Chapitre 8

Géométrie analytique

8.1 Représentation paramétrique d'une droite

8.1.1 Représentation paramétrique d'une droite

Soit $\left(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k}\right)$ un repère de l'espace.

Proposition 8.1. *Soit un point $A\left(x_A\,;y_A\,;z_A\right)$ appartenant à une droite $\mathscr{D}$ de vecteur directeur $\vec{d}\begin{pmatrix} x_{\vec{d}} \\ y_{\vec{d}} \\ z_{\vec{d}} \end{pmatrix}$. $M\left(x\,;y\,;z\right)$ appartient à la droite $\mathscr{D}$ si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que*

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & x_A + \lambda x_{\vec{d}} \\ y & = & y_A + \lambda y_{\vec{d}} \\ z & = & z_A + \lambda z_{\vec{d}} \end{array}\right. .$$

Remarque : cela pourrait se traduire par $M = A + \lambda\vec{d}$ coordonnée par coordonnée.

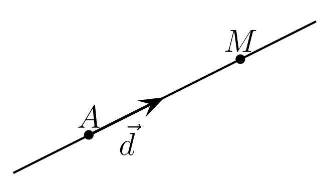
Démonstration. $M \in \mathscr{D}$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{d}$ sont colinéaires si et seulement si il existe un réel λ tel que $\overrightarrow{AM} = \lambda\vec{d}$. Or $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \\ z - z_A \end{pmatrix}$ donc $M \in \mathscr{D}$ si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\left\{\begin{array}{rcl} x - x_A & = & \lambda x_{\vec{d}} \\ y - y_A & = & \lambda y_{\vec{d}} \\ z - z_A & = & \lambda z_{\vec{d}} \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & x_A + \lambda x_{\vec{d}} \\ y & = & y_A + \lambda y_{\vec{d}} \\ z & = & z_A + \lambda z_{\vec{d}} \end{array}\right. .$$

□

Définition 8.1. *Le système d'équations*

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & x_A + \lambda x_{\vec{d}} \\ y & = & y_A + \lambda y_{\vec{d}} \\ z & = & z_A + \lambda z_{\vec{d}} \end{array}\right. , \quad \lambda \in \mathbb{R}$$



*est appelé **représentation paramétrique** de la droite $\mathscr{D}$.*

Remarque : Il existe une infinité de représentation graphique (en fonction du choix du point et du vecteur directeur) mais elles sont toutes équivalentes.

Exemple : Soient un repère $\left(0\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k}\right)$ et les points $A\,(1\,;-3\,;1)$, $B\,(-1\,;1\,;4)$, $C\,(5\,;-11\,;-5)$ et $D\,(2\,;4\,;2)$. Déterminons l'équation paramétrique de (AB) puis si C et D y appartiennent.

1. On commence par déterminer les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$:

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix} \Longrightarrow \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

   Comme $A \in (AB)$, d'après la propriété, la droite a pour représentation paramétrique

$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 1+-2\lambda \\ y &=& -3+4\lambda \\ z &=& 1+3\lambda \end{array}\right. , \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

2. — Pour vérifier si C appartient à la droite (AB) on regarde s'il est possible de trouver un réel λ tel que les coordonnées de C soient solutions du système. Pour $C\,(5\,;-11\,;-5)$, on a :

$$\left\{\begin{array}{rcl} 5 &=& 1-2\lambda \\ -11 &=& -3+4\lambda \\ -5 &=& 1+3\lambda \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} \lambda &=& -2 \\ \lambda &=& -2 \\ \lambda &=& -2 \end{array}\right. .$$

   Le système est compatible (c'est-à-dire qu'il admet une unique solution) donc le point C appartient à la droite (AB).

   — Pour $D\,(2\,;4\,;2)$, on a :

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2 &=& 1-2\lambda \\ 4 &=& -3+4\lambda \\ 2 &=& 1+3\lambda \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} \lambda &=& -1/2 \\ \lambda &=& 7/4 \\ \lambda &=& 1/3 \end{array}\right. .$$

   Le système n'est pas compatible, il n'admet aucune solution, donc le point D n'appartient pas à la droite (AB).

Exercices : 8.1 à 8.3 ; 8.26.

8.1.2 Positions relatives de droites

Méthode pour déterminer deux droites sont sécantes à partir de leur représentation paramétrique : Soient $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ deux droites de représentations paramétriques :

$$\mathscr{D} : \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & x_A + \lambda x_{\vec{d}} \\ y & = & y_A + \lambda y_{\vec{d}} \\ z & = & z_A + \lambda z_{\vec{d}} \end{array} \right. , \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad \text{et} \quad \mathscr{D}' : \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & x_{A'} + \lambda' x_{\vec{d'}} \\ y & = & y_{A'} + \lambda' y_{\vec{d'}} \\ z & = & z_{A'} + \lambda' z_{\vec{d'}} \end{array} \right. , \quad \lambda' \in \mathbb{R}.$$

$\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont sécantes si et seulement si le système ci-dessous admet une solution :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_A + \lambda x_{\vec{d}} & = & x_{A'} + \lambda' x_{\vec{d'}} \\ y_A + \lambda y_{\vec{d}} & = & y_{A'} + \lambda' y_{\vec{d'}} \\ z_A + \lambda z_{\vec{d}} & = & z_{A'} + \lambda' z_{\vec{d'}} \end{array} \right. .$$

1. Si le système est incompatible, alors $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ ne sont pas sécantes.
2. Si le système conduit à une égalité du type « $0 = 0$ », $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont confondues.
3. Si le système admet un unique couple solution $(\lambda\,;\lambda')$ alors $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont sécantes et on obtient les coordonnées de leur point d'intersection en injectant la valeur de λ dans la représentation paramétrique de $\mathscr{D}$ (ou λ' avec $\mathscr{D}'$).

Exemple : Déterminons un éventuel point d'intersection des droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ dont les représentations paramétriques dans un repère de l'espace sont respectivement :

$$\mathscr{D} : \left\{ \begin{array}{l} x = 9 + \lambda \\ y = -1 + 2\lambda \\ z = -3\lambda \end{array} \right. , \quad \lambda \in \mathbb{R} \qquad \text{et} \qquad \mathscr{D}' : \left\{ \begin{array}{l} x = \lambda' \\ y = 2 - \lambda' \\ z = -1 + \lambda' \end{array} \right. , \quad \lambda' \in \mathbb{R}$$

On a :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 9 + \lambda & = & \lambda' \\ -1 + 2\lambda & = & 2 - \lambda' \\ -3\lambda & = & -1 + \lambda' \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcll} 9 + \lambda & = & \lambda' & (L_1) \\ -1 + 2\lambda & = & 2 - \lambda' & (L_2) \\ -3\lambda & = & -1 + \lambda' & \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcll} 9 + \lambda & = & \lambda' & (L_1) \\ 8 + 3\lambda & = & 2 & (L_2 \leftarrow L_2 + L_1) \\ -3\lambda & = & -1 + \lambda' & \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcl} \lambda' & = & 7 \\ \lambda & = & -2 \\ -3 \times (-2) & = & -1 + 7 \end{array} \right. .$$

Le système est compatible et donc $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont sécantes. On obtient les coordonnées du point d'intersection :

$$\lambda = -2 \implies \left\{ \begin{array}{l} x = 9 + (-2) \\ y = -1 + 2 \times (-2) \\ z = -3 \times (-2) \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} x = 7 \\ y = -5 \\ z = 6 \end{array} \right. .$$

Les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont sécantes au point de coordonnées $(7\,;-5\,;6)$.

Méthode pour déterminer les coordonnées du projeté orthogonal d'un point sur une droite : Soient $\mathscr{D}$ de représentation paramétrique donnée ci-dessous et P un point dans un repère orthonormé de l'espace.

$$\mathscr{D} : \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & x_A + \lambda x_{\vec{d}} \\ y & = & y_A + \lambda y_{\vec{d}} \\ z & = & z_A + \lambda z_{\vec{d}} \end{array} \right. , \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

On note H le projeté orthogonal de P sur $\mathscr{D}$.

1. Énoncer que $H \in \mathscr{D}$ donc qu'il existe $\lambda_H \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\mathscr{D} : \left\{ \begin{array}{rcl} x_H & = & x_A + \lambda_H x_{\vec{d}} \\ y_H & = & y_A + \lambda_H y_{\vec{d}} \\ z_H & = & z_A + \lambda_H z_{\vec{d}} \end{array} \right. , \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

2. Énoncer que H est le projeté orthogonal de P sur $\mathscr{D}$ donc que $\vec{d}$ et $\overrightarrow{HP}$ sont orthogonaux et, puisque l'on est dans un repère orthonormé, que $\vec{d} \cdot \overrightarrow{HP} = 0$.
3. Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{HP}$ à l'aide des expressions de x_H, y_H et z_H données par la représentation paramétrique.
4. Résoudre l'équation $\vec{d} \cdot \overrightarrow{HP} = 0$ dont λ_H est solution.
5. Injecter la valeur de λ_H trouvée dans l'équation paramétrique afin de trouver les coordonnées de H.

Exemple : Dans un repère orthonormé de l'espace. Considérons la droite $\mathscr{D}$ passant par le point $A\,(1\,;0\,;2)$ et de vecteur directeur $\vec{d}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$. Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal du point $B\,(-1\,;2\,;4)$ sur la droite $\mathscr{D}$.

Une représentation paramétrique de $\mathscr{D}$ est :

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 1 + 2\lambda \\ y = -\lambda \\ z = 2 - 3\lambda \end{array} \right. , \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

1. Notons $H\,(x_H\,;y_H\,;z_H)$ le projeté orthogonal de B sur la droite $\mathscr{D}$. $H \in \mathscr{D}$ donc il existe $\lambda_H \in \mathbb{R}$ tel que
$$\left\{ \begin{array}{l} x_H = 1 + 2\lambda_H \\ y_H = -\lambda_H \\ z_H = 2 - 3\lambda_H \end{array} \right. .$$
2. H est le projeté orthogonal de B sur $\mathscr{D}$ donc $\overrightarrow{BH}$ et $\vec{d}$ sont orthogonaux, et donc, puisque l'on est dans un repère orthonormé, $\overrightarrow{BH} \cdot \vec{d} = 0$.

3. On a $\overrightarrow{BH}\begin{pmatrix} x_H - x_B \\ y_H - y_B \\ z_H - z_B \end{pmatrix} \implies \overrightarrow{BH}\begin{pmatrix} 2\lambda_H + 2 \\ -\lambda_H - 2 \\ 3\lambda_H - 2 \end{pmatrix}$.
4. On a :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BH} \cdot \vec{d} = 0 &\iff x_{\overrightarrow{BH}} \times x_{\vec{d}} + y_{\overrightarrow{BH}} \times y_{\vec{d}} + z_{\overrightarrow{BH}} \times z_{\vec{d}} = 0 \\ &\iff (2\lambda_H + 2) \times 2 + (-\lambda_H - 2) \times (-1) + (3\lambda_H - 2) \times (-3) = 0 \\ &\iff -4\lambda_H + 12 = 0 \\ &\iff \lambda_H = 3. \end{aligned}$$

5. Enfin,

$$\lambda = 3 \implies \begin{cases} x_H = 1 + 2 \times 3 \\ y_H = -3 \\ z_H = 2 - 3 \times 3 \end{cases} \iff \begin{cases} x_H = 7 \\ y_H = -3 \\ z_H = -7 \end{cases}.$$

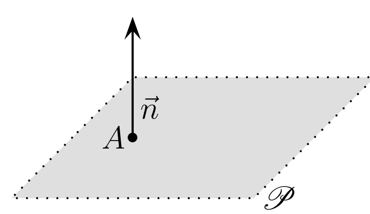
Le projeté orthogonal de B sur la droite $\mathscr{D}$ a pour coordonnées $(7\,;-3\,;-7)$.

Exercices : 8.4 à 8.7 ; 8.27 à 8.29.

8.2 Équation cartésienne de plan

8.2.1 Équation cartésienne de plan

Proposition 8.2. *On considère un repère orthonormé de l'espace. Soit $\mathscr{P}$ le plan passant par le point $A\,(x_A\,;y_A\,;z_A)$ de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. Alors il existe $d \in \mathbb{R}$ tel que $\mathscr{P}$ admette pour équation cartésienne :*



$$ax + by + cz + d = 0.$$

Démonstration. Soit $M\,(x\,;y\,;z)$ un point de l'espace. $M \in \mathscr{P}$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux, et comme le repère est orthonormé, si et seulement si leur produit scalaire est nul :

$$\begin{aligned} M \in \mathscr{P} &\iff \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0 \\ &\iff x_{\overrightarrow{AB}} \times x_{\vec{n}} + y_{\overrightarrow{AB}} \times y_{\vec{n}} + z_{\overrightarrow{AB}} \times z_{\vec{n}} = 0 \\ &\iff (x - x_A) \times a + (y - y_A) \times b + (z - z_A) \times c = 0 \\ &\iff ax - ax_A + by - by_A + cz - cz_A = 0 \\ &\iff ax + by + cz + (-ax_A - by_A - cz_A) = 0 \\ &\iff ax + by + cz + d = 0 \quad (\text{où } d = -ax_A - by_A - cz_A). \end{aligned}$$

$\square$

Remarque : Un plan possède une infinité d'équations cartésiennes.

Exemple : On considère un repère orthonormé de l'espace et le plan $\mathscr{P}$ d'équation cartésienne : $-x+2y+z=0$. Déterminons un vecteur normal à $\mathscr{P}$ puis si le point $A\,(1\,;2\,;3)$ appartient à ce plan.

1. Un vecteur normal à $\mathscr{P}$ a pour coordonnées $\vec{n}\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$.
2. $-x_A+2y_A+z_A=-1+2\times 2+3=-1+4+3=6\neq 0$ donc $A\notin\mathscr{P}$.

Exemple : On considère un repère orthonormé de l'espace. Déterminons une équation cartésienne du plan passant par le point $A\,(-2\,;3\,;1)$ et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$.

$\vec{n}$ est normal à $\mathscr{P}$ donc il existe $d\in\mathbb{R}$ tel que $\mathscr{P}$ ait pour équation cartésienne :

$$x_{\vec{n}}\times x+y_{\vec{n}}\times y+z_{\vec{n}}\times z+d=0 \iff -x+2y+z+d=0.$$

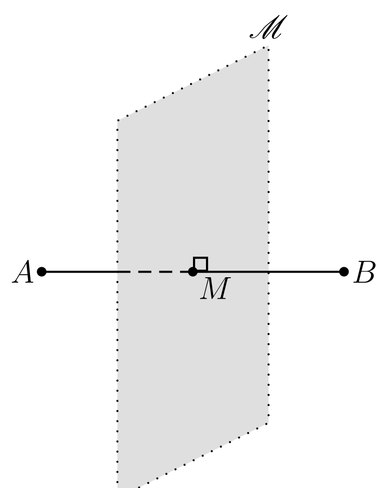
Par ailleurs,

$$A\in\mathscr{P} \iff -x_A+2y_A+z_A+d=0 \iff -(-2)+2\times 3+1+d=0 \iff d=-9.$$

Une équation cartésienne de $\mathscr{P}$ est alors : $-x+2y+z-9=0$.

Définition 8.2. *Dans l'espace, on appelle* ***plan médiateur*** *du segment $[AB]$ l'ensemble des points équidistants à A et B.*

Proposition 8.3. *Soient A et B deux points de l'espace. Le plan médiateur de $[AB]$ est le plan $\mathscr{M}$ orthogonal à la droite (AB) tel que le milieu de $[AB]$ appartienne à $\mathscr{M}$.*



Méthode pour déterminer une équation cartésienne d'un plan médiateur à un segment $[AB]$:

1. Énoncer que (AB) et $\mathscr{M}$ sont orthogonaux, donc que $\overrightarrow{AB}$ est normal à $\mathscr{M}$.
2. Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$. En déduire la forme de l'équation cartésienne.
3. Énoncer que le milieu M de $[AB]$ appartient à $\mathscr{M}$. Calculer ses coordonnées.
4. En déduire l'équation cartésienne de $\mathscr{M}$.

Exemple : On munit l'espace d'un repère orthonormal $\left(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k}\right)$ et on considère les points $A\,(4\,;0\,;-3)$ et $B\,(2\,;2\,;2)$. Déterminons une équation cartésienne du plan médiateur $\mathscr{M}$ du segment $[AB]$.

1. (AB) et $\mathscr{M}$ sont orthogonaux donc $\overrightarrow{AB}$ est normal à $\mathscr{M}$
2. On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\2\\5\end{pmatrix}$. Il existe donc $d \in \mathbb{R}$ tel que $\mathscr{M}$ ait pour équation cartésienne
$$-2x+2y+5z+d=0.$$
3. Par définition, le milieu M de $[AB]$ appartient à $\mathscr{M}$ et a pour coordonnées :
$$M\left(\frac{x_A+x_B}{2}\,;\frac{y_A+y_B}{2}\,;\frac{z_A+z_B}{2}\right) \implies M\left(\frac{4+2}{2}\,;\frac{0+2}{2}\,;\frac{-3+2}{2}\right) \implies M\left(3\,;1\,;-\frac{1}{2}\right).$$
4. Comme $M \in \mathscr{M}$, on a
$$-2x_M+2y_M+5z_M+d=0 \iff -2\times 3+2\times 1+5\times\left(-\frac{1}{2}\right)+d=0 \iff d=6,5.$$
Une équation cartésienne du plan médiateur $\mathscr{M}$ du segment $[AB]$ est $-2x+2y+5z+6,5=0$.

Exercices : 8.8 à 8.12 ; 8.30 à 8.32.

8.2.2 Positions relatives de plans

Proposition 8.4. ***[Admis]*** *Deux plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont parallèles si et seulement si leurs vecteurs normaux respectifs $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ sont colinéaires.*

Remarque : Par contraposée de la proposition précédente, les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont sécants si et seulement si les vecteurs $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ ne sont pas colinéaires.

Méthode pour déterminer la position relative de deux plans et leur éventuelle intersection : Soient $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ deux plans.

1. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$, vecteurs normaux de $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$. Vérifier s'ils sont colinéaires.
2. Si oui, $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont parallèles. Sinon, leur intersection est une droite $\mathscr{D}$; on trouve sa représentation paramétrique de la façon suivante :
   (a) Écrire le système composée des équations cartésiennes de $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$.
   (b) Choisir une variable (par exemple z) et exprimer les deux autres en fonction de celle-ci (x et y donc).
   (c) Poser la variable choisie en paramètre λ ($z=\lambda$) afin d'obtenir la représentation paramétrique de $\mathscr{D}$.

Exemples : Soient $\mathscr{P}_1$, $\mathscr{P}_2$ et $\mathscr{P}_3$ trois plans d'équations cartésiennes :

$$\mathscr{P}_1 : 2x+4y-z+1=0, \quad \mathscr{P}_2 : 4x+8y-2z-4=0 \quad \text{et} \quad \mathscr{P}_3 : x+3y-z-1=0.$$

1. $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ ont pour vecteurs normaux respectifs $\vec{n_1}\begin{pmatrix}2\\4\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{n_2}\begin{pmatrix}4\\8\\-2\end{pmatrix}$ qui sont clairement colinéaires ($\vec{n_2}=2\vec{n_1}$) donc $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont parallèles.
2. $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_3$ ont pour vecteurs normaux respectifs $\vec{n_1}\begin{pmatrix}2\\4\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{n_3}\begin{pmatrix}1\\3\\-1\end{pmatrix}$ qui sont clairement non colinéaires donc $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_3$ sont sécants. Leur intersection est une droite $\mathscr{D}$, déterminons sa représentation paramétrique. $M\,(x\,;y\,;z) \in \mathscr{D} = \mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2$ si et seulement si

$$\begin{aligned}
\left\{\begin{array}{rcl} 2x+4y-z+1 & = & 0\ (L_1) \\ x+3y-z-1 & = & 0\ (L_2) \end{array}\right.
&\iff \left\{\begin{array}{rcl} x+y+2 & = & 0\ (L_1 \leftarrow L_1 - L_2) \\ x+3y-z-1 & = & 0\ (L_2) \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -2-y \\ z & = & x+3y-1 \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -2-y \\ z & = & -2-y+3y-1 \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -2-y \\ z & = & -3+2y \end{array}\right. .
\end{aligned}$$

Posons $y=\lambda$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$. Le dernier système devient alors

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & -2-\lambda \\ y & = & \lambda \\ z & = & -3+2\lambda \end{array}\right. .$$

On a ainsi obtenu la représentation paramétrique de $\mathscr{D}$. Elle est dirigée par le vecteur $\vec{d}\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$ et passe par le point $A\,(-2\,;0\,;-3)$ dont on peut vérifier qu'il appartient bien aux plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$.

Exercices : 8.13 et 8.14 ; 8.33.

8.2.3 Positions relatives de plans et de droites

Méthode pour déterminer le point d'intersection d'une droite et d'un plan : Soient Soient $\mathscr{D}$ une droite et $\mathscr{P}$ un plan.

1. Injecter les expressions de la représentation paramétrique de $\mathscr{D}$ dans l'équation cartésienne de $\mathscr{P}$ et résoudre l'équation obtenue dont λ est solution.
2. Injecter la valeur de λ obtenue dans la représentation paramétrique de $\mathscr{D}$ afin d'obtenir les coordonnées du point d'intersection.

Exemple : Considérons, dans un repère orthonormé, la droite $\mathscr{D}$ de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 1 - 2\lambda \\ y = 4\lambda \\ z = -2 + \lambda \end{cases}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

et le plan $\mathscr{P}$ d'équation cartésienne : $3x - y + 2z - 3 = 0$. Déterminons si $\mathscr{D}$ et $\mathscr{P}$ sont parallèles et sinon, l'éventuel point d'intersection de $\mathscr{D}$ et de $\mathscr{P}$.

$\mathscr{D}$ a pour vecteur directeur $\vec{d}\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\mathscr{P}$ a pour vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. $\mathscr{D}$ et $\mathscr{P}$ sont parallèles si et seulement si $\vec{n}$ et $\vec{d}$ sont orthogonaux, et puisque le repère est orthonormé, si et seulement si leur produit scalaire est nul.

$$\begin{aligned} \vec{d} \cdot \vec{n} &= x_{\vec{d}} \times x_{\vec{n}} + y_{\vec{d}} \times y_{\vec{n}} + z_{\vec{d}} \times z_{\vec{n}} \\ &= -2 \times 3 + (-1) \times (-1) + 1 \times 2 \\ &= -3 \\ &\neq 0. \end{aligned}$$

$\mathscr{D}$ et $\mathscr{P}$ ne sont donc pas parallèles.

1. $\mathscr{D}$ et $\mathscr{P}$ étant sécants, ils ont un point d'intersection $I\,(x_I\,;y_I\,;z_I)$. Il existe alors $\lambda_I \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\begin{cases} 3x_I - y_I + 2z_I - 3 = 0 \\ x_I = 1 - 2\lambda_I \\ y_I = 4\lambda_I \\ z_I = -2 + \lambda_I \end{cases}.$$

On en déduit que

$$3(1 - 2\lambda_I) - 4\lambda_I + 2(-2 + \lambda_I) - 3 = 0 \iff \lambda_I = -\frac{1}{2}.$$

2. Enfin,

$$\lambda_I = -\frac{1}{2} \implies \begin{cases} x_I = 1 - 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) \\ y_I = 4 \times \left(-\frac{1}{2}\right) \\ z_I = -2 + \left(-\frac{1}{2}\right) \end{cases} \iff \begin{cases} x_I = 1 + 1 \\ y_I = -2 \\ z_I = -2 - \frac{1}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} x_I = 2 \\ y_I = -2 \\ z_I = -\frac{5}{2} \end{cases}.$$

Le point d'intersection I de $\mathscr{D}$ et de $\mathscr{P}$ a pour coordonnées $\left(2\,;-2\,;-\dfrac{5}{2}\right)$.

Méthode pour déterminer les coordonnées du projeté orthogonal d'un point sur un plan : Soient A un point et $\mathscr{P}$ un plan dans un repère orthonormé de l'espace. On note H le projeté orthogonal de A sur $\mathscr{P}$.

1. Lire les coordonnées d'un vecteur normal $\vec{n}$ à $\mathscr{P}$ sur son équation cartésienne.
2. Énoncer que (AH) est orthogonale à $\mathscr{P}$ et donc que $\vec{n}$ est directeur de (AH) et en déduire une représentation paramétrique de (AH).
3. Remarquer que H est le point d'intersection de (AH) et $\mathscr{P}$ et déterminer ses coordonnées à l'aide de la méthode précédente.

Exemple : Soient $\mathscr{P}$ le plan d'équation cartésienne $x-2y+3z-17=0$ et A le point de l'espace de coordonnées $(2\,;5\,;-1)$ dans un repère orthonormé. Déterminons les coordonnées du point H projeté orthogonal du point A sur le plan $\mathscr{P}$.

1. D'après l'équation cartésienne de $\mathscr{P}$, le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$ est normal à $\mathscr{P}$.
2. Comme H est le projeté orthogonal de A sur $\mathscr{P}$, (AH) est orthogonale à $\mathscr{P}$, donc $\vec{n}$ dirige (AH). De plus, (AH) passe par A. Ainsi, une représentation paramétrique de (AH) est :
$$\left\{\begin{array}{l} x = 2+\lambda \\ y = 5-2\lambda \\ z = -1+3\lambda \end{array}\right. \quad , \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$
3. H est le point d'intersection de (AH) et de $\mathscr{P}$. Comme $H \in (AH)$, il existe $\lambda_H \in \mathbb{R}$ tel que
$$\left\{\begin{array}{l} x_H = 2+\lambda_H \\ y_H = 5-2\lambda_H \\ z_H = -1+3\lambda_H \end{array}\right. .$$
Par ailleurs, $H \in \mathscr{P}$ donc
$$\begin{aligned} & x_H - 2y_H + 3z_H - 17 = 0 \\ \iff & (2+\lambda_H) - 2(5-2\lambda_H) + 3(-1+3\lambda_H) - 17 = 0 \\ \iff & \lambda_H = 2. \end{aligned}$$
Enfin,
$$\lambda_H = 2 \implies \left\{\begin{array}{l} x_H = 2+2 \\ y_H = 5-2\times 2 \\ z_H = -1+3\times 2 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x_H = 4 \\ y_H = 1 \\ z_H = 5 \end{array}\right. .$$
Les coordonnées du point H, projeté orthogonal du point A sur le plan $\mathscr{P}$, sont $(4\,;1\,;5)$.

Exercices : 8.15 à 8.18 ; 8.34 à 8.38.

8.3 Capacités attendues

— Déterminer une représentation paramétrique d'une droite. Reconnaître une droite donnée par une représentation paramétrique.

— Déterminer l'équation cartésienne d'un plan dont on connaît un vecteur normal et un point. Reconnaître un plan donné par une équation cartésienne et préciser un vecteur normal à ce plan.

— Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal d'un point sur un plan donné par une équation cartésienne, ou sur une droite donnée par un point et un vecteur directeur.

— Dans un cadre géométrique repéré, traduire par un système d'équations linéaires des problèmes de types suivants : décider si trois vecteurs forment une base, déterminer les coordonnées d'un vecteur dans une base, étudier une configuration dans l'espace (alignement, colinéarité, parallélisme, coplanarité, intersection et orthogonalité de droites ou de plans), etc. Dans des cas simples, résoudre le système obtenu et interpréter géométriquement les solutions.

8.4 Exercices

8.4.1 Progresser

Représentation paramétrique d'une droite

Exercice 8.1. Soit l'espace muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k}\right)$. Dans chacun des cas suivants, donner une représentation paramétrique de la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$.

1. $A\,(-1\,;2\,;5)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$.
2. $A\,(1\,;7\,;3)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}5\\1\\-1/3\end{pmatrix}$.
3. $A\,(-1\,;0\,;4)$ et $\vec{u}=\vec{k}$.

Exercice 8.2. On se place dans un repère orthonormé de l'espace. Dans chaque cas, déterminer une représentation paramétrique de la droite (AB).

1. $A\,(-1\,;5\,;3)$ et $B\,(2\,;-4\,;3)$.
2. $A\,(-1\,;2\,;1)$ et $B\,(3\,;2\,;1)$.

Exercice 8.3. On se place dans un repère orthonormé de l'espace. Soient les points $E\,(1\,;0\,;3)$, $F\,(3\,;-1\,;2)$ et $M\,(a\,;b\,;-2)$ avec a et b des nombres réels.

1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (EF).
2. Peut-on trouver des réels a et b tels que M appartienne à la droite (EF) ?

Positions relatives de droites

Exercice 8.4. Soient, dans un repère orthonormé de l'espace, $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ deux droites dont un donne une représentation paramétriques :

$$\mathscr{D} : \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & -2\lambda + 3 \\ y & = & -3\lambda + 1 \\ z & = & \lambda + 2 \end{array} \right. , \quad \lambda \in \mathbb{R}, \qquad \mathscr{D}' : \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & \lambda' + 1 \\ y & = & -2\lambda' \\ z & = & 4 \end{array} \right. , \quad \lambda' \in \mathbb{R}.$$

1. Pour chaque droite, donner deux points appartenant à la droite et deux vecteurs directeurs différents de la droite.
2. Les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont-elles parallèles ?
3. On cherche à vérifier si $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont sécantes. Pour cela, vérifiez s'il existe λ et λ' des réels tels que :
$$\left\{ \begin{array}{rcl} -2\lambda + 3 & = & \lambda' + 1 \\ -3\lambda + 1 & = & -2\lambda' \\ \lambda + 2 & = & 4 \end{array} \right. .$$
4. Que peut-on en conclure ?

Exercice 8.5. Dans un repère orthonormé de l'espace, $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont les droites de représentations paramétriques respectives :

$$\mathscr{D} : \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 1 + \lambda \\ y & = & 3 + \lambda \\ z & = & -4 - 2\lambda \end{array} \right. , \quad \lambda \in \mathbb{R}, \qquad \mathscr{D}' : \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 2\lambda' \\ y & = & 1 + \lambda' \\ z & = & 3 + \lambda' \end{array} \right. , \quad \lambda' \in \mathbb{R}.$$

Montrer que ces droites sont sécantes, et déterminer les coordonnées du point d'intersection.

Exercice 8.6. Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère les points $A\,(1\,;0\,;2)$, $B\,(0\,;1\,;-1)$ et $C\,(4\,;1\,;0)$. Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal de C sur (AB).

Exercice 8.7. Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère les points $A\,(1\,;0\,;-2)$, $B\,(-2\,;3\,;\alpha)$ et la droite $\mathscr{D}$ de représentation paramétrique :

$$\mathscr{D} : \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 2 - 3\lambda \\ y & = & \lambda \\ z & = & 3\lambda \end{array} \right. , \ \lambda \in \mathbb{R}.$$

1. Donner un vecteur directeur de $\mathscr{D}$.
2. Pour quelle valeur de α les droites $\mathscr{D}$ et (AB) sont-elles orthogonales ?

Équation cartésienne de plan

Exercice 8.8. Soit $\mathscr{P}$ le plan d'équation cartésienne $2x+3y-2z+1=0$ dans un repère orthonormé de l'espace.

1. Parmi les points ci-dessous, déterminer ceux qui appartiennent au plan $\mathscr{P}$.

   (a) $A\,(-2\,;5\,;6)$. (b) $B\,(7\,;3\,;12)$. (c) $C\,(5\,;-2\,;4)$.

2. Soit $D\,(2\,;y_D\,;0)$ un point du plan $\mathscr{P}$. Que vaut y_D ?

Exercice 8.9. On se place dans un repère orthonormé de l'espace.

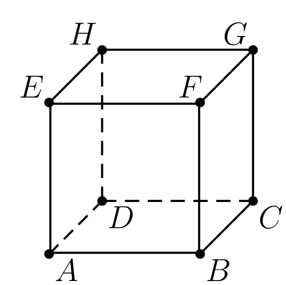
1. Déterminer le réel d pour que le point $A\,(1\,;-2\,;-1)$ appartienne au plan $\mathscr{P}$ d'équation cartésienne $3x-4y+3z+d=0$.
2. Donner deux vecteurs normaux au plan $\mathscr{P}$.

Exercice 8.10. On se place dans un repère orthonormé de l'espace. Justifier que le plan $\mathscr{P}$ passant par le point O, origine d'un un repère orthonormé, et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}5\\-3\\4\end{pmatrix}$ a pour équation cartésienne $5x-3y+4z=0$.

Exercice 8.11. Soient $A\,(-2\,;7\,;3)$ un point et $\vec{n}\begin{pmatrix}-2\\4\\5\end{pmatrix}$ un vecteur dans un repère orthonormé de l'espace.

1. Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$ passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$.
2. Soit $B\,(4\,;1\,;9)$. Déterminer une équation cartésienne du plan médiateur $\mathscr{P}'$ du segment $[AB]$.

Exercice 8.12. $ABCDEFGH$ est un cube. Le point I est le milieu de $[AB]$ et le point J est le milieu de $[DH]$. On se place dans le repère orthonormé $\left(A\,;\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AD}\,;\overrightarrow{AE}\right)$.



1. Déterminer les coordonnées de I, J et G dans ce repère.
2. Justifier que les points I, J et G définissent un plan de l'espace.
3. Démontrer que $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\3\\-4\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (IJG).
4. En déduire une équation cartésienne du plan (IJG).

Positions relatives de plans

Exercice 8.13. On se place dans un repère orthonormé de l'espace. Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$ parallèle au plan $\mathscr{P}'$ d'équation $4x+11y-2z+1=0$ et passant par le point $A\,(4\,;-4\,;1)$.

Exercice 8.14. On se place dans un repère orthonormé de l'espace. Soient $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ les plans d'équation $3x-2y+4z-5=0$ et $x-y-2z+1=0$. Déterminer si $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont parallèles et, si non, déterminer leur intersection.

Positions relatives de plans et de droites

Exercice 8.15. On se place dans un repère orthonormé de l'espace. Soient $\mathscr{P}$ le plan d'équation $2x - 3y - 2z + 3 = 0$ et $\mathscr{D}$ la droite dont une représentation paramétrique est :

$$\mathscr{D} : \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 1 + 2\lambda \\ y & = & -3 + 5\lambda \\ z & = & 7 - \lambda \end{array} \right. , \ \lambda \in \mathbb{R}.$$

Déterminer l'intersection du plan $\mathscr{P}$ et de la droite $\mathscr{D}$.

Exercice 8.16. Soient $\mathscr{P}$ le plan d'équation cartésienne $x + y + z - 5 = 0$ et $A\,(12\,;-8\,;-5)$ un point dans un repère orthonormé de l'espace.

1. Vérifier que le point A n'appartient pas au plan $\mathscr{P}$.
2. Déterminer une représentation paramétrique de la droite $\mathscr{D}$ orthogonale au plan $\mathscr{P}$ et passant par A.
3. Montrer que $H\,(14\,;-6\,;-3)$ est le projeté orthogonal de A sur le plan $\mathscr{P}$.

Exercice 8.17. Soient $A\,(6\,;1\,;6)$ un point et $\mathscr{P}$ le plan d'équation cartésienne $5x+2y+4z-11 = 0$ dans un repère orthonormé de l'espace. Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal H du point A sur le plan $\mathscr{P}$.

Exercice 8.18. Soient $A\,(1\,;-1\,;2)$, $B\,(3\,;0\,;-4)$, $C\,(0\,;1\,;-1)$ et $D\,(-2\,;4\,;0)$ quatre points dans un repère orthonormé de l'espace. Montrer que A, B et C forment un plan puis déterminer les coordonnées du projeté orthogonal de D sur celui-ci.

8.4.2 Approfondir

Exercice 8.19. [Exercice de synthèse, type bac] Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère les points $A\,(5\,;-5\,;2)$, $B\,(-1\,;1\,;0)$, $C\,(0\,;1\,;2)$ et $D\,(6\,;6\,;-1)$.

1. Montrer que le triangle BCD est rectangle en C puis calculer son aire $\mathcal{A}_{BCD}$.
2. (a) Montrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (BCD).
   (b) Déterminer une équation cartésienne du plan (BCD).
3. Déterminer une représentation paramétrique de la droite $\mathscr{D}$ passant par A et orthogonale au plan (BCD).
4. Déterminer les coordonnées du point H d'intersection de la droite $\mathscr{D}$ et du plan (BCD).
5. En déduire le volume du tétraèdre $ABCD$.
6. (a) Calculer les longueurs AB et AC.
   (b) Déterminer une valeur approchée au dixième de degré près de l'angle $\widehat{BAC}$.

Exercice 8.20. [Centre étranger, mai 2022] Dans l'espace, rapporté à un repère orthonormé $\left(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k}\right)$, on considère les points :

$$A\,(2\,;0\,;3)\,,\quad B\,(0\,;2\,;1)\,,\quad C\,(-1\,;-1\,;2)\,,\quad \text{et}\quad D\,(3\,;-3\,;-1)\,.$$

1. **Calcul d'un angle**
   (a) Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ et en déduire que les points A, B et C ne sont pas alignés.
   (b) Calculer les longueurs AB et AC.
   (c) À l'aide du produit scalaire $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$, déterminer la valeur du cosinus de l'angle $\widehat{BAC}$ puis donner une valeur approchée de la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$ au dixième de degré.
2. **Calcul d'une aire**
   (a) Déterminer une équation du plan $\mathscr{P}$ passant par le point C et perpendiculaire à la droite (AB).
   (b) Donner une représentation paramétrique de la droite (AB).
   (c) En déduire les coordonnées du projeté orthogonal E du point C sur la droite (AB), c'est-à-dire du point d'intersection de la droite (AB) et du plan $\mathscr{P}$.
   (d) Calculer l'aire du triangle ABC.
3. **Calcul d'un volume**
   (a) Soit le point $F\,(1\,;-1\,;3)$. Montrer que les points A, B, C et F sont coplanaires.
   (b) Vérifier que la droite (FD) est orthogonale au plan (ABC).
   (c) Sachant que le volume d'un tétraèdre est égal au tiers de l'aire de sa base multiplié par sa hauteur, calculer le volume du tétraèdre $ABCD$.

Exercice 8.21. [Équation d'une sphère] On considère un repère orthonormé de l'espace.

1. On considère une sphère $\mathscr{S}$ de centre $C\,(x_C\,;y_C\,;z_C)$ et de rayon r. Démontrer que $M\,(x\,;y\,;z)$ appartient à $\mathscr{S}$ si et seulement si

$$(x-x_C)^2+(y-y_C)^2+(z-z_C)^2=r^2.$$

   Cette équation s'appelle équation de la sphère $\mathscr{S}$.
2. Dans chacun des cas ci-dessous, donner une équation de la sphère $\mathscr{S}$.
   (a) $\mathscr{S}$ de centre $C\,(3\,;-2\,;5)$ et de rayon 4.
   (b) $\mathscr{S}$ de centre $C\,(-1\,;4\,;-2)$ et passant par $A\,(2\,;3\,;6)$.
   (c) $\mathscr{S}$ de diamètre $[AB]$ avec $A\,(-3\,;-5\,;2)$ et $B\,(1\,;-1\,;-2)$.

Exercice 8.22. [Intersection d'une sphère et d'une droite]

1. Donner les configurations possibles d'intersection entre une droite $\mathscr{D}$ et une sphère $\mathscr{S}$.
2. Caractériser chacune de ces configurations à l'aide de la distance $d\,(C\,;\mathscr{D})$ où C est le centre de la sphère $\mathscr{S}$. Rappeler comment est définie cette distance.
3. Dans un repère orthonormé, on définit la sphère $\mathscr{S}$ et la droite $\mathscr{D}$ d'équation et de représentation paramétrique

$$(x-1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=81 \quad \text{et} \quad \mathscr{D}:\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 5+2\lambda \\ y &=& -2-\lambda \\ z &=& 5+3\lambda \end{array}\right., \ \lambda\in\mathbb{R}.$$

   (a) Quels sont le centre et le rayon de $\mathscr{S}$?
   (b) Montrer que trouver l'intersection de $\mathscr{S}$ et $\mathscr{D}$ revient à résoudre l'équation $14t^2+72t+15=0$.
   (c) En déduire l'intersection de $\mathscr{S}$ et $\mathscr{D}$.

Exercice 8.23. On considère un repère orthonormé de l'espace. Dans chaque cas, déterminer les coordonnées des éventuels points d'intersection de la sphère $\mathscr{S}$ de centre C et de rayon r avec la droite $\mathscr{D}$ passant par le point P et de vecteur directeur $\vec{d}$.

1. $C\,(-5\,;2\,;1)$, $r=9$, $P\,(-2\,;8\,;1)$ et $\vec{d}\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$.
2. $C\,(3\,;4\,;-1)$, $r=7$, $P\,(14\,;13\,;-1)$ et $\vec{d}\begin{pmatrix}3\\2\\-2\end{pmatrix}$.
3. $C\,(-4\,;-2\,;5)$, $r=10$, $P\,(-7\,;2\,;-7)$ et $\vec{d}\begin{pmatrix}4\\-2\\1\end{pmatrix}$.

Exercice 8.24. [Plan tangent à une sphère] Dans un repère orthonormé, on considère la sphère $\mathscr{S}$ de centre $C\,(2\,;1\,;3)$ et de rayon 5 et la droite $\mathscr{D}$ de représentation paramétrique

$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 2+3\lambda \\ y &=& 3+2\lambda \\ z &=& 1+2\lambda \end{array}\right., \ \lambda\in\mathbb{R}.$$

1. Déterminer une équation cartésienne de $\mathscr{S}$.
2. Déterminer les coordonnées des points d'intersection M_1 et M_2 de $\mathscr{S}$ et $\mathscr{D}$.
3. Soit $\mathscr{P}$ le plan d'équation $3x+4z+7=0$.
   (a) Déterminer un vecteur normal à $\mathscr{P}$ puis les coordonnées du projeté orthogonal de C sur $\mathscr{P}$.
   (b) Justifier que tous les points du plan $\mathscr{P}$ sont à une distance de C supérieure au rayon de la sphère $\mathscr{S}$, sauf le projeté orthogonal.

   (c) Quelle est alors l'intersection entre $\mathscr{S}$ et $\mathscr{P}$? On dit que le plan $\mathscr{P}$ est **tangent** à la sphère.
4. Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{CM_1}$.
5. Soit M un point de $\mathscr{S}$ et $\mathscr{P}'$ le plan passant par M et de vecteur normal $\overrightarrow{CM}$.
   (a) On considère un point N du plan $\mathscr{P}'$. Que peut-on dire de la distance CN ?
   (b) Que peut-on dire de l'intersection de $\mathscr{S}$ et $\mathscr{P}'$?
   (c) Donner une condition pour qu'un plan soit tangent à une sphère.

Exercice 8.25. [Intersection d'une sphère et d'un plan]

1. Donner les configurations possibles d'intersection entre un plan $\mathscr{P}$ et une sphère $\mathscr{S}$.
2. Caractériser chacune de ces configurations à l'aide de la distance $d\left(C\,;\mathscr{P}\right)$ où C est le centre de la sphère $\mathscr{S}$. Rappeler comment est définie cette distance.
3. On considère un repère orthonormé de l'espace. Soient $\mathscr{S}$ la sphère de centre $(-3\,;-1\,;1)$ et de rayon 9 et $\mathscr{P}$ le plan d'équation $2x+y-z-60=0$. Déterminer la nature l'intersection de $\mathscr{S}$ et $\mathscr{P}$; on précisera ses éventuels éléments caractéristiques.

8.4.3 S'entraîner

Représentation paramétrique d'une droite

Exercice 8.26. On considère un repère orthonormé de l'espace. Dans chaque cas, déterminer une représentation paramétrique de la droite (AB).

1. $A\,(-2\,;8\,;0)$ et $B\,(0\,;1\,;0)$.
2. $A\,(1\,;-3\,;5)$ et $B\,(1\,;1\,;-1)$.

Positions relatives de droites

Exercice 8.27. On considère un repère orthonormé de l'espace.

1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AB) où $A\,(1\,;-1\,;-3)$ et $B\,(3\,;2\,;4)$.
2. On considère le point $E\,(-5\,;7\,;1)$. Déterminer une représentation paramétrique de la droite $\mathscr{D}$ passant par E et parallèle à (AB).
3. On considère le point $F\,(-1\,;13\,;3)$. Justifier que (AF) et $\mathscr{D}$ ne sont pas parallèles.
4. Déterminer les coordonnées du point d'intersection, si il existe, de (AF) et $\mathscr{D}$.

Exercice 8.28. On considère un repère orthonormé de l'espace. Dans chaque cas, étudier la positive relative des droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ (on cherche à savoir si elles sont confondues / parallèles / orthogonales / sécantes / ni l'un ni l'autre) :

1.
$$\mathscr{D}:\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 3-2\lambda \\ y &=& 1-3\lambda \\ z &=& 2+\lambda \end{array}\right., \quad \lambda\in\mathbb{R}, \qquad \mathscr{D}':\left\{\begin{array}{rcl} x &=& -1+\lambda' \\ y &=& 2+2\lambda' \\ z &=& -3-\lambda' \end{array}\right., \quad \lambda'\in\mathbb{R}.$$

2.

$$\mathscr{D} : \begin{cases} x = -1+\lambda \\ y = 2+2\lambda \\ z = -3-\lambda \end{cases}, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \qquad \mathscr{D}' : \begin{cases} x = 3\lambda' \\ y = 1-2\lambda' \\ z = 1+\lambda' \end{cases}, \quad \lambda' \in \mathbb{R}.$$

3.

$$\mathscr{D} : \begin{cases} x = 5+\lambda \\ y = 2+\lambda \\ z = -2\lambda \end{cases}, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \qquad \mathscr{D}' : \begin{cases} x = 17+2\lambda' \\ y = -2-2\lambda' \\ z = -4+\lambda' \end{cases}, \quad \lambda' \in \mathbb{R}.$$

Exercice 8.29. Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère les points $A\,(2\,;1\,;-1)$, $B\,(-3\,;0\,;4)$ et $C\,(0\,;-2\,;8)$. Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal de C sur (AB).

Équation cartésienne de plan

Exercice 8.30. [QCM] Choisir la ou les bonnes réponses. Soient les points non alignés dans un repère orthonormé l'espace : $A\,(2\,;-5\,;1)$, $B\,(4\,;-2\,;-4)$ et $C\,(6\,;-4\,;1)$.

1. Un vecteur normal du plan (ABC) a pour coordonnées

   (a) $\vec{v}_1 \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ (b) $\vec{v}_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ (c) $\vec{v}_3 \begin{pmatrix} 2 \\ -8 \\ -4 \end{pmatrix}$ (d) $\vec{v}_4 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$

2. Une équation du plan (ABC) est

   (a) $-x+4y+2z+15=0$

   (b) $-3x+2y+16=0$

   (c) $\dfrac{1}{2}x-2y-z-10=0$

   (d) $2x-5y+z=0$

Exercice 8.31. Soient $A\,(-2\,;-1\,;1)$, $B\,(4\,;-1\,;-2)$ et $C\,(-1\,;1\,;-1)$ trois points dans un repère orthonormé de l'espace et $\mathscr{P}$ le plan d'équation $2x+3y+4z+3=0$.

1. Démontrer que les points A, B et C définissent un plan de l'espace.
2. Démontrer que $\mathscr{P}$ est le plan (ABC) et en déduire un vecteur normal au plan (ABC).

Exercice 8.32. Soient $A\,(-2\,;-1\,;1)$ et $B\,(4\,;-1\,;-2)$ deux points dans un repère orthonormé de l'espace. Déterminer une équation cartésienne du plan médiateur $\mathscr{M}$ du segment $[AB]$.

Positions relatives de plans

Exercice 8.33. Soient $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ les plans d'équations cartésiennes $2x+4y-3z+9=0$ et $-5x+6y-z=0$ dans un repère orthonormé de l'espace.. Déterminer si $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont parallèles et, si non, déterminer leur intersection.

Positions relatives de plans et droite

Exercice 8.34. Soient, dans un repère orthonormé de l'espace, $\mathscr{P}$ le plan d'équation $7x + 2y - z + 4 = 0$ et $\mathscr{D}$ la droite dont une représentation paramétrique est :

$$\mathscr{D} : \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 15 - 3\lambda \\ y & = & -9 + \lambda \\ z & = & 7 + 2\lambda \end{array}\right. , \ \lambda \in \mathbb{R}.$$

Déterminer l'intersection du plan $\mathscr{P}$ et de la droite $\mathscr{D}$.

Exercice 8.35. Soient, dans un repère orthonormé de l'espace, $\mathscr{P}$ le plan d'équation $-2x + y = 0$ et $B\,(2\,;-1\,;-1)$ un point de l'espace. On désigne par H le projeté orthogonal de B sur le plan $\mathscr{P}$. Déterminer les coordonnées du point H.

Exercice 8.36. Soient $A\,(4\,;5\,;8)$, $B\,(1\,;3\,;-12)$ et $C\,(0\,;0\,;8)$ trois points dans un repère orthonormé de l'espace. Déterminer une équation du plan $\mathscr{P}$ passant par C et orthogonal à la droite (AB).

Exercice 8.37. Soient $\mathscr{P}$ le plan d'équation $4x + 2y - 5z + 7 = 0$ et $A\,(5\,;-1\,;2)$ un point dans un repère orthonormé de l'espace. Déterminer une représentation paramétrique de la droite $\mathscr{D}$ passant par A et orthogonale au plan $\mathscr{P}$.

Exercice 8.38. Soit, dans un repère orthonormé de l'espace, $\mathscr{D}$ la droite dont une représentation paramétrique est

$$\mathscr{D} : \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 5 + \lambda \\ y & = & 4 \\ z & = & 1 + 3\lambda \end{array}\right. , \ \lambda \in \mathbb{R}$$

1. Est-ce que $A\,(9\,;1\,;-1)$ appartient à la droite $\mathscr{D}$?
2. Déterminer une équation du plan $\mathscr{P}$ passant par A et orthogonal à $\mathscr{D}$.

8.4.4 Le Flashback !

Flashback 8.1. Soit f définie par $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{x^2 - 3x + 1}$. Déterminer son ensemble de définition, des limites aux bornes de l'ensemble de définition, ses asymptotes éventuelles ainsi que ses variations.

Flashback 8.2. Soit $u_n)$ la suite définie par $u_0 = \pi$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sin\left(\dfrac{u_n}{2}\right)$.

1. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 1$.
2. Montrer que l'équation $\sin\left(\dfrac{x}{2}\right) = x$ possède une unique solution sur $[0\,;\pi]$ dont on précisera la valeur.
3. Étudier la convergence de (u_n).