Nom : **Prénom :** **2^{de} :**

Mathématiques

Généralités sur les fonctions

Sujet 1-B 27/01/2026

Note : / 20 Durée : 55 min

— La calculatrice n'est pas autorisée.

Exercice 1 [/ 2]

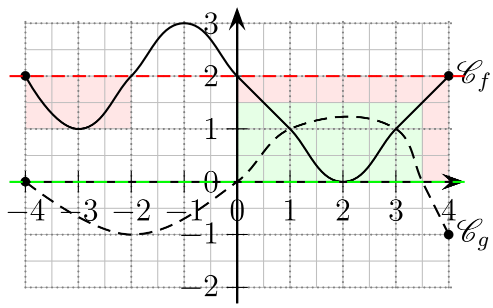
Soit h une fonction définie par le tableau de valeurs suivants :

z	-6	$-3,1$	0	$0{,}5$	$1{,}6$	2	5
$h(z)$	2	3	-6	-2	-6	0	1

1. **[/ ½]** Quelle est l'image de 0 par h ? -6
2. **[/ ½]** Quelle est l'image de 2 par h ? 0
3. **[/ ½]** Quels sont les éventuels antécédents de 2 par h ? -6
4. **[/ ½]** Quels sont les éventuels antécédents de -6 par h ? 0 et 1,6

Exercice 2 [/ 3]

Soient f et g deux fonctions définies par les courbes ci-dessous. Les solutions données aux questions suivantes seront approximatives.



1. **[/ ½]** Quelle est l'image de 4 par g ? -1.
2. **[/ ½]** Quels sont les éventuels antécédents de 0 par g ? -4, 0 et 3,5.
3. **[/ ½]** Résoudre graphiquement $f(x) = g(x)$. Les solutions sont les abscisses des points d'intersection de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ donc 1 et 3.
4. **[/ ½]** Résoudre graphiquement $g(x) > 0$. La solution est l'intervalle $]0\,;3,5[$.
5. **[/ ½]** Résoudre graphiquement $f(x) \leqslant 2$. La solution est l'intervalle $[-4\,;-2]\cup[0\,;4]$.
6. **[/ ½]** Résoudre graphiquement $g(x) < f(x)$. La solution est l'intervalle $[-4\,;1[\,\cup\,]3\,;4]$.

Exercice 3 [/ 9]

Soient f, g et h trois fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = -2x^2 - 8x + 10, \quad g(x) = -2(x+2)^2 + 18, \quad h(x) = -2(x+5)(x-1).$$

1. [/ 2] Montrer que f, g et h sont trois expressions d'une seule et même fonction.

Solution: Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} g(x) &= -2(x+2)^2 + 18 \\ &= -2(x^2 + 4x + 4) + 18 \\ &= -2x^2 - 8x - 8 + 18 \\ &= -2x^2 - 8x + 10 \\ &= f(x), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h(x) &= -2(x+5)(x-1) \\ &= -2(x^2 + 5x - x - 5) \\ &= -2(x^2 + 4x - 5) \\ &= -2x^2 - 8x + 10 \\ &= f(x). \end{aligned}$$

On a donc $f(x) = g(x) = h(x)$. Autrement, les trois fonctions sont égales.

2. [/ 1] En choisissant l'expression la plus adaptée de f, calculer l'image de $\sqrt{3} - 2$.

Solution:

$$\begin{aligned} f(\sqrt{3} - 2) &= g(\sqrt{3} - 2) \\ &= -2(\sqrt{3} - 2 + 2)^2 + 18 \\ &= -2(\sqrt{3})^2 + 18 \\ &= -2 \times 3 + 18 \\ &= 12. \end{aligned}$$

3. [/ 1] Le point $M\,(0\,;10)$ appartient-il à la courbe $\mathscr{C}_f$ de f ?

Solution: $M\,(0\,;10) \in \mathscr{C}_f$ si et seulement si $f(0) = 10$. On a

$$f(0) = -2 \times 0^2 - 8 \times 0 + 10 = 10.$$

Donc $M\,(0\,;10) \in \mathscr{C}_f$.

4. [/ 1] En choisissant l'expression la plus adaptée de f, déterminer les éventuels antécédents de 0.

Solution: On cherche x tel que $f(x) = 0$, ou encore $h(x) = 0$ donc

$$-2(x+5)(x-1) = 0.$$

D'après la règle du produit nul, soit $x + 5 = 0$, i.e. $x = -5$; soit $x - 1 = 0$, i.e. $x = 1$.

0 a donc pour antécédents -5 et 1.

5. [/ 2] En choisissant l'expression la plus adaptée de f, déterminer les éventuels antécédents de 24.

Solution: On cherche x tel que $f(x) = 10$, i.e.

$$\begin{aligned} & f(x) = 10 \\ \iff & -2x^2 - 8x + 10 = 10 \\ \iff & -2x^2 - 8x = 0 \\ \iff & -2x(x+4) = 0. \end{aligned}$$

D'après la règle du produit nul, soit $-2x = 0$, i.e. $x = 0$; soit $x + 4 = 0$, i.e. $x = -4$.

10 a donc pour antécédents -4 et 0.

6. [/ 2] En choisissant l'expression la plus adaptée de f, déterminer le signe de f.

Solution: On choisit h qui est un produit et donc idéale pour un tableau de signes. On a

$$\begin{aligned} & x + 5 \geqslant 0 \\ \iff & x \geqslant -5, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & x - 1 \geqslant 0 \\ \iff & x \geqslant 1. \end{aligned}$$

x	$-\infty$		-5		1		$+\infty$
-2		$-$		$-$		$-$	
$x+5$		$-$	0	$+$	0	$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$h(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Exercice 4 [/ 3]

1. **[/ 2]** Soient $\vec{u}\begin{pmatrix}-4\\10\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}1/2\\-5/4\end{pmatrix}$ deux vecteurs d'une base $\left(\vec{i}\,;\vec{j}\right)$. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont-ils colinéaires ?

   Solution: $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si leur déterminant est nul.

   $$\begin{aligned}\det\left(\vec{u}\,;\vec{v}\right) &= x_{\vec{u}} \times y_{\vec{v}} - x_{\vec{v}} \times y_{\vec{u}}\\ &= -4 \times \left(-\frac{5}{4}\right) - \frac{1}{2} \times 10\\ &= 5 - 5\\ &= 0.\end{aligned}$$

   $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont donc colinéaires.

2. **[/ 1]** $\vec{u}$ et $\vec{v}$ forment-ils une base du plan ?

   Solution: $\vec{u}$ et $\vec{v}$ forment une base du plan si et seulement si ils ne sont pas colinéaires, la réponse est donc non.

Exercice 5 [/ 3]

Soient $A\left(-2\,;1\right)$, $B\left(2\,;0\right)$, $C\left(-3\,;-2\right)$ et $D\left(x_D\,;y_D\right)$ quatre points dans un repère du plan.

1. **[/ 1]** Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

   Solution:

   $$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B - x_A\\y_B - y_A\end{pmatrix} \implies \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2-(-2)\\0-1\end{pmatrix} \implies \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix}.$$

2. **[/ 2]** Déterminer les coordonnées du point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.

   Solution: $ABCD$ est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. On a

   $$\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}x_C - x_D\\y_C - y_D\end{pmatrix} \implies \overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}-3 - x_D\\-2 - y_D\end{pmatrix}.$$

   $$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} &\iff \begin{cases}4 &= -3 - x_D\\ -1 &= -2 - y_D\end{cases}\\ &\iff \begin{cases}x_D &= -3 - 4\\ y_D &= -2 + 1\end{cases}\\ &\iff \begin{cases}x_D &= -7\\ y_D = &= -1\end{cases}.\end{aligned}$$

   Donc $D\left(-7\,;-1\right)$.