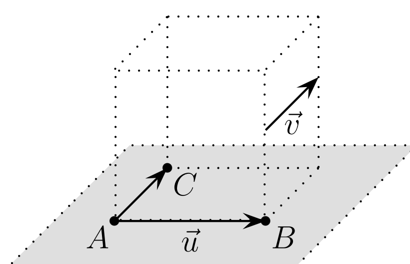
Chapitre 5

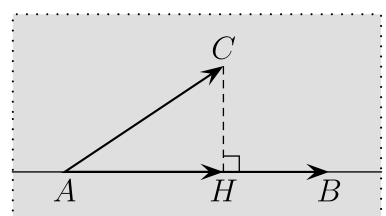
Orthogonalité dans l'espace

5.1 Produit scalaire dans l'espace

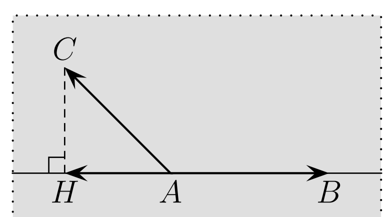
Définition 5.1. *Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace.*

1. *Si $\vec{u} = \vec{0}$, alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.*
2. *On note A, B et C les points tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$; le plan (ABC) est engendré par $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$, est celui calculé dans ce plan (ABC). On appelle H le projeté orthogonal de C sur (AB).*
   (a) Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont de même sens, alors
   $$\vec{u} \cdot \vec{v} = AB \times AH.$$
   (b) Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont de sens contraire, alors
   $$\vec{u} \cdot \vec{v} = -AB \times AH.$$





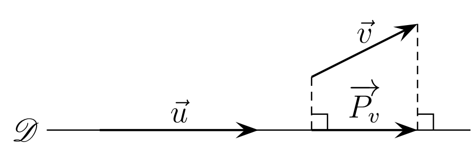
$\vec{u} \cdot \vec{v} = AB \times AH$

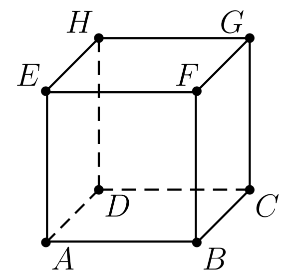


$\vec{u} \cdot \vec{v} = -AB \times AH$

Remarque : On ne peut pas prendre les projetés de B et C sur une droite tierce. On doit soit projeter B sur (AC), soit C sur (AB).

Proposition 5.1. *Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace avec $\vec{u} \neq \vec{0}$. Soient $\mathscr{D}$ une droite de l'espace dirigée par $\vec{u}$ et $\overrightarrow{P_v}$ le projeté orthogonal de $\vec{v}$ sur $\mathscr{D}$. Alors :*
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \overrightarrow{P_v}.$$





Exemple : Soit un cube $ABCDEFGH$ de d'arête 4. Calculons les produits scalaires $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{EG}$. C est le projeté orthogonal de G sur (AC) donc

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AG} = AC \times AC = (4\sqrt{2})^2 = 32.$$

De même, A est le projeté orthogonal de E sur (AC) donc

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{EG} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC} = AC \times AC = 32.$$

Proposition 5.2. *Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls de l'espace. Alors :*

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos((\vec{u}\,;\vec{v})).$$

Propriété 5.1. *Soit $\vec{u}$ un vecteur de l'espace. Alors : $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$.*

Proposition 5.3. ***[Symétrie]*** *Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace. Alors : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$.*

Proposition 5.4. ***[Bilinéarité - Admis]*** *Soient $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ des vecteurs de l'espace et k un réel. Alors :*

1. $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$,
2. $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$,
3. $k \times (\vec{u} \cdot \vec{v}) = (k\vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (k\vec{v})$.

Corollaire 5.1. ***[Identités remarquables]*** *Pour tous vecteurs de l'espace $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on a :*

1. $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$,
2. $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$,
3. $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$.

Corollaire 5.2. ***[Formules de polarisation]*** *Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace. On a :*

1. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \dfrac{1}{2}(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$;
2. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \dfrac{1}{2}(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2)$.

Exemple : Considérons les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que $\|\vec{u}\| = 3$, $\|\vec{v}\| = 5$ et $\|\vec{u} - \vec{v}\| = \sqrt{22}$. Calculons la mesure principale de l'angle formé par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$: $(\vec{u}\,;\vec{v})$. D'après les formules de polarisation, on a :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2\right) = \frac{1}{2}\left(3^2 + 5^2 - \sqrt{22}^2\right) = \frac{1}{2}(9 + 25 - 22) = \frac{1}{2} \times 12 = 6.$$

Par ailleurs, on a aussi :

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}\,;\vec{v}) &\iff 6 = 3 \times 5 \times \cos(\vec{u}\,;\vec{v}) \\ &\iff \cos(\vec{u}\,;\vec{v}) = \frac{2}{5} \\ &\iff (\vec{u}\,;\vec{v}) = \cos^{-1}\left(\frac{2}{5}\right). \end{aligned}$$

Proposition 5.5. *Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $(\vec{u}\,;\vec{v}) = 0[2\pi]$ ou $(\vec{u}\,;\vec{v}) = \pi[2\pi]$.*

Démonstration. Exercice. □

Exercices : 5.1 à 5.8 ; 5.29 à 5.32.

5.2 Orthogonalité

5.2.1 Orthogonalité

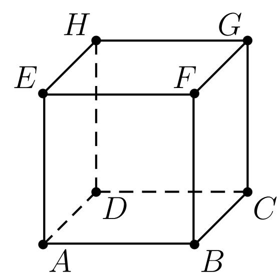
Définition 5.2. *Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls de l'espace. On dit que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **orthogonaux** si et seulement si*

$$(\vec{u}\,;\vec{v}) = \pm\frac{\pi}{2}\ [2\pi].$$

Proposition 5.6. *Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls de l'espace. Alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$.*

Démonstration. Exercice. □

Exemple : Soit un cube $ABCDEFGH$ de diagonale a. Calculons les produits scalaires suivants :



1. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DG}$;
2. $\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{HD}$;
3. $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{GF}$.

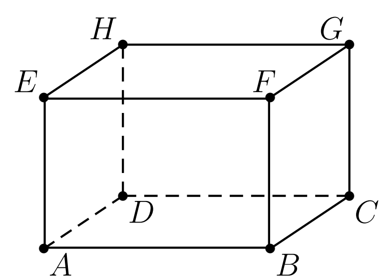
1. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DG} = \overrightarrow{AB}\cdot\left(\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CG}\right) = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BF} = AB^2+0 = a^2$. car $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BF}$ sont orthogonaux.
2. $\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{HD} = \overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{EA} = 0$ car $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{EA}$ sont orthogonaux.
3. $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{GF} = -AD\times GF$ car $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{GF}$ sont colinéaires de sens contraires. D'où $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{GF} = -a\times a = -a^2$.

Exercice : 5.9.

5.2.2 Repère orthonormé

Définition 5.3. *Une base de l'espace est dite **orthonormée** si les vecteurs de la base sont deux à deux orthogonaux et ont tous leur norme égale à 1.*

Exemple : Donnons une base orthonormée dans le pavé droit $ABCDEFGH$ tel que $AB=4$, $AD=3$ et $AE=2$.



$ABCDEFGH$ est un pavé droit donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$ sont orthogonaux deux à deux. Cependant, les normes sont distinctes. Posons alors $\vec{i}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$, $\vec{j}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$ et $\vec{k}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$.

Ainsi,

$$\|\vec{i}\| = \left\|\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}\right\| = \frac{1}{4}\|\overrightarrow{AB}\| = \frac{1}{4}\times 4 = 1, \quad \|\vec{j}\| = \left\|\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}\right\| = \frac{1}{3}\|\overrightarrow{AD}\| = \frac{1}{3}\times 3 = 1,$$

$$\|\vec{k}\| = \left\|\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}\right\| = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{AE}\| = \frac{1}{2}\times 2 = 1.$$

La base $\left(\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k}\right)$ ainsi définie est orthonormée.

Définition 5.4. *Un repère $\left(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k}\right)$ de l'espace est dit* ***orthonormé*** *si sa base $\left(\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k}\right)$ est orthonormée.*

Proposition 5.7. *Trois vecteurs non nuls et deux à deux orthogonaux forment une base de l'espace.*

Démonstration. Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs non nuls et deux à deux orthogonaux.

1. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux donc $(\vec{u}\,;\vec{v}) = \pm\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$. D'après la propriété 5.5, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont donc pas colinéaires et forment ainsi un plan.
2. Montrons que $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont non coplanaires. Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe $(\lambda\,;\mu) \in (\mathbb{R}^2)^*$ tel que $\vec{w} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$. Comme $\vec{u}$ et $\vec{w}$ sont orthogonaux, on a alors

$$\begin{aligned}
& \vec{u}\cdot\vec{w} = 0 \\
\iff & \vec{u}\cdot(\lambda\vec{u}+\mu\vec{v}) = 0 \\
\iff & \lambda\vec{u}\cdot\vec{u} + \mu\vec{u}\cdot\vec{v} = 0 \\
\iff & \lambda\,\|\vec{u}\|^2 = 0 \quad (\vec{u}\cdot\vec{v} = 0 \text{ car } \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ orthogonaux}) \\
\implies & \lambda = 0 \quad (\text{car } \vec{u} \text{ est non nul})
\end{aligned}$$

   De la même façon, on trouve que $\mu = 0$. Or, on a supposé $(\lambda\,;\mu) \neq (0\,;0)$, c'est absurde. Donc $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont non coplanaires, ils forment ainsi une base de l'espace.

□

Exercices : 5.10 ; 5.33.

5.2.3 Positions relatives

Définition 5.5.

— *On dit que deux droites de l'espace sont* ***orthogonales*** *si leurs vecteurs directeurs respectifs sont orthogonaux.*

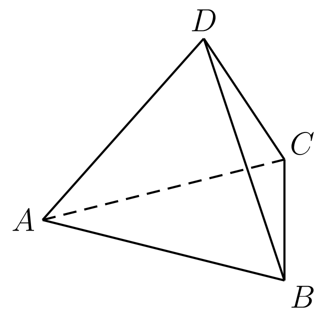
— *Une droite et un plan de l'espace sont* ***orthogonaux*** *lorsqu'un vecteur directeur de la droite est orthogonal à deux vecteurs de base du plan.*

— *Deux plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont* ***perpendiculaires*** *si deux vecteurs définissant $\mathscr{P}_1$ sont orthogonaux à deux vecteurs définissant $\mathscr{P}_2$.*

Remarques :

1. Deux droites orthogonales sont perpendiculaires si elles sont sécantes (et donc coplanaires).
2. Deux droites perpendiculaires sont orthogonales. Cependant, la réciproque est fausse car deux droites orthogonales ne sont pas nécessairement coplanaires.

Exemple : Soit un tétraèdre régulier $ABCD$ d'arêtes de longueur l. Démontrons que les droites (AD) et (BC) sont orthogonales. Pour cela, montrons que $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$.



$$\begin{aligned}\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} &= \overrightarrow{AD} \cdot \left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right) \\ &= \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC} \\ &= -\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC}.\end{aligned}$$

Or,

$$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} = AD \times AB \times \cos\left(\widehat{BAD}\right) = l \times l \times \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

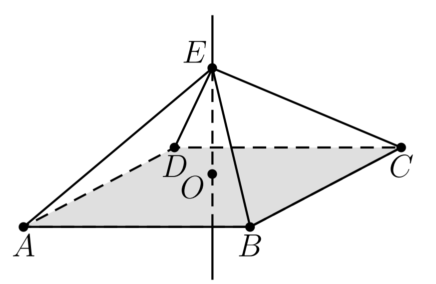
car ABD est équilatéral. D'où $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} = l^2 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}l^2$. De même, on montre que $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}l^2$. On en déduit que :

$$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = -\frac{1}{2}l^2 + \frac{1}{2}l^2 = 0.$$

Ainsi, les vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont orthogonaux et donc les droites (AD) et (BC) sont orthogonales.

Remarque : Dans l'exemple précédent, on a montré que les droites (AD) et (BC) sont orthogonales. Toutefois, elles ne sont pas coplanaires donc non sécantes. Les droites (AD) et (BC) ne sont donc pas perpendiculaires.

Exemple : Considérons $ABCDE$ une pyramide à base carrée telle que les faces issues de E sont des triangles isocèles. On note O le centre du carrée $ABCD$. Montrons que la droite (EO) est orthogonale au plan (ABC).



Pour cela, montrons que $\overrightarrow{EO}$ est donc orthogonal à deux vecteurs de base du plan (ABC).

- $ABCD$ est un carré donc $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires et définissent une base du plan (ABC).
- On sait que les triangles EAB et EAD sont isocèles en E, donc $EB = EA = ED$. Ainsi le triangle BED est aussi isocèle en E. Sa médiane et sa hauteur issue de E sont donc confondues.

Or, O est le centre du carré $ABCD$ donc O est le milieu des diagonales du carré $ABCD$. En particulier, O est le milieu de $[BD]$. Ainsi, (EO) est la médiane et donc la hauteur issue de E dans le triangle BED. On en déduit que (EO) est perpendiculaire à (BD) et donc que $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{EO}$ sont orthogonaux.

— Le même raisonnement permet de montrer que $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{EO}$ sont orthogonaux.

(EO) est donc orthogonale au plan (ABC).

Exercices : 5.11 et 5.12.

5.3 Produit scalaire dans un repère orthonormé

5.3.1 Produit scalaire dans un repère orthonormé

Proposition 5.8. *Soit $(i\,;j\,;k)$ une base orthonormée et $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace de coordonnées respectives* $\begin{pmatrix} x_{\vec{u}} \\ y_{\vec{u}} \\ z_{\vec{u}} \end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix} x_{\vec{v}} \\ y_{\vec{v}} \\ z_{\vec{v}} \end{pmatrix}$ *dans cette base orthonormée. On a alors :*

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = x_{\vec{u}} \times x_{\vec{v}} + y_{\vec{u}} \times y_{\vec{v}} + z_{\vec{u}} \times z_{\vec{v}}.$$

Démonstration. On a $\vec{u} = x_{\vec{u}}\vec{i} + y_{\vec{u}}\vec{j} + z_{\vec{u}}\vec{k}$ et $\vec{v} = x_{\vec{v}}\vec{i} + y_{\vec{v}}\vec{j} + z_{\vec{v}}\vec{k}$. Par bilinéarité, on a

$$\begin{aligned}
\vec{u} \cdot \vec{v} &= \left(x_{\vec{u}}\vec{i} + y_{\vec{u}}\vec{j} + z_{\vec{u}}\vec{k}\right) \cdot \left(x_{\vec{v}}\vec{i} + y_{\vec{v}}\vec{j} + z_{\vec{v}}\vec{k}\right) \\
&= x_{\vec{u}}x_{\vec{v}}\vec{i} \cdot \vec{i} + x_{\vec{u}}y_{\vec{v}}\vec{i} \cdot \vec{j} + x_{\vec{u}}z_{\vec{v}}\vec{i} \cdot \vec{k} + y_{\vec{u}}x_{\vec{v}}\vec{j} \cdot \vec{i} + y_{\vec{u}}y_{\vec{v}}\vec{j} \cdot \vec{j} + y_{\vec{u}}z_{\vec{v}}\vec{j} \cdot \vec{k} + z_{\vec{u}}x_{\vec{v}}\vec{k} \cdot \vec{i} + z_{\vec{u}}y_{\vec{v}}\vec{k} \cdot \vec{j} \\
&+ z_{\vec{u}}z_{\vec{v}}\vec{k} \cdot \vec{k}
\end{aligned}$$

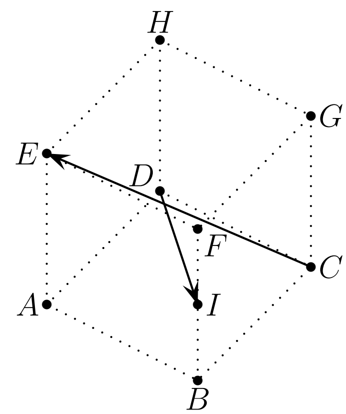
Comme $(i\,;j\,;k)$ est orthonormée, on a $\vec{i} \cdot \vec{j} = 0$, $\vec{i} \cdot \vec{k} = 0$ et $\vec{j} \cdot \vec{k} = 0$, ainsi que $\vec{i} \cdot \vec{i} = \|\vec{i}\| = 1$, $\vec{j} \cdot \vec{j} = \|\vec{j}\| = 1$ et $\vec{k} \cdot \vec{k} = \|\vec{k}\| = 1$, on en déduit que :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = x_{\vec{u}}x_{\vec{v}} + y_{\vec{u}}y_{\vec{v}} + z_{\vec{u}}z_{\vec{v}}.$$

□

Exemple : Considérons les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ dans un repère orthonormé. Calculons le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$. On a

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = x_{\vec{u}} \times x_{\vec{v}} + y_{\vec{u}} \times y_{\vec{v}} + z_{\vec{u}} \times z_{\vec{v}} = 3 \times 1 + 2 \times 2 + (-1) \times 4 = 3 + 4 - 4 = 3.$$



Exemple : Considérons le repère de l'espace $\left(C\,;\overrightarrow{CB}\,;\overrightarrow{CD}\,;\overrightarrow{CG}\right)$. Notons I le milieu du segment $[BF]$. Les vecteurs $\overrightarrow{CE}$ et $\overrightarrow{DI}$ sont-ils orthogonaux ?

Dans le repère $\left(C\,;\overrightarrow{CB}\,;\overrightarrow{CD}\,;\overrightarrow{CG}\right)$, les points B, C, D, E et F ont pour coordonnées respectives : $B\,(1\,;0\,;0)$, $C\,(0\,;0\,;0)$, $D\,(0\,;1\,;0)$, $E\,(1\,;1\,;1)$ et $F\,(1\,;0\,;1)$.

Or, I est le milieu de $[BF]$ donc a pour coordonnées $I\left(\dfrac{1+1}{2}\,;\dfrac{0+0}{2}\,;\dfrac{0+1}{2}\right)$, soit $I\,(1\,;0\,;0,5)$.

Ainsi,

$$\overrightarrow{CE}\begin{pmatrix}1-0\\1-0\\1-0\end{pmatrix} \Longrightarrow \overrightarrow{CE}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{DI}\begin{pmatrix}1-0\\0-1\\0,5-0\end{pmatrix} \Longrightarrow \overrightarrow{DI}\begin{pmatrix}1\\-1\\0,5\end{pmatrix}.$$

Or, $ABCDEFGH$ est un cube donc le repère $\left(C;\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CD};\overrightarrow{CG}\right)$ est orthonormé. On a alors

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CE}\cdot\overrightarrow{DI} &= x_{\overrightarrow{CE}}\times x_{\overrightarrow{DI}} + y_{\overrightarrow{CE}}\times y_{\overrightarrow{DI}} + z_{\overrightarrow{CE}}\times z_{\overrightarrow{DI}}\\ &= 1\times 1 + 1\times(-1) + 1\times 0,5\\ &= 1-1+0,5\\ &= 0,5\\ &\neq 0.\end{aligned}$$

Les vecteurs $\overrightarrow{CE}$ et $\overrightarrow{DI}$ ne sont donc pas orthogonaux.

5.3.2 Norme et distance dans un repère orthonormé

Proposition 5.9. *Soit $\vec{u}$ un vecteur de l'espace dans un repère orthonormé. La norme de $\vec{u}$ est alors donnée par la formule :*

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x_{\vec{u}}^2 + y_{\vec{u}}^2 + z_{\vec{u}}^2}.$$

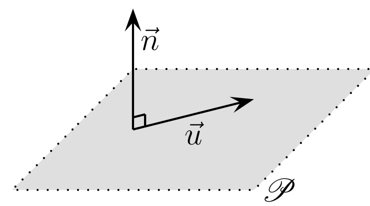
Démonstration. Conséquence directe du fait que $\vec{u}\cdot\vec{u} = \|\vec{u}\|^2$. □

Corollaire 5.3. *Soient $A\,(x_A\,;y_A\,;z_A)$ et $B\,(x_B\,;y_B\,;z_B)$ deux points de l'espace dans un repère orthonormé. La distance AB est alors donnée par la formule :*

$$AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B-x_A)^2 + (y_B-y_A)^2 + (z_B-z_A)^2}.$$

Exercices : 5.13 à 5.19 ; 5.34 à 5.37.

5.4 Vecteur normal à un plan



Définition 5.6. *Soit $\mathscr{P}$ un plan de l'espace. On dit que le vecteur $\vec{n}$ est **normal** au plan $\mathscr{P}$ si et seulement si pour tout vecteur $\vec{u}$ dans la direction de $\mathscr{P}$, $\vec{u}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux.*

Remarque : Un plan admet une infinité de vecteurs normaux qui sont tous colinéaires entre eux.

Proposition 5.10. *Soit le plan $\mathscr{P}$ dirigé par les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$. $\vec{n}$ est normal au plan $\mathscr{P}$ si et seulement si il est orthogonal aux deux vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$.*

Démonstration. Soit le plan $\mathscr{P}$ dirigé par les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$. Soit $\vec{n}$ un vecteur de l'espace.

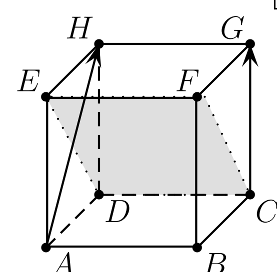
$\Longrightarrow$: On suppose que $\vec{n}$ est normal à $\mathscr{P}$. Il est donc normal à tout vecteur dans la direction de $\mathscr{P}$, en particulier à $\vec{i}$ et $\vec{j}$ qui en sont des vecteurs directeurs.

$\Longleftarrow$: On suppose que $\vec{n}$ est orthogonal à $\vec{i}$ et à $\vec{j}$. On a alors $\vec{i}\cdot\vec{n}=0$ et $\vec{j}\cdot\vec{n}=0$. Soit $\vec{u}$ un vecteur dans la direction de $\mathscr{P}$, il existe $(\lambda\,;\mu)\in\mathbb{R}^2$ tel que $\vec{u}=\lambda\vec{i}+\mu\vec{j}=0$. On a alors

$$\vec{n}\cdot\vec{u}=\vec{n}\cdot(\lambda\vec{i}+\mu\vec{j})=\lambda\vec{i}\cdot\vec{n}+\mu\vec{j}\cdot\vec{n}=0.$$

On en que déduit $\vec{n}$ est normal au plan $\mathscr{P}$.

□



Exemple : Soit un cube $ABCDEFGH$.

1. Montrons que le vecteur $\overrightarrow{CG}$ est normal au plan (FGH).
2. Montrons que le vecteur $\overrightarrow{AH}$ est un vecteur normal au plan (EDC).

1. $ABCDEFGH$ est un cube, donc toutes ses faces sont des carrés. Ainsi, $\overrightarrow{CG}$ est à la fois orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{FG}$ et $\overrightarrow{HG}$. De plus, $\left(\overrightarrow{FG}\,;\overrightarrow{HG}\right)$ est une base du plan (FGH) et $\overrightarrow{CG}$ est un vecteur non nul. Alors, $\overrightarrow{CG}$ est un vecteur normal au plan (FGH).
2. $\overrightarrow{AH}$ est non nul. $EHDA$ est un carré, donc ses diagonales sont perpendiculaires. Ainsi, $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{ED}$ sont orthogonaux.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{DC}&=(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DH})\cdot\overrightarrow{DC}\\&=\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DH}\cdot\overrightarrow{DC}\\&=0+0\\&=0.\end{aligned}$$

Donc $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{DC}$ sont orthogonaux. Donc $\overrightarrow{AH}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{ED}$ et $\overrightarrow{DC}$ qui forment une base de (EDC), autrement dit $\overrightarrow{AH}$ est un vecteur normal au plan (EDC).

Méthode pour déterminer les coordonnées d'un vecteur normal à un plan :

1. Déterminer les coordonnées de deux vecteurs directeurs du plan $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
2. Poser $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ vecteur de l'espace et ses coordonnées. Énoncer que $\vec{n}$ est normal au plan si et seulement si il est orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{v}$, si et seulement si leur produit scalaire est nul : $\vec{n} \cdot \vec{u} = 0$ et $\vec{n} \cdot \vec{v} = 0$.
3. Écrire le système obtenu à partir de $\vec{n} \cdot \vec{u} = 0$ et $\vec{n} \cdot \vec{v} = 0$ puis le résoudre en exprimant deux des coordonnées de $\vec{n}$ à l'aide de la troisième (par exemple a et b en fonction de c). Choisir une valeur pour la troisième coordonnées et en déduire les deux autres.

Exemple : Soient les points A, B et C de coordonnées respectives $(1\,;2\,;-2)$, $(-1\,;3\,;1)$ et $(2\,;0\,;-2)$ dans un repère orthonormé. Déterminons un vecteur normal au plan (ABC).

1. $$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -1-1 \\ 3-2 \\ 1-(-2) \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 2-1 \\ 0-2 \\ -2-(-2) \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$
   On remarque que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires donc $\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}\right)$ est une base du plan (ABC).
2. Soit $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ un vecteur de l'espace. $\vec{n}$ est normal à (ABC) si et seulement si $\vec{n}$ est normal à $\overrightarrow{AB}$ et à $\overrightarrow{AC}$.
3. Le repère considéré est orthonormé ($\bigstar$), $\vec{n}$ est donc normal à (ABC) si et seulement si :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} & = & 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} & = & 0 \end{array}\right. \underset{\bigstar}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcl} a \times (-2) + b \times 1 + c \times 3 & = & 0 \\ a \times 1 + b \times (-2) + c \times 0 & = & 0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} -2a + b + 3c & = & 0 \\ a - 2b & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 3c & = & 2a - b \\ a & = & 2b \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 3c & = & 2 \times 2b - b \\ a & = & 2b \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 3c & = & 3b \\ a & = & 2b \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} c & = & b \\ a & = & 2b \end{array}\right. .$$

Choisissons arbitrairement $b = 1$, alors $a = 2$ et $c = 1$. Le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est alors un vecteur normal au plan (ABC).

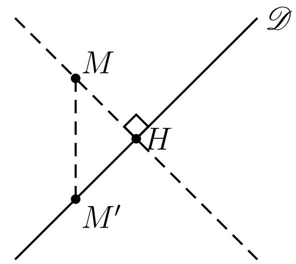
Remarque : Deux plans sont perpendiculaires si tout vecteur normal à l'un est orthogonal à tout vecteur normal de l'autre.

Exercices : 5.20 à 5.23 ; 5.38.

5.5 Projeté orthogonal

5.5.1 Projeté orthogonal d'un point sur une droite

Définition 5.7. *Le projeté orthogonal d'un point M sur une droite $\mathscr{D}$ est le point d'intersection H de la droite et de la perpendiculaire à cette droite passant par le point M.*



Méthode pour montrer qu'un point est le projeté orthogonal d'un autre sur une droite : Pour montrer que H' est le projeté orthogonal de M sur $\mathscr{D}$, il faut montrer que :

1. $H \in \mathscr{D}$;
2. $\overrightarrow{MH}$ est orthogonal à un vecteur directeur de $\mathscr{D}$.

Proposition 5.11. *Le projeté orthogonal H d'un point M sur une droite $\mathscr{D}$ est le point de $\mathscr{D}$ le plus proche de M. La distance MH est alors la distance entre M et $\mathscr{D}$.*

Démonstration. Considérons $\mathscr{D}$ une droite de l'espace. Soient M un point de l'espace et H le projeté orthogonal de M sur $\mathscr{D}$.

1. Si M appartient à la droite $\mathscr{D}$, alors M et H sont confondus et $MH = 0$. H est donc bien le point de $\mathscr{D}$ le plus proche de M.

2. On suppose que M n'appartient pas à la droite $\mathscr{D}$. Pour tout point M' de $\mathscr{D}$, le triangle MHM' est rectangle en H. Alors d'après le théorème de Pythagore, on a : $MM'^2 = MH^2 + HM'^2$. Or, par hypothèse, H et M ne sont pas confondus donc

$$\begin{aligned} MH > 0 &\iff MH^2 > 0 \\ &\iff MH^2 + HM'^2 > HM'^2 \\ &\iff MM'^2 > HM'^2 \\ &\iff MM' > HM' \end{aligned}$$

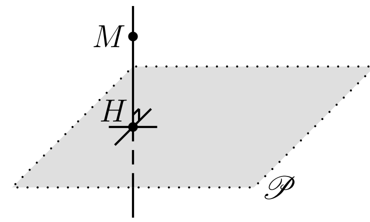
car les mesures sont positives et la fonction racine carrée est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. Enfin, on a montré pour tout point M' de $\mathscr{D}$, $MM' > HM$ et H est bien le point de $\mathscr{D}$ le plus proche de M.

$\square$

Exercice : 5.24.

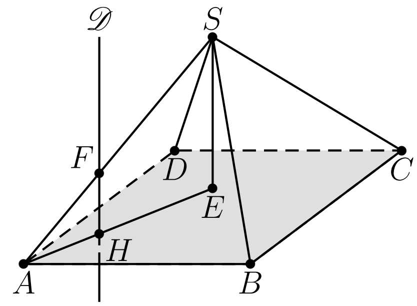
5.5.2 Projeté orthogonal d'un point sur un plan

Définition 5.8. *Le projeté orthogonal d'un point M sur un plan $\mathscr{P}$ est le point d'intersection H du plan et de la perpendiculaire à ce plan passant par le point M.*



Méthode pour montrer qu'un point est le projeté orthogonal d'un autre sur un plan : Pour montrer que H est le projeté orthogonal de M sur $\mathscr{P}$, il faut montrer que :

1. $H \in \mathscr{D}$;
2. $\overrightarrow{MH}$ est normal à $\mathscr{P}$.



Exemple : Soient $SABCD$ une pyramide, E le projeté orthogonal du point S sur le plan (ABC) et F un point du segment $[AS]$. Soit la droite $\mathscr{D}$ parallèle à (SE) et passant par F. Montrons que $\mathscr{D}$ coupe la droite (AE) en un point H qui est le projeté orthogonal de F sur (ABC).

— Le point E est le projeté orthogonal du point S sur le plan (ABC) donc la droite (SE) est orthogonale au plan (ABC). La droite (SE) est alors orthogonale à toute droite de ce plan et donc, en particulier, perpendiculaire à la droite (AE) puisqu'elle la coupe en E.

— Dans le plan (SAE), les droites $\mathscr{D}$ et (SE) sont parallèles. La droite (AE) est alors perpendiculaire à la droite $\mathscr{D}$ et la coupe donc en un point H.

— Par définition du projeté orthogonal, $\overrightarrow{SE}$ est un vecteur normal au plan (ABC). De plus, les droites (FH) et (SE) sont parallèles donc $\overrightarrow{FH}$ est colinéaire à $\overrightarrow{SE}$; ainsi $\overrightarrow{FH}$ est normal au plan (ABC). La droite (FH) est alors orthogonale au plan (ABC).

— Ainsi, le point H, intersection de $\mathscr{D}$ et de (BE), appartient au plan (ABC) et la droite (FH) est orthogonale au plan (ABC). Le point H est donc bien le projeté orthogonal du point F sur le plan (ABC).

Proposition 5.12. *Le projeté orthogonal d'un point M sur un plan $\mathscr{P}$ est le point de $\mathscr{P}$ le plus proche de M.*

Démonstration. Identique à celle pour le projeté sur une droite. □

Proposition 5.13. *Soient M un point de l'espace et $\mathscr{P}$ un plan de l'espace de vecteur normal $\vec{n}$. Soit H le projeté orthogonal de M sur $\mathscr{P}$. Alors la distance MH est appelée distance du point M au plan $\mathscr{P}$ et, pour tout point $P \in \mathscr{P}$, on a :*

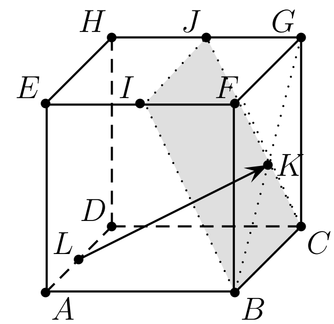
$$MH = \frac{|\overrightarrow{MP} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|}.$$

Démonstration. Soit $P \in \mathscr{P}$. Comme H est le projeté orthogonal de M sur $\mathscr{P}$ alors

$$\overrightarrow{MP} \cdot \vec{n} = \|\overrightarrow{MH}\| \times \|\vec{n}\| \quad \text{ou} \quad \overrightarrow{MP} \cdot \vec{n} = -\|\overrightarrow{MH}\| \times \|\vec{n}\|\,.$$

Alors $|\overrightarrow{MP}\cdot\vec{n}| = \|\overrightarrow{MH}\times\|\vec{n}\|$ et donc $|\overrightarrow{MP}\cdot\vec{n}| = MH\times\|\vec{n}\|$. Or, $\vec{n}$ est un vecteur normal donc $\vec{n}\neq\vec{0}$, d'où $MH = \dfrac{|\overrightarrow{MP}\cdot\vec{n}|}{\|\vec{n}\|}$. □

Exemple : On considère le cube $ABCDEFGH$ de côté 1. On note L , I et J les milieux respectifs des segments $[AD]$, $[EF]$ et $[HG]$ et K le centre du carré $BCGF$. Démontrons que le vecteur $\overrightarrow{LK}$ est normal au plan (IJB) puis déduisons-en la distance du point L au plan (IJB).



Dans le repère $\left(A\,;\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AD}\,;\overrightarrow{AE}\right)$, on a $A\,(0\,;0\,;0)$, $B\,(1\,;0\,;0)$, $C\,(1\,;1\,;0)$, $D\,(0\,;1\,;0)$, $E\,(0\,;0\,;1)$, $F\,(1\,;0\,;1)$, $G\,(1\,;1\,;1)$ et $H\,(0\,;1\,;1)$.

— I est le milieu de $[EF]$ donc $I\left(\dfrac{1}{2}\,;0\,;1\right)$. De même, J est le milieu de $[HG]$ donc $J\left(\dfrac{1}{2}\,;1\,;1\right)$.

On en déduit que $\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{IB}\begin{pmatrix}1/2\\0\\-1\end{pmatrix}$. On remarque que $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IB}$ ne sont pas colinéaires donc $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IB}$ définissent le plan (IJB).

L est le milieu de $[AD]$ donc $L\left(0\,;\dfrac{1}{2}\,;0\right)$. De même, K est le centre du carré $BCGF$ donc K est le milieu des diagonales de ce carré. En particulier, K est le milieu de $[BG]$, d'où $K\left(1\,;\dfrac{1}{2}\,;\dfrac{1}{2}\right)$. On en déduit que $\overrightarrow{LK}\begin{pmatrix}1\\0\\1/2\end{pmatrix}$.

— Le repère $\left(A\,;\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AD}\,;\overrightarrow{AE}\right)$ est orthonormé, on a alors

$$\overrightarrow{LK}\cdot\overrightarrow{IJ} = 1\times 0 + 0\times 1 + \frac{1}{2}\times 0 = 0+0+0 = 0,$$

donc $\overrightarrow{LK}$ et $\overrightarrow{IJ}$ sont orthogonaux. De même,

$$\overrightarrow{LK}\cdot\overrightarrow{IB} = 1\times\frac{1}{2} + 0\times 0 + \frac{1}{2}\times(-1) = \frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{2} = 0,$$

donc $\overrightarrow{LK}$ et $\overrightarrow{IB}$ sont orthogonaux. $\overrightarrow{LK}$ est donc normal au plan (IJB).

— La distance du point L au plan (IJB) est la distance entre L et son projeté orthogonal M sur le plan (IJB). Alors $LM = \dfrac{|\overrightarrow{LB}\cdot\overrightarrow{LK}|}{\|\overrightarrow{LK}\|}$.

Or, $\overrightarrow{LB}\begin{pmatrix}1\\-1/2\\0\end{pmatrix}$, donc

$$LM = \frac{\left|1\times 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)\times 0 + 0\times\frac{1}{2}\right|}{\sqrt{1^2+0^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{5}{4}}} = \sqrt{\frac{4}{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

Exercice : 5.25.

5.6 Capacités attendues

— Utiliser le produit scalaire pour démontrer une orthogonalité, pour calculer un angle, une longueur dans l'espace.

— Utiliser la projection orthogonale pour déterminer la distance d'un point à une droite ou à un plan.

— Résoudre des problèmes impliquant des grandeurs et mesures : longueur, angle, aire, volume.

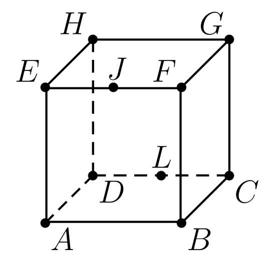
— Étudier des problèmes de configuration dans l'espace : orthogonalité de deux droites, d'une droite et d'un plan ; lieux géométriques simples, par exemple plan médiateur de deux points.

5.7 Exercices

5.7.1 Progresser

Produit scalaire dans l'espace

Exercice 5.1. Soit $ABCDEFGH$ un cube d'arête 1. Soient J et L les milieux respectifs des arêtes $[EF]$ et $[DC]$.



1. Calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BF}$ et $\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{DL}$.
2. Calculer $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{EG}$, $\overrightarrow{DL}\cdot\overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{AJ}\cdot\overrightarrow{HG}$.
3. Calculer $\overrightarrow{FG}\cdot\overrightarrow{FG}$, $\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{ED}$ et $\overrightarrow{JL}\cdot\overrightarrow{JF}$.

Exercice 5.2. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace. Dans chaque cas calculer $\vec{u}\cdot\vec{v}$.

1. $\|\vec{u}\| = 2$, $\|\vec{v}\| = 3$ et $(\vec{u}\,;\vec{v}) = \dfrac{\pi}{3}$.
2. $\|\vec{u}\| = 1$, $\|\vec{v}\| = 3$ et $(\vec{u}\,;\vec{v}) = -\dfrac{\pi}{6}$.

Exercice 5.3. Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace tels que $\vec{u}\cdot\vec{v} = 2$, $\vec{u}\cdot\vec{w} = -3$, $\vec{w}\cdot\vec{v} = 0$, $\|\vec{u}\| = 1$, $\|\vec{v}\| = 2$ et $\|\vec{w}\| = 3$. Calculer les produits scalaires ci-dessous.

1. $(-4\vec{u} + 5\vec{v})\cdot(-2\vec{v} + 3\vec{w})$.
2. $\left(\dfrac{1}{3}\vec{u} + 5\vec{v}\right)\cdot(\vec{u} - \dfrac{1}{2}\vec{w})$.

Exercice 5.4. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace. Dans chaque cas calculer $\vec{u}\cdot\vec{v}$.

1. $\|\vec{u}\| = 2$, $\|\vec{v}\| = 3$ et $\|\vec{u} + \vec{v}\| = 5$.
2. $\|\vec{u}\| = 3$, $\|\vec{v}\| = 4$ et $\|\vec{u} - \vec{v}\| = 2$.

Exercice 5.5. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace. Dans chaque cas déterminer toutes les mesures possibles de l'angle $(\vec{u}\,;\vec{v})$.

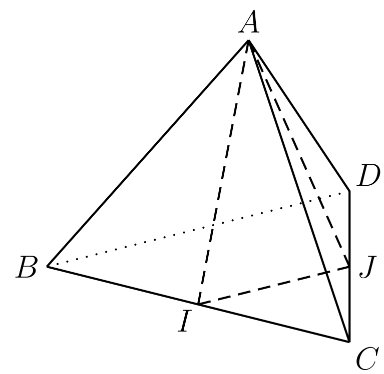
1. $\|\vec{u}\| = 2$, $\|\vec{v}\| = 3$ et $\vec{u}\cdot\vec{v} = 3\sqrt{3}$.
2. $\|\vec{u}\| = 1$, $\|\vec{v}\| = 3$ et $\vec{u}\cdot\vec{v} = -3$.

Exercice 5.6. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace. Dans chaque cas calculer $(\vec{u}\,;\vec{v})$.

1. $\|\vec{u}\| = 3$, $\|\vec{v}\| = 4$ et $\|\vec{u}+\vec{v}\| = \sqrt{13}$.
2. $\|\vec{u}\| = 2$, $\|\vec{v}\| = 3$ et $\|\vec{u}+\vec{v}\| = \sqrt{13+6\sqrt{2}}$.

Exercice 5.7. Soit $ABCD$ un tétraèdre régulier (chaque face est un triangle équilatéral) d'arête 6. I et J sont les milieux des arêtes respectives $[BC]$ et $[CD]$.

1. Calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}$ puis AI et AJ.
2. Calculer $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{AJ}$ en utilisant les égalités $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AJ}$.
3. En déduire la mesure, en degré, de l'angle $\widehat{IAJ}$. Arrondir au dixième.



Exercice 5.8. [Démonstration] Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace. Montrer que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $(\vec{u}\,;\vec{u}) = 0[2\pi]$ ou $(\vec{u}\,;\vec{u}) = \pi[2\pi]$. *Indication :* on pourra calculer $\vec{u}\cdot\vec{v}$ de deux façons différentes.

Orthogonalité

Exercice 5.9. [Logique] Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, trois vecteurs de l'espace. Dans chaque cas, indiquer si les propositions (a) et (b) sont équivalentes ou si l'une implique l'autre et le démontrer.

1. (a) $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$.
   (b) $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$.
2. (a) $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont deux à deux orthogonaux.
   (b) $\|\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + \|\vec{w}\|^2$.
3. (a) $|\vec{u}\cdot\vec{v}| = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|$.
   (b) $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Repère orthonormé

Exercice 5.10. L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k}\right)$. On suppose que l'on a :

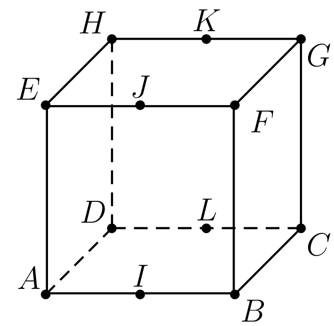
$$\vec{u} = \frac{1}{9}\left(4\vec{i} - 4\vec{j} + 7\vec{k}\right), \quad \vec{v} = \frac{1}{9}\left(8\vec{i} + \vec{j} - 4\vec{k}\right) \quad \text{et} \quad \vec{w} = \frac{1}{9}\left(-\vec{i} - 8\vec{j} - 4\vec{k}\right).$$

Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ forment-ils une base orthonormée ?

Position relatives

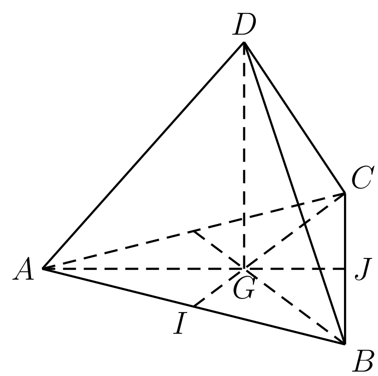
Exercice 5.11. Soit le cube $ABCDEFGH$ le cube ci-dessous et les points I, J, K et L les milieux respectifs des arêtes $[AB]$, $[EF]$, $[GH]$ et $[DC]$.

1. Montrer que la droite (FH) est orthogonale au plan (AEC).
2. Déterminer graphiquement si le plan et la droite donnés sont orthogonaux :
   (a) (DCG) et (IL).
   (b) (ABF) et (HJ).
   (c) (EFC) et (KI).
   (d) (ABC) et (DK).
3. Déterminer si les deux droites sont orthogonales.
   (a) (IK) et (JL).
   (b) (JH) et (DH).
   (c) (HG) et (IL).
   (d) (JC) et (KB).



Exercice 5.12. $ABCD$ est un tétraèdre régulier. On note G le centre de gravité du triangle ABC, i.e. le point tel que $\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG} = \vec{0}$. I et J sont les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[BC]$. Démontrer que :

1. les droites (AJ) et (BC) sont perpendiculaires ;
2. les droites (DJ) et (BC) sont perpendiculaires ;
3. la droite (BC) est orthogonale au plan (ADJ) ;
4. la droite (AB) est orthogonale au plan (DCI) ;
5. la droite (DG) est orthogonale au plan (ABC).



Produit scalaire dans un repère orthonormé

Exercice 5.13. Calculer la norme des vecteurs suivants dans l'espace muni d'un repère orthonormé.

1. $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\7\\3\end{pmatrix}$.
2. $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\2\\-2\end{pmatrix}$.
3. $\vec{w}\begin{pmatrix}-\sqrt{3}\\7\\\sqrt{2}\end{pmatrix}$.
4. $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}$.

Exercice 5.14. L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k}\right)$. Soit le vecteur $\vec{u}$ de l'espace tel que $\vec{u} = -5\vec{i} + \vec{j}$. Dans chaque cas, déterminer, si elles existent, les valeurs des réels x, y et z tels que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient orthogonaux.

1. $\vec{v}\begin{pmatrix}x\\10\\3\end{pmatrix}$.
2. $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\1\\z\end{pmatrix}$.
3. $\vec{v}\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\5\sqrt{2}\\z\end{pmatrix}$.
4. $\vec{v}\begin{pmatrix}x\\y\\9\end{pmatrix}$.
5. $\vec{v}\begin{pmatrix}x\\3\\z\end{pmatrix}$.

Exercice 5.15. Soit $\mathscr{D}_1$ de vecteur directeur $\vec{d_1}\begin{pmatrix}7\\5\\3\end{pmatrix}$ et $\mathscr{D}_2$ la droite de vecteur directeur $\vec{d_2}\begin{pmatrix}-4\\5\\1\end{pmatrix}$ dans l'espace muni d'un repère orthonormé. En calculant $\vec{d_1}\cdot\vec{d_2}$, montrer que $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ sont orthogonales.

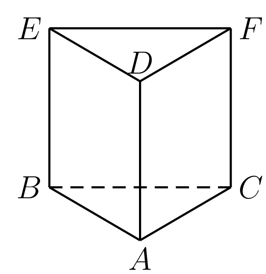
Exercice 5.16. On considère le cube $ABCDEFGH$ d'arête de longueur 1. L'espace est muni du repère orthonormé $\left(A\,;\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AD}\,;\overrightarrow{AE}\right)$. Le point I est le milieu du segment $[EF]$, K le centre du carré $ADHE$ et O le milieu du segment $[AG]$.

1. Donner, sans justification, les coordonnées des points A, B, et G.
2. On admet que les points I et K ont pour coordonnées $I\left(\frac{1}{2}\,;0\,;1\right)$ et $K\left(0\,;\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\right)$. Démontrer que la droite (BK) est orthogonale au plan (AIG).

Exercice 5.17. Soient $A\,(2\,;4\,;2)$, $B\,(-4\,;1\,;2)$, $C\,(0\,;3\,;8)$, $D\,(2\,;-1\,;6)$ et $H\,(-1\,;1\,;5)$ cinq points de l'espace muni d'un repère orthonormé.

1. Montrer que B, C et D définissent un plan.
2. (a) Montrer que H appartient au plan (BCD).
   (b) Montrer que la droite (AH) est orthogonale au plan (BCD).
3. On note I le milieu de $[CD]$.
   (a) Montrer que (BI) et (CD) sont perpendiculaires.
   (b) Calculer l'aire du triangle BCD.
4. Calculer le volume du tétraèdre $ABCD$.

Exercice 5.18. $ABCDEF$ est un prisme droit à base triangulaire ABC tel que $A\,(-2\,;4\,;-1)$, $B\,(3\,;-4\,;5)$, $C\,(8\,;0\,;2)$ et $D\,(-6\,;19\,;19)$ dans l'espace muni d'un repère orthonormé.



1. Montrer que ABC est isocèle en A.
2. Calculer l'aire du triangle ABC.
3. En déduire le volume du prisme $ABCDEF$.

Exercice 5.19. Soient $A\,(1\,;-3\,;3)$, $B\,(4\,;2\,;-1)$ et $C\,(-2\,;-2\,;3)$ trois points dans l'espace muni d'un repère orthonormé. Montrer que ces trois points sont sur une sphère de centre $D\,(1\,;2\,;3)$ et de rayon à déterminer.

Vecteur normal

Exercice 5.20. En reprenant la figure de l'exercice 5.11, donner un vecteur normal à chacun des plans :

1. (ABC) ;
2. (KGL) ;
3. (ADG) ;
4. (CBE).

Exercice 5.21. Soient $A\,(4\,;-2\,;1)$ et $B\,(-1\,;2\,;2)$ deux points dans l'espace muni d'un repère orthonormé. Le plan $\mathscr{P}$ passe par A et est dirigé par les vecteurs $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}$.

1. Déterminer les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$.
2. (a) Calculer $\vec{v}\cdot\vec{AB}$ et $\vec{w}\cdot\vec{AB}$.
   (b) Que peut-on en déduire pour la droite (AB) et le plan $\mathscr{P}$?

Exercice 5.22. Soit $\mathscr{P}$ le plan passant par $A\,(1\,;1\,;1)$ et dirigé par les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\3\\-5\end{pmatrix}$ dans l'espace muni d'un repère orthonormé. Le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ est-il un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$?

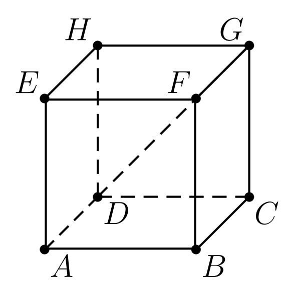
Exercice 5.23. $A\,(0\,;1\,;-1)$, $B\,(3\,;-2\,;0)$ et $C\,(3\,;-2\,;2)$ sont des points dans l'espace muni d'un repère orthonormé.

1. Montrer que A, B et C définissent un plan.
2. Déterminer un vecteur normal au plan (ABC).

Projeté orthogonal sur une droite

Exercice 5.24. $ABCDEFGH$ est un cube d'arête 1.

1. Déterminer la nature du triangle EDG.
2. En déduire les coordonnées du projeté orthogonal du point E sur la droite (DG) dans le repère orthonormé $\left(A\,;\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AD}\,;\overrightarrow{AE}\right)$.
3. Calculer la distance du point E à la droite (DG).



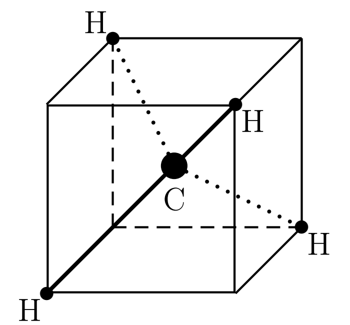
Projeté orthogonal sur un plan

Exercice 5.25. $A\left(1\,;-\sqrt{3}\,;0\right)$, $B\left(1\,;\sqrt{3}\,;0\right)$, $C\,(-2\,;0\,;0)$ et $D\left(0\,;0\,;2\sqrt{2}\right)$ sont des points dans l'espace muni d'un repère orthonormé.

1. Montrer que A, B, C et D ne sont pas coplanaires.
2. Montrer que $ABCD$ est un tétraèdre régulier.
3. On définit G comme étant le centre de gravité G du triangle ABC : $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.
   (a) Calculer les coordonnées G.
   (b) Montrer que G est le projeté orthogonal de D sur (ABC).
   (c) En déduire la distance du point D au plan (ABC).
4. Calculer le volume du tétraèdre $ABCD$.

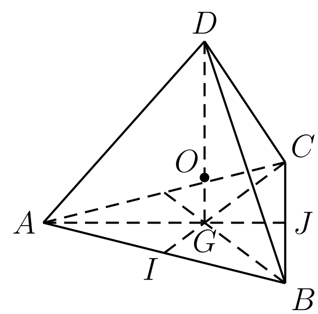
5.7.2 Approfondir

Exercice 5.26. [Chimie] On modélise la molécule de méthane CH_4 constituée d'un atome de carbone et de quatre atomes d'hydrogène H par un tétraèdre à l'intérieur d'un cube. Le noyau de carbone, au centre de la molécule, est au centre du cube. Les noyaux d'hydrogène correspondent à des sommets du cube. L'objectif de l'exercice est de déterminer l'angle entre deux liaisons carbone-hydrogène.



1. Montrer que les quatre atomes d'hydrogènes forment un tétraèdre régulier.
2. Déterminer la mesure l'angle.

Exercice 5.27. [Sphère circonscrite à un tétraèdre]
$ABCD$ est un tétraèdre régulier. On note



— G le centre de gravité du triangle ABC, i.e. le point tel que $\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG} = \vec{0}$;

— O l'isobarycentre de A, B, C et D, i.e. le point tel que $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{DO} = \vec{0}$;

— I et J les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[BC]$.

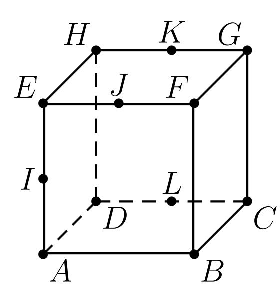
.

1. (a) Montrer que $OA^2 - OB^2 = 2\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{OI}$.
   (b) Montrer que $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{OI} = 0$ en utilisant l'exercice 5.12.
   (c) Que peut-on en déduire pour OA et OB ?
2. Démontrer que O est le milieu de la sphère circonscrite au tétraèdre $ABCD$, i.e. la sphère contenant les quatre sommets du tétraèdre.

5.7.3 S'entraîner

Produit scalaire dans l'espace

Exercice 5.28. Soit $ABCDEFGH$ un cube d'arête 2. Soient I, J, K, L les milieux respectifs des arêtes $[AB]$, $[EF]$, $[HG]$ et $[DC]$.



1. Calculer $\overrightarrow{DL} \cdot \overrightarrow{FE}$, $\overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{CG}$, et $\overrightarrow{IL} \cdot \overrightarrow{HG}$.
2. En utilisant la décomposition $\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{EH}$, calculer $\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{CG}$.
3. Calculer $\overrightarrow{IG} \cdot \overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{JL} \cdot \overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{KA} \cdot \overrightarrow{HB}$.

Exercice 5.29. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace. Dans chaque cas déterminer toutes les mesures possibles de l'angle $(\vec{u}\,;\vec{v})$.

1. $\|\vec{u}\| = 12$, $\|\vec{v}\| = \dfrac{1}{2}$ et $\vec{u}\cdot\vec{v} = 3$.
2. $\|\vec{u}\| = 4$, $\|\vec{v}\| = 2$ et $\vec{u}\cdot\vec{v} = 8$.
3. $\|\vec{u}\| = 2$, $\|\vec{v}\| = \dfrac{1}{2}$ et $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$.
4. $\|\vec{u}\| = 3$, $\|\vec{v}\| = \dfrac{1}{6}$ et $\vec{u}\cdot\vec{v} = -\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

Exercice 5.30. Compléter le tableau ci-dessous.

$\vec{u}\cdot\vec{v}$	$\|\vec{u}\|$	$\|\vec{v}\|$	$\|\vec{u}+\vec{v}\|$	$\|\vec{u}-\vec{v}\|$
	3	2	4	
5	2			$\sqrt{3}$
8	3	4		

Exercice 5.31. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace. Dans chaque cas calculer $(\vec{u}\,;\vec{v})$.

1. $\|\vec{u}\| = 3$, $\|\vec{v}\| = 4$ et $\|\vec{u}+\vec{v}\| = 5$.
2. $\|\vec{u}\| = 2$, $\|\vec{v}\| = 3$ et $\|\vec{u}-\vec{v}\| = 1$.

Exercice 5.32. Soit $ABCDEFGH$ un cube d'arête 1.

1. Déterminer la mesure de l'angle $\widehat{EDG}$ sans utiliser le produit scalaire.
2. En déduire $\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{DG}$.

Repère orthonormé

Exercice 5.33. L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k}\right)$. On suppose que l'on a :

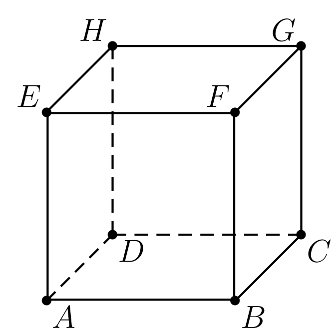
$$\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\vec{i}-\vec{j}\right), \quad \vec{v} = -\vec{k} \quad \text{et} \quad \vec{w} = -\frac{1}{\sqrt{6}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{6}}\vec{j} + \sqrt{\frac{2}{3}}\vec{k}.$$

Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ forment-ils une base orthonormée ?

Produit scalaire dans un repère orthonormé

Exercice 5.34. $ABCDEFGH$ est un cube d'arête 1. On se place dans le repère orthonormé $\left(A\,;\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AD}\,;\overrightarrow{AE}\right)$.

1. Quelles sont dans ce repère les coordonnées des 8 sommets du cube ?
2. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AG}$.
3. En déduire la valeur de $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AG}$.
4. Calculer $\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{CE}$.
5. Les vecteurs $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{BH}$ sont-ils orthogonaux ? Justifier par un calcul.
6. Soit I le milieu de $[AB]$, J le point défini par $\overrightarrow{EJ} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{EH}$, et K le centre de la face $BCGF$. Donner les coordonnées des points I, J et K dans le repère puis calculer $\overrightarrow{IJ}\cdot\overrightarrow{DK}$.



Exercice 5.35. L'espace est rapporté à un repère orthonormé où l'on considère les points $A\,(2\,;-1\,;0)$, $B\,(1\,;0\,;-3)$ et $C\,(6\,;6\,;1)$.

1. Démontrer que le triangle ABC est rectangle en A.
2. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$ puis les longueurs BA et BC.
3. En déduire la mesure en degrés de l'angle $\widehat{ABC}$ arrondie au degré.

Exercice 5.36. Soient $A\,(1\,;-2\,;7)$, $B\,(3\,;-1\,;10)$ et $C\,(-4\,;5\,;8)$ trois points dans l'espace muni d'un repère orthonormé. Les droites (AB) et (AC) sont-elles parallèles ? Orthogonales ?

Exercice 5.37. Soient $A\,(-1\,;1\,;6)$, $B\,(2\,;-3\,;1)$ et $C\,(1\,;-2\,;2)$ trois points de l'espace muni d'un repère orthonormé.

1. Montrer que A, B et C définissent un plan.
2. Soit $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\4\\-2\end{pmatrix}$ un vecteur de l'espace. Montrer que la droite $\mathscr{D}$ passant par le point A et de vecteur directeur $\vec{n}$ est orthogonale au plan (ABC).

Vecteur normal

Exercice 5.38. $A\,(1\,;0\,;1)$, $B\,(-2\,;0\,;3)$ et $C\,(0\,;1\,;2)$ sont des points dans l'espace muni d'un repère orthonormé.

1. Montrer que A, B et C définissent un plan.
2. Déterminer un vecteur normal au plan (ABC).

5.7.4 Le Flashback !

Flashback 5.1. [Formes indéterminées] Étudier la limite de chaque suite.

1. $a_n = \dfrac{3n^2+4}{2n+2}$.
2. $b_n = \dfrac{2n-4}{7-3n}$.
3. $c_n = \dfrac{4-5n}{2n^2+1}$.

Flashback 5.2. Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = u_n \times \mathrm{e}^{-u_n}.$$

1. Démontrer par récurrence que tous les termes de la suite sont positifs.
2. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).
3. En déduire que (u_n) est convergente.