**Nom :** **Prénom :** **$2^{de}$ :**

# Mathématiques

## Généralités sur les fonctions

Sujet 1-A 27/01/2026

**Note :** / 20 Durée : 55 min

— La calculatrice n'est pas autorisée.

**Exercice 1 [ / 2]**

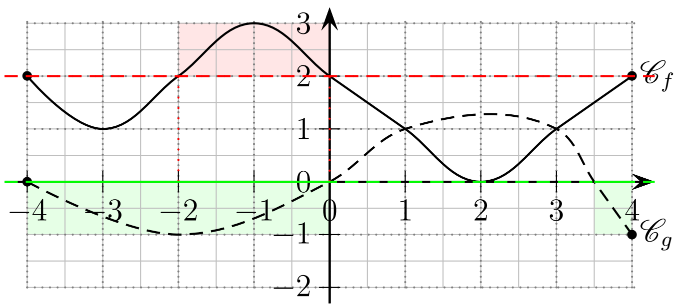
Soit $h$ une fonction définie par le tableau de valeurs suivants :

| $z$ | $-5$ | $-2,6$ | 0 | 0,5 | 1,8 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $h(z)$ | 4 | 3 | $-5$ | $-4$ | $-5$ | 0 | 1 |

1. **[ / ½]** Quelle est l'image de 0 par $h$ ? $-5$
2. **[ / ½]** Quelle est l'image de 4 par $h$ ? 1
3. **[ / ½]** Quels sont les éventuels antécédents de 4 par $h$ ? $-5$
4. **[ / ½]** Quels sont les éventuels antécédents de $-5$ par $h$ ? 0 et 1,8

**Exercice 2 [ / 3]**

Soient $f$ et $g$ deux fonctions définies par les courbes ci-dessous. Les solutions données aux questions suivantes seront approximatives.




1. **[ / ½]** Quelle est l'image de 4 par $f$ ? 2.
2. **[ / ½]** Quels sont les éventuels antécédents de 2 par $f$ ? $-4$, $-2$, 0 et 4.
3. **[ / ½]** Résoudre graphiquement $f(x) = g(x)$. Les solutions sont les abscisses des points d'intersection de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ donc 1 et 3.
4. **[ / ½]** Résoudre graphiquement $f(x) > 2$. La solution est l'intervalle $]-2\,;0[$.
5. **[ / ½]** Résoudre graphiquement $g(x) \leqslant 0$. La solution est l'intervalle $[-4\,;0] \cup [3,5\,;4]$.
6. **[ / ½]** Résoudre graphiquement $g(x) < f(x)$. La solution est l'intervalle $[-4\,;1[ \cup ]3\,;4]$.

**Exercice 3 [ / 9]**

Soient $f$, $g$ et $h$ trois fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = -3x^2 + 6x + 24, \quad g(x) = -3(x-1)^2 + 27, \quad h(x) = -3(x+2)(x-4).$$

1. **[ / 2]** Montrer que $f$, $g$ et $h$ sont trois expressions d'une seule et même fonction.

**Solution:** Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} g(x) &= -3(x-1)^2 + 27 \\ &= -3(x^2 - 2x + 1) + 27 \\ &= -3x^2 + 6x - 3 + 27 \\ &= -3x^2 + 6x + 24 \\ &= f(x), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h(x) &= -3(x+2)(x-4) \\ &= -3(x^2 + 2x - 4x - 8) \\ &= -3(x^2 - 2x - 8) \\ &= -3x^2 + 6x + 24 \\ &= f(x). \end{aligned}$$

On a donc $f(x) = g(x) = h(x)$. Autrement, les trois fonctions sont égales.

2. **[ / 1]** En choisissant l'expression la plus adaptée de $f$, calculer l'image de $\sqrt{5} + 1$.

**Solution:**

$$\begin{aligned} f(\sqrt{5}+1) &= g(\sqrt{5}+1) \\ &= -3(\sqrt{5}+1-1)^2 + 27 \\ &= -3(\sqrt{5})^2 + 27 \\ &= -3 \times 5 + 27 \\ &= 12. \end{aligned}$$

3. **[ / 1]** Le point $M\,(0\,;3)$ appartient-il à la courbe $\mathscr{C}_f$ de $f$ ?

**Solution:** $M\,(0\,;3) \in \mathscr{C}_f$ si et seulement si $f(0) = 3$. On a

$$f(0) = -3 \times 0^2 + 6 \times 0 + 24 = 24 \neq 3.$$

Donc $M\,(0\,;3) \notin \mathscr{C}_f$.

4. **[ / 1]** En choisissant l'expression la plus adaptée de $f$, déterminer les éventuels antécédents de 0.

**Solution:** On cherche $x$ tel que $f(x) = 0$, ou encore $h(x) = 0$ donc

$$-3(x+2)(x-4) = 0.$$

D'après la règle du produit nul, soit $x + 2 = 0$, i.e. $x = -2$ ; soit $x - 4 = 0$, i.e. $x = 4$.

0 a donc pour antécédents $-2$ et 4.

5. **[ / 2]** En choisissant l'expression la plus adaptée de $f$, déterminer les éventuels antécédents de 24.

**Solution:** On cherche $x$ tel que $f(x) = 24$, i.e.

$$\begin{aligned} & f(x) = 24 \\ \iff & -3x^2 + 6x + 24 = 24 \\ \iff & -3x^2 + 6x = 0 \\ \iff & -3x(x-2) = 0. \end{aligned}$$

D'après la règle du produit nul, soit $-3x = 0$, i.e. $x = 0$ ; soit $x - 2 = 0$, i.e. $x = 2$.

24 a donc pour antécédents 2 et 0.

6. **[ / 2]** En choisissant l'expression la plus adaptée de $f$, déterminer le signe de $f$.

**Solution:** On choisit $h$ qui est un produit et donc idéale pour un tableau de signes. On a

$$\begin{aligned} & x + 2 \geqslant 0 \\ \iff & x \geqslant -2, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} & x - 4 \geqslant 0 \\ \iff & x \geqslant 4. \end{aligned}$$

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $4$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-3$ | | $-$ | | $-$ | | $-$ | |
| $x+2$ | | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $+$ | |
| $x-4$ | | $-$ | | $-$ | 0 | $+$ | |
| $h(x)$ | | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ | |

**Exercice 4 [ / 3]**

1. **[ / 2]** Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -1/3 \\ 1 \end{pmatrix}$ deux vecteurs d'une base $\left(\vec{i}\,;\vec{j}\right)$. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont-ils colinéaires ?

   **Solution:** $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si leur déterminant est nul.

$$\begin{aligned}\det\left(\vec{u}\,;\vec{v}\right) &= x_{\vec{u}} \times y_{\vec{v}} - x_{\vec{v}} \times y_{\vec{u}} \\ &= 2 \times 1 - \left(-\frac{1}{3}\right) \times (-3) \\ &= 2 - 1 \\ &= 1 \\ &\neq 0.\end{aligned}$$

   $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont donc pas colinéaires.

2. **[ / 1]** $\vec{u}$ et $\vec{v}$ forment-ils une base du plan ?

   **Solution:** $\vec{u}$ et $\vec{v}$ forment une base du plan si et seulement si ils ne sont pas colinéaires, la réponse est donc oui.

**Exercice 5 [ / 3]**

Soient $A\,(4\,;0)$, $B\,(-1\,;3)$, $C\,(-4\,;5)$ et $D\,(x_D\,;y_D)$ quatre points dans un repère du plan.

1. **[ / 1]** Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

   **Solution:**

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} \implies \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -1-4 \\ 3-0 \end{pmatrix} \implies \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

2. **[ / 2]** Déterminer les coordonnées du point $D$ tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.

   **Solution:** $ABCD$ est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. On a

$$\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix} x_C - x_D \\ y_C - y_D \end{pmatrix} \implies \overrightarrow{DC}\begin{pmatrix} -4 - x_D \\ 5 - y_D \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} &\iff \begin{cases} -5 &= -4 - x_D \\ 3 &= 5 - y_D \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x_D &= -4 + 5 \\ y_D &= 5 - 3 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x_D &= 1 \\ y_D &= 2 \end{cases}.\end{aligned}$$

   Donc $D\,(1\,;2)$.