est suffisamment important pour assimiler cette expérience avec un tirage avec remise.

Pour tout entier $k \in \{1; \dots; 100\}$, on appelle X_k la variable aléatoire correspondant au montant payé par le k -ième dossier prélevé.

1. On note S_{100} la variable aléatoire correspondant au montant total payé par les cent contrevenants. Exprimer S_{100} en fonction des variables aléatoires X_k .
2. En moyenne, sur cent contrevenants, quel est le montant total payé ?
3. Calculer $\sigma(S_{100})$. Arrondir au millièm.
4. On note M_{100} la variable correspondant au paiement moyen par amende des cents contrevenants choisis. Calculer $\sigma(M_{100})$. Arrondir au millièm.



Exercice 14.16. Soient $q \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On considère le jeu suivant se déroulant en n étapes :

- on lance à chaque étape un dé six équilibré ;
- si, à la première étape, on obtient 4, on remporte 6€ ; sinon, on ne remporte rien ;
- si, à la deuxième étape, on obtient 4, on remporte $6q$ € ; sinon, on ne remporte rien ;
- si, à la troisième étape, on obtient 4, on remporte $6q^2$ € ; sinon, on ne remporte rien ;
- ...
- si, à la n -ième étape, on obtient 4, on remporte $6q^{n-1}$ € ; sinon, on ne remporte rien.

Pour tout entier $k \in \{1; \dots; n\}$, on note K_k la variable aléatoire correspondant au gain obtenu lors de la k -ième étape. On admet que ces variables aléatoires sont indépendantes.

1. Déterminer, pour tout entier $k \in \{1; \dots; n\}$, la loi de probabilité de la variable aléatoire X_k .
2. Soit Y_n la variable aléatoire correspondant au gain total obtenu à l'issue de la partie. Exprimer Y_n en fonction des variables aléatoires X_k .
3. Déterminer une expression de $\mathbb{E}(Y_n)$ en fonction de q et n . Différencier les cas $q \neq 1$ et $q = 1$.
4. Dans cette question, on suppose que $q = 2$. Déterminer le nombre d'étapes nécessaires pour que le gain théorique moyen dépasse 1 000€ à l'issue de la partie.
5. Dans cette question, on suppose que $q = 0,5$. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(Y_n)$ puis interpréter le résultat obtenu.

14.5.2 S'entraîner

Sommes de variables aléatoires

Exercice 14.17. Soient X et Y deux variables aléatoires dont on donne les lois de probabilités ci-dessous.

x_i	-4	1	20
$\mathbb{P}(X = x_i)$	0,1	0,35	0,55

y_i	-2	5
$\mathbb{P}(Y = y_i)$	0,27	0,73

1. Soit Z la variable aléatoire définie par $Z = X + Y$. Quelles sont les valeurs prises par Z ?
2. Peut-on déterminer la loi de Z à partir des données de l'énoncé ? Si oui, donner cette loi.

Exercice 14.18. Robert, gérant de casino, décide de tester ses différents jeux : une fois la roulette et deux fois le black jack. Il note X la variable aléatoire correspondant au gain total remporté.

1. Pour faciliter l'étude, il écrit $X = X_1 + X_2 + X_3$. À quoi les variables aléatoires X_1 , X_2 et X_3 peuvent-elles correspondre ?
2. Sharon, une connaissance proche de Robert, souhaite écrire X sous la forme $X = X_1 + 2X_2$. A-t-elle raison ? Justifier.

Espérance d'une somme de variables aléatoires

Exercice 14.19. Soient X et Y les deux variables aléatoires de l'exercice 14.17. Calculer $\mathbb{E}(3X)$, $\mathbb{E}(X + Y)$ et $\mathbb{E}(3X - Y)$.

Variables aléatoires indépendantes

Exercice 14.20. Soient X_1, X_2, Y_1 et Y_2 quatre variables aléatoires telles que :

$\mathbb{P}(\{X_1 = x_i\} \cap \{Y_1 = y_i\})$		
$y_i \backslash x_i$	2	3
0	0,03	0,07
1	0,27	0,63

$\mathbb{P}(\{X_2 = x_i\} \cap \{Y_2 = y_i\})$		
$y_i \backslash x_i$	2	3
0	0,2	0,2
1	0,24	0,36

- (a) Déterminer les lois de X_1 et Y_1 .
(b) X_1 et Y_1 sont-elles indépendantes ? Justifier.
- Mêmes questions avec X_2 et Y_2 .

Variance d'une somme de variables aléatoires

Exercice 14.21. Soient X et Y les deux variables aléatoires de l'exercice 14.17. On suppose par ailleurs que X et Y sont indépendantes.

- Calculer $\mathbb{V}(3X)$ et $\mathbb{V}(2X - 4Y)$.
- En déduire $\sigma(3X)$ et $\sigma(2X - 4Y)$. On arrondira à 10^{-4} près.

Échantillonnage

Exercice 14.22. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $X_1, \dots, X_n$ n variables aléatoires identiquement distribuées et indépendantes. On donne ci-dessous la loi de X_k pour tout $k \in \{1; \dots; n\}$.

x_i	-2	1	8	10
$\mathbb{P}(X_k = x_i)$	0,35	0,225	0,125	0,3

On pose S_n la variable aléatoire définie par $S_n = X_1 + \dots + X_n$. On donne $\mathbb{E}(S_n) = 423$. Déterminer la valeur de n .

Exercice 14.23. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $X_1, \dots, X_n$ n variables aléatoires identiquement distribuées et indépendantes. On donne ci-dessous la loi de X_1 .

x_i	5	10	15
$\mathbb{P}(X_1 = x_i)$	0,2	0,4	0,4

On pose M_n la variable aléatoire définie par $M_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$. On donne $\sigma(M_n) = \sqrt{2}$. Déterminer la valeur de n .



14.5.3 Le Flashback !

Flashback 14.1.

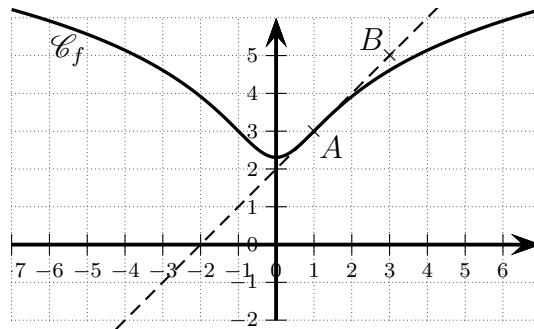
1. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n \geq 2$, on a $(n+1)^2 \leq 3n^2$.
2. Montrer alors par récurrence que, pour tout entier naturel $n \geq 5$, on a $2^n + 5n^2 \leq 3^n$.

Flashback 14.2. [Asie, mai 2022]

Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On considère les points $A(1; 3)$ et $B(3; 5)$.

On donne ci-contre $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal du plan, ainsi que la tangente (AB) à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A .

Les trois parties de l'exercice peuvent être traitées de manière indépendante.



Partie A

1. Déterminer graphiquement les valeurs de $f(1)$ et $f'(1)$.
2. La fonction f est définie par l'expression $f(x) = \ln(ax^2 + 1) + b$, où a et b sont des nombres réels positifs.
 - (a) Déterminer l'expression de $f'(x)$.
 - (b) Déterminer les valeurs de a et b à l'aide des résultats précédents.

Partie B On admet que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(x^2 + 1) + 3 - \ln(2)$.

1. Montrer que f est une fonction paire.
2. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
3.
 - (a) Déterminer l'expression de $f'(x)$.
 - (b) Dresser le tableau des variations de f en y faisant figurer la valeur exacte du minimum ainsi que les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.
4. À l'aide du tableau des variations de f , donner les valeurs du réel k pour lesquelles l'équation $f(x) = k$ admet deux solutions.
5. Résoudre l'équation $f(x) = 3 + \ln(2)$.

Partie C On rappelle que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(x^2 + 1) + 3 - \ln(2)$.

1. Conjecturer, par lecture graphique, les abscisses des éventuels points d'inflexion de la courbe $\mathcal{C}_f$.
2. Montrer que, pour tout nombre réel x , on a : $f''(x) = \frac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$.
3. En déduire le plus grand intervalle sur lequel la fonction f est convexe.