

Chapitre 7

Droites du plan

7.1 Droites du plan

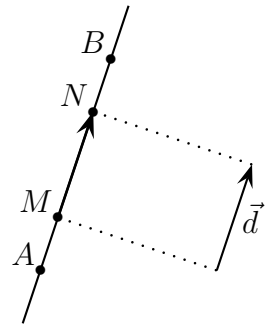
7.1.1 Droites du plan et vecteur directeur d'une droite

Définition 7.1. Soient A et B deux points du plan.

- La **droite** (AB) est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ soient colinéaires, autrement dit tels qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{AB}.$$

- $\vec{d}$ est un **vecteur directeur** de (AB) si et seulement si il existe deux points M et N de (AB) tels que $\vec{d} = \overrightarrow{MN}$.



Proposition 7.1. Soit $\mathcal{D}$ une droite de vecteur directeur $\vec{d}$. $\vec{u}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{d}$ sont colinéaires.

Démonstration. Soit $\mathcal{D}$ une droite de vecteur directeur $\vec{d}$. Comme $\vec{d}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$, il existe $A, B \in \mathcal{D}$ tels que $\vec{d} = \overrightarrow{AB}$. On a par ailleurs $\mathcal{D} = (AB)$.

$\Rightarrow$: Soit $\vec{u}$ un vecteur directeur de $\mathcal{D} = (AB)$. Il existe $M \in (AB)$ tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AM}$. Comme $M \in (AB)$, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{AB}$; $\vec{u} = \overrightarrow{AM}$ est donc colinéaire à $\vec{d} = \overrightarrow{AB}$.

$\Leftarrow$: Soit $\vec{u}$ un vecteur colinéaire à $\vec{d}$: il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{u} = \lambda \vec{d}$. Soit M l'image de la translation de A par $\vec{u}$, autrement dit le point du plan tel que $\vec{u} = \overrightarrow{AM}$. On a alors $\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{AB}$. Par définition, on a alors $M \in (AB)$. Comme $\vec{u} = \overrightarrow{AM}$ avec $A, M \in (AB)$, $\vec{u}$ est un vecteur directeur de (AB) , autrement dit de $\mathcal{D}$.

□

Méthode pour déterminer si un vecteur $\vec{v}$ est directeur d'une droite (AB) connaissant ses coordonnées :

1. Déterminer un vecteur directeur de (AB) et ses coordonnées : $\overrightarrow{AB}$;
2. Énoncer que $\vec{v}$ est directeur de (AB) si et seulement si $\vec{v}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires, si et seulement si leur déterminant est nul;
3. Calculer leur déterminant et conclure.

Exemple : Soient $A(-1; 2)$ et $B(5; 14)$ deux points d'un repère du plan $(O; \vec{i}; \vec{j})$. Déterminons si $\vec{v} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (AB) .

1. $\overrightarrow{AB}$ est vecteur directeur de (AB) et a pour coordonnées :

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 5 - (-1) \\ 14 - 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

2. $\vec{v}$ est un vecteur directeur de (AB) si et seulement si il est colinéaire à $\overrightarrow{AB}$, si et seulement si leur déterminant est nul.
3. On a

$$\begin{aligned} \det(\overrightarrow{AB}; \vec{v}) &= x_{\overrightarrow{AB}} y_{\vec{v}} - x_{\vec{v}} y_{\overrightarrow{AB}} \\ &= 6 \times 4 - 3 \times 12 \\ &= -12 \\ &\neq 0. \end{aligned}$$

On en déduit que $\vec{v}$ n'est pas un vecteur directeur de (AB) .

Exercices : 7.1 et 7.2; 7.25 et 7.26.

7.1.2 Alignement de points

Proposition 7.2. Trois points A , B et C sont **alignés** si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

Remarque : Il est possible de prendre n'importe quelle autre combinaison de vecteurs formés à partir de ces trois points, par exemple $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$.

Démonstration. Soient A , B et C trois points du plan. A , B et C sont alignés si et seulement si $C \in (AB)$, si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires. $\square$

Exemple : Soient $A(-1; 2)$, $B(5; 14)$ et $C(0; 3)$ trois points d'un repère du plan $(O; \vec{i}; \vec{j})$. Déterminons s'ils sont alignés. A , B et C sont alignés si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires, si et seulement si leur déterminant est nul. D'après l'exemple précédent, on a $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \end{pmatrix}$. De même, on a

$$\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 0 - (-1) \\ 3 - 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \det(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) &= x_{\overrightarrow{AB}} y_{\overrightarrow{AC}} - x_{\overrightarrow{AC}} y_{\overrightarrow{AB}} \\ &= 6 \times 1 - 1 \times 12 \\ &= -6. \\ &\neq 0. \end{aligned}$$

On en déduit que A , B et C ne sont pas alignés.

Exercices : 7.3 à 7.7; 7.27.

7.2 Équations cartésiennes de droite

7.2.1 Équations cartésiennes de droite

Théorème 7.1. Soient $(O; \vec{i}; \vec{j})$ un repère et $\mathcal{D}$ une droite du plan. Alors il existe trois nombres réels a, b et c (avec $a \neq 0$ ou $b \neq 0$) tels que $\mathcal{D}$ soit l'ensemble des points $M(x; y)$ vérifiant

$$ax + by + c = 0.$$

On appelle cette forme d'équation de $\mathcal{D}$ une **équation cartésienne**.

Exemples : $3x - y + 1 = 0$, $2y + 5 = 0$ et $x - 1 = 0$ sont des équations cartésiennes où les triplets $(a; b; c)$ sont respectivement égaux à $(3; -1; 1)$, $(0; 2; 5)$ et $(1; 0; -1)$.

Démonstration. Soient $(O; \vec{i}; \vec{j})$ un repère, $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ deux points distincts de $\mathcal{D}$ et $M(x; y)$ un point de $\mathcal{D}$.

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{D} &\iff M \in (AB) \\ &\iff \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \end{pmatrix} \text{ sont colinéaires} \\ &\iff \det(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AM}) = 0 \\ &\iff x_{AB} \times y_{AM} - y_{AB} \times x_{AM} = 0 \\ &\iff (x_B - x_A)(y - y_A) - (y_B - y_A)(x - x_A) = 0 \\ &\iff x_By - x_Ay - x_By_A + x_Ay_A - y_Bx + y_Ax + y_B - y_Ax_A = 0 \\ &\iff (y_A - y_B)x + (x_B - x_A)y + x_Ay_B - x_By_A = 0 \\ &\iff ax + by + c = 0, \end{aligned}$$

en ayant noté :

$$\begin{cases} a &= y_A - y_B \\ b &= x_B - x_A \\ c &= x_Ay_B - x_By_A. \end{cases}$$

On a bien $a \neq 0$ ou $b \neq 0$ car les points A et B sont distincts. □

Remarque : Le triplet $(a; b; c)$ n'est pas unique.



Exemple : Soit $\mathcal{D}$ une droite du plan d'équation cartésienne $x - 2y + 1 = 0$. Déterminons si $A(0; 4)$ appartient à $\mathcal{D}$ ou non. Pour cela, on vérifie si les coordonnées de A sont solutions de l'équation cartésienne :

$$x_A - 2y_A + 1 = 0 - 2 \times 4 + 1 = -7 \neq 0.$$

Donc $A \notin \mathcal{D}$.

Méthode pour déterminer les coordonnées d'un point appartenant à une droite connaissant son équation cartésienne :

1. Choisir une valeur pour l'une des deux coordonnées : par exemple l'abscisse.
2. Injecter cette valeur dans l'équation cartésienne et déterminer, en résolvant l'équation, la valeur de l'autre coordonnée : l'ordonnée si l'abscisse a été choisie.

Exemple : Déterminons les coordonnées d'un point B appartenant à $\mathcal{D}$ de l'exemple précédent. On choisit $x_B = 0$. On a alors

$$\begin{aligned} B \in \mathcal{D} &\iff x_B - 2y_B + 1 = 0 \\ &\iff 0 - 2y_B + 1 = 0 \\ &\iff -2y_B = -1 \\ &\iff y_B = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Donc $B\left(0; \frac{1}{2}\right) \in \mathcal{D}$.

Méthode 1 pour tracer une droite connaissant son équation cartésienne dans un repère :

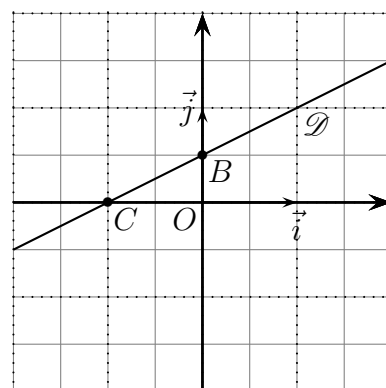
1. Déterminer les coordonnées de deux points appartenant à la droite.
2. Placer ces deux points dans le repère et tracer la droite passant par ces deux points.

Exemple : Traçons la droite $\mathcal{D}$ de l'exemple précédent dans le repère ci-dessous. On sait déjà que $B\left(0; \frac{1}{2}\right) \in \mathcal{D}$. On peut déterminer les coordonnées d'un second point C appartenant à $\mathcal{D}$ avec la même méthode. On pourra alors placer B et C dans le repère puis tracer la droite (BC) , i.e. $\mathcal{D}$.

Prenons cette fois-ci $y_C = 0$. On a alors

$$\begin{aligned} C \in \mathcal{D} &\iff x_C - 2y_C + 1 = 0 \\ &\iff x_C - 2 \times 0 + 1 = 0 \\ &\iff x_C + 1 = 0 \\ &\iff x_C = -1. \end{aligned}$$

Donc $C(-1; 0) \in \mathcal{D}$.



Exercices : 7.8 à 7.11 ; 7.28 et 7.29.

7.2.2 De l'équation cartésienne au vecteur directeur

Proposition 7.3. Soient $(O; \vec{i}; \vec{j})$ un repère et $\mathcal{D}$ une droite du plan. Si $ax + by + c = 0$ est une équation cartésienne de $\mathcal{D}$, alors le vecteur du plan $\vec{d} \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$.

Remarque : le vecteur $\vec{v} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ est aussi un vecteur directeur de $\mathcal{D}$, en effet il est colinéaire à $\vec{d} \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$ puisque $\vec{v} = -\vec{d}$.

Démonstration. Soient $(O; \vec{i}; \vec{j})$ un repère, $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ deux points distincts de la droite $\mathcal{D}$ dans ce repère. Par hypothèse, on a :

$$\begin{cases} ax_A + by_A + c = 0 \\ ax_B + by_B + c = 0 \end{cases}$$

Montrons que $\vec{d} \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$ sont colinéaires :

$$\begin{aligned} \det(\vec{d}; \overrightarrow{AB}) &= x_{\vec{d}} \times y_{\overrightarrow{AB}} - y_{\vec{d}} \times x_{\overrightarrow{AB}} \\ &= b(y_B - y_A) - (-a)(x_B - x_A) \\ &= by_B - by_A + ax_B - ax_A \\ &= ax_B + by_B - (ax_A + by_A) \\ &= -c - (-c) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Par définition, $\overrightarrow{AB}$ dirige la droite $\mathcal{D}$ et $\vec{d}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AB}$. On en déduit que $\vec{d}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$. $\square$

Exemple : Soit $\mathcal{D}$ la droite d'équation $3x - 4y + 2 = 0$. Déterminons un vecteur directeur de $\mathcal{D}$. On a $a = 3$ et $b = -4$, d'après la propriété ci-dessus, $\vec{d} \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{d} \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$.

Méthode 2 pour tracer une droite connaissant son équation cartésienne dans un repère :

1. Déterminer un vecteur directeur à partir de l'équation cartésienne.
2. Déterminer les coordonnées d'un point appartenant à la droite.
3. Placer le point dans un repère et construire un représentant du vecteur directeur ayant pour origine ce point.
4. Tracer la droite passant par le point et dirigée par le vecteur directeur.



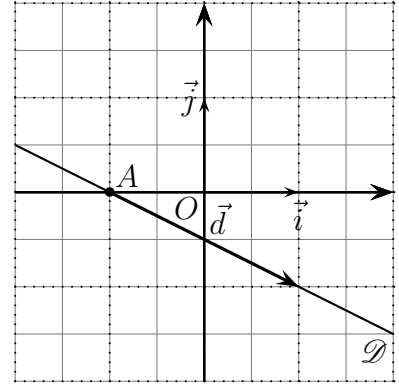
Exemple : Traçons la droite $\mathcal{D}$ d'équation cartésienne $x + 2y + 1 = 0$ dans le repère ci-contre à l'aide d'un point et d'un vecteur directeur.

1. D'après la propriété précédente, $\vec{d}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$.

2. Cherchons les coordonnées d'un point A appartenant à $\mathcal{D}$ tel que $y_A = 0$.

$$\begin{aligned} A \in \mathcal{D} &\iff x_A + 2y_A + 1 = 0 \\ &\iff x_A + 2 \times 0 + 1 = 0 \\ &\iff x_A + 1 = 0 \\ &\iff x_A = -1. \end{aligned}$$

Donc $A(-1; 0) \in \mathcal{D}$. Il suffit à présent de placer A puis construire $\vec{d}$ à partir de A pour obtenir $\mathcal{D}$.



Exercices : 7.12 à 7.14; 7.30 à 7.32.

7.2.3 Du vecteur directeur à l'équation cartésienne

Proposition 7.4. Soient $(O; \vec{i}; \vec{j})$ un repère et $\mathcal{D}$ une droite du plan. Si $\vec{d}\begin{pmatrix} x_{\vec{d}} \\ y_{\vec{d}} \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$, alors il existe un réel c tel que $y_{\vec{d}}x - x_{\vec{d}}y + c = 0$ soit une équation cartésienne de $\mathcal{D}$.

Démonstration. Soient $(O; \vec{i}; \vec{j})$ un repère et $\mathcal{D}$ une droite du plan et $\vec{d}\begin{pmatrix} x_{\vec{d}} \\ y_{\vec{d}} \end{pmatrix}$ un vecteur directeur de $\mathcal{D}$.

Soient $A(x_A; y_A)$ et $M(x; y)$ deux points de $\mathcal{D}$. Si A et M sont distincts, alors $\overrightarrow{AM}$ dirige $\mathcal{D}$. Sinon, $\overrightarrow{AM}$ est le vecteur nul. Dans les deux cas, les vecteurs $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \end{pmatrix}$ et $\vec{d}\begin{pmatrix} x_{\vec{d}} \\ y_{\vec{d}} \end{pmatrix}$ sont colinéaires et leur déterminant est nul, d'où :

$$\begin{aligned} \det(\overrightarrow{AM}; \vec{d}) = 0 &\iff x_{\overrightarrow{AM}} \times y_{\vec{d}} - y_{\overrightarrow{AM}} \times x_{\vec{d}} = 0 \\ &\iff (x - x_A)y_{\vec{d}} - (y - y_A)x_{\vec{d}} = 0 \\ &\iff y_{\vec{d}}x - y_{\vec{d}}x_A + x_{\vec{d}}y - x_{\vec{d}}y_A = 0 \\ &\iff y_{\vec{d}}x - x_{\vec{d}}y + x_{\vec{d}}y_A - y_{\vec{d}}x_A = 0. \end{aligned}$$

Ainsi les coordonnées de M vérifient l'équation $y_{\vec{d}}x - x_{\vec{d}}y + c = 0$ en notant $c = x_{\vec{d}}y_A - y_{\vec{d}}x_A$. $\square$

Méthode 1 pour déterminer une équation cartésienne connaissant un point et un vecteur directeur de la droite : Soit $\mathcal{D}$ la droite passant par $A(x_A; y_A)$ et de vecteur directeur $\vec{d} \begin{pmatrix} x_d \\ y_d \end{pmatrix}$.

1. Énoncer le fait qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $\mathcal{D}$ ait pour équation $y_d x - x_d y + c = 0$.
2. Déterminer la valeur de c en utilisant le fait que A appartient à $\mathcal{D}$ et donc que ses coordonnées sont solutions de l'équation cartésienne.

Exemple : Soit $\mathcal{D}$ la droite passant par $A(3; 4)$ et de vecteur directeur $\vec{d} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1. $\vec{d} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ donc il existe un réel c tel que $\mathcal{D}$ ait pour équation cartésienne

$$1x - 2y + c = 0.$$

2. Par ailleurs

$$\begin{aligned} A \in \mathcal{D} &\iff x_A - 2y_A + c = 0 \\ &\iff 3 - 2 \times 4 + c = 0 \\ &\iff c = 5. \end{aligned}$$

$\mathcal{D}$ a donc pour équation cartésienne $x - 2y + 5 = 0$.

Méthode 2 pour déterminer une équation cartésienne connaissant un point et un vecteur directeur de la droite : Soit $\mathcal{D}$ la droite passant par $A(x_A; y_A)$ et de vecteur directeur $\vec{d} \begin{pmatrix} x_d \\ y_d \end{pmatrix}$.

1. Poser $M(x; y)$ un point quelconque de $\mathcal{D}$ et remarquer que $\overrightarrow{AM}$ est directeur de $\mathcal{D}$.
2. En déduire que $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{d}$ sont colinéaires et donc que leur déterminant est nul puis calculer ce dernier afin d'obtenir l'équation cartésienne.

Exemple : On reprend $\mathcal{D}$ la droite passant par $A(3; 4)$ et de vecteur directeur $\vec{d} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1. Soit $M(x; y)$ un point de $\mathcal{D}$. Comme $A \in \mathcal{D}$, $\overrightarrow{AM}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$.
2. $\overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} x-3 \\ y-4 \end{pmatrix}$ et $\vec{d} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont donc colinéaires et leur déterminant est nul, d'où :

$$\begin{aligned} \det(\overrightarrow{AM}; \vec{d}) = 0 &\iff x_{\overrightarrow{AM}} \times y_d - y_{\overrightarrow{AM}} \times x_d = 0 \\ &\iff (x-3) \times 1 - (y-4) \times 2 = 0 \\ &\iff x - 3 - 2y + 8 = 0 \\ &\iff x - 2y + 5 = 0. \end{aligned}$$

$\mathcal{D}$ a donc pour équation cartésienne $x - 2y + 5 = 0$.

Exercices : 7.15 et 7.16; 7.33 et 7.34.



7.3 Équation réduite de droite

7.3.1 Équation réduite de droite

Proposition 7.5. [Admise] Soient $(O; \vec{i}; \vec{j})$ un repère et $\mathcal{D}$ une droite du plan.

1. Si $\mathcal{D}$ est parallèle à l'axe des ordonnées, alors il existe un réel x_0 tel que $\mathcal{D}$ soit l'ensemble des points $M(x; y)$ de même abscisse x_0 : $x = x_0$ est une équation de $\mathcal{D}$.
2. Si $\mathcal{D}$ n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées, alors il existe deux réels m et p tels que $\mathcal{D}$ soit l'ensemble des points $M(x; y)$ vérifiant l'équation

$$y = mx + p.$$

- Le réel m est appelé **coefficient directeur**.
- Le réel p est appelé **ordonnée à l'origine**.

Exemples :

- $y = 2x + 5$ et $x = -2$ sont des équations réduites de droites.
- $y = x^2$ et $y = x + \sqrt{x}$ ne sont pas des équations réduites de droites.

Exemples : Soient $(O; \vec{i}; \vec{j})$ un repère du plan, $\mathcal{D}$ une droite d'équation $y = 3x - 1$ et $A(5; 10)$ et $B(2; 5)$ deux points dans ce repère. Déterminons si A et B appartiennent à $\mathcal{D}$, pour cela, il suffit de vérifier si les coordonnées de A et B sont solutions de l'équation réduite.

1.

$$\begin{aligned} A \in \mathcal{D} &\iff y_A = 3x_A - 1 \\ &\iff 10 = 3 \times 5 - 1 \\ &\iff 10 = 14. \end{aligned}$$

Donc $A \notin \mathcal{D}$.

2.

$$\begin{aligned} B \in \mathcal{D} &\iff y_B = 3x_B - 1 \\ &\iff 5 = 3 \times 2 - 1 \\ &\iff 5 = 5. \end{aligned}$$

Donc $B \in \mathcal{D}$.

Méthode 1 pour tracer une droite connaissant son équation réduite dans un repère :

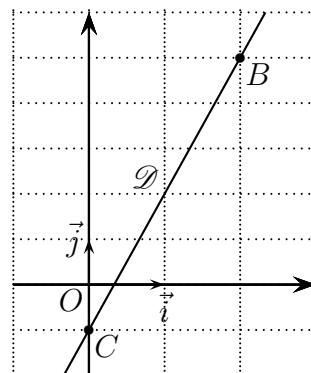
1. Déterminer les coordonnées de deux points appartenant à la droite.
2. Placer ces deux points dans le repère et tracer la droite passant par ces deux points.

Exemple : Traçons la droite $\mathcal{D}$ de l'exemple précédent dans le repère ci-dessous.

On sait que $B \in \mathcal{D}$. Cherchons les coordonnées d'un point C appartenant à $\mathcal{D}$. Le plus simple est de choisir une valeur pour x_C et de calculer y_C à l'aide l'équation réduite. Prenons $x_C = 0$.

$$\begin{aligned} C \in \mathcal{D} &\iff y_C = 3x_C - 1 \\ &\iff y_C = 3 \times 0 - 1 \\ &\iff y_C = -1. \end{aligned}$$

Donc $C(0; -1) \in \mathcal{D}$.



Exercices : 7.17 à 7.21 ; 7.35.

7.3.2 Coefficient directeur et ordonnée à l'origine

Proposition 7.6. Soient $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ deux points d'un repère tels que $x_A \neq x_B$. Alors le coefficient directeur de la droite (AB) est

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}.$$

Démonstration. Soient $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ deux points d'un repère tels que $x_A \neq x_B$. Soit m le coefficient directeur de la droite (AB) et p son ordonnée à l'origine; (AB) a donc pour équation $y = mx + p$. Comme $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$, on a $y_A = mx_A + p$ et $y_B = mx_B + p$. On a alors :

$$y_B - y_A = mx_B + p - (mx_A + p) = m(x_B - x_A).$$

Comme $x_A \neq x_B$, on a $x_B - x_A \neq 0$ et donc $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$. □

Méthodes pour déterminer l'équation réduite connaissant les coordonnées de deux points de la droite :

1. Si les deux points ont la même abscisse x_0 , l'équation réduite est $x = x_0$.
2. Sinon :
 - (a) Énoncer l'existence m et p deux réels tels que $\mathscr{D}$ ait pour équation réduite $y = mx + p$.
 - (b) Déterminer la valeur de m à l'aide de la formule précédente.
 - (c) Déterminer la valeur de p en remarquant que les coordonnées de A (ou de B) sont solutions de l'équation réduite.

Exemples : Soient A et B deux points d'un repère.

1. Pour $A(-4; -3)$ et $B(-4; -1)$. Déterminons l'équation réduite de (AB) . A et B ont la même abscisse, (AB) est donc parallèle à l'axe des ordonnées et a pour équation réduite $x = -4$.
2. Pour $A(-4; -3)$ et $B(5; -1)$. Déterminons l'équation réduite de (AB) .
 - (a) A et B n'ont pas la même abscisse, (AB) n'est donc pas parallèle à l'axe des ordonnées : il existe deux réels m et p tels que (AB) ait pour équation réduite $y = mx + p$.
 - (b) On a $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-1 - (-3)}{5 - (-4)} = \frac{2}{9}$.



(c) Il reste à déterminer p . Comme $A \in (AB)$, on a

$$\begin{aligned}y_A = mx_A + p &\iff -3 = \frac{2}{9} \times (-4) + p \\&\iff -3 = -\frac{8}{9} + p \\&\iff p = -3 + \frac{8}{9} \\&\iff p = -\frac{27}{9} + \frac{8}{9} \\&\iff p = -\frac{19}{9}.\end{aligned}$$

(AB) a donc pour équation réduite $y = \frac{2}{9}x - \frac{19}{9}$.

Exercices : 7.22 ; 7.36.

7.3.3 Coefficient et vecteur directeurs

Corollaire 7.1. Soient $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ deux points d'un repère tels que $x_A \neq x_B$. Alors $\vec{d}\left(\frac{1}{m}\right)$ est un vecteur directeur de la droite (AB) .

Démonstration. Soient $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ deux points d'un repère tels que $x_A \neq x_B$. D'après la propriété précédente, $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$. Par ailleurs, $\overrightarrow{AB}\left(\frac{x_B - x_A}{y_B - y_A}\right)$ est un vecteur directeur de (AB) . $\vec{d}\left(\frac{1}{m}\right)$ est un vecteur directeur de (AB) si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{d}$ sont colinéaires, si et seulement si leur déterminant est nul.

$$\begin{aligned}\det(\overrightarrow{AB}; \vec{d}) &= x_{\overrightarrow{AB}}y_{\vec{d}} - x_{\vec{d}}y_{\overrightarrow{AB}} \\&= (x_B - x_A) \times m - 1 \times (y_B - y_A) \\&= (x_B - x_A) \times \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} - (y_B - y_A) \\&= (y_B - y_A) - (y_B - y_A) \\&= 0.\end{aligned}$$

On en déduit que $\vec{d}$ est un vecteur directeur de la droite (AB) . □

Méthode 2 pour tracer une droite connaissant son équation réduite dans un repère :

1. Déterminer les coordonnées d'un point appartenant à la droite.
2. Déterminer les coordonnées d'un vecteur directeur en remarquant que $\vec{d}\left(\frac{1}{m}\right)$.
3. Placer le point dans un repère et construire un représentant du vecteur directeur ayant pour origine ce point puis tracer la droite passant par ce point et dirigée par ce vecteur.

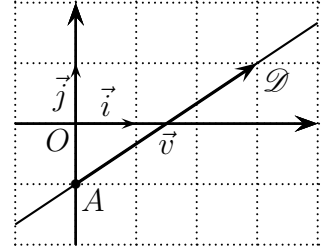
Exemple : Construisons la droite $\mathcal{D}$ d'équation réduite $y = \frac{2}{3}x - 1$ dans le repère ci-dessous.

1. Cherchons les coordonnées d'un point A appartenant à $\mathcal{D}$. On choisit une valeur pour x_A et on calcule y_A à l'aide l'équation réduite.

Prenons $x_A = 0$, $A \in \mathcal{D}$ si et seulement si

$$y_A = \frac{2}{3}x_A - 1 = \frac{2}{3} \times 0 - 1 = -1.$$

Donc $A(0; -1) \in \mathcal{D}$.



2. Par ailleurs, on sait que $\vec{d} \begin{pmatrix} 1 \\ 2/3 \end{pmatrix}$ est vecteur directeur de $\mathcal{D}$ et donc $\vec{v} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ aussi puisque $\vec{v} = 3\vec{d}$. On peut donc se ramener à la méthode vue pour les équations cartésiennes.

Exercices : 7.23; 7.37.

7.3.4 Lecture graphique d'équation réduite

Corollaire 7.2. Soit $(O; \vec{i}; \vec{j})$ un repère du plan. Si $\vec{d} \begin{pmatrix} x_{\vec{d}} \\ y_{\vec{d}} \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur d'une droite $\mathcal{D}$ d'équation réduite $y = mx + p$, alors $m = \frac{y_{\vec{d}}}{x_{\vec{d}}}$.

Démonstration. Soit $(O; \vec{i}; \vec{j})$ un repère du plan. Soit $\vec{d} \begin{pmatrix} x_{\vec{d}} \\ y_{\vec{d}} \end{pmatrix}$ un vecteur directeur d'une droite $\mathcal{D}$ d'équation réduite $y = mx + p$. Comme $\vec{d}$ est un vecteur directeur $\mathcal{D}$, il existe $A, B \in \mathcal{D}$ tels que $\vec{d} = \overrightarrow{AB}$. Comme $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$ que $\vec{d} = \overrightarrow{AB}$, on en déduit que

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{y_{\vec{d}}}{x_{\vec{d}}}.$$

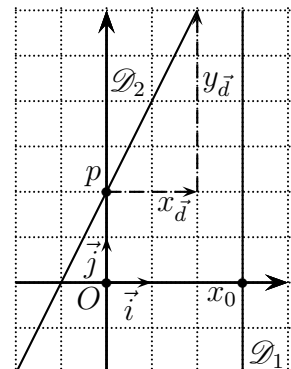
□

Méthodes pour lire graphiquement une équation réduite de droite : On a deux cas.

$\mathcal{D}_1$ **parallèle à l'axe des ordonnées :** On lit l'équation $x = x_0$ en prenant l'abscisse x_0 de n'importe quel point de la droite $\mathcal{D}_1$.

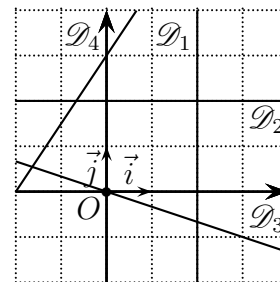
$\mathcal{D}_2$ **non parallèle à l'axe des ordonnées :**

- La droite $\mathcal{D}_2$ passe par le point $(0; p)$.
- On obtient m en lisant les coordonnées d'un vecteur directeur $\vec{d} \begin{pmatrix} x_{\vec{d}} \\ y_{\vec{d}} \end{pmatrix}$ de $\mathcal{D}_2$ et en effectuant la division $m = \frac{y_{\vec{d}}}{x_{\vec{d}}}$.



Exemples :

Droite	x_0	$x = x_0$	m	p	$y = mx + p$
$\mathcal{D}_1$	2	$x = 2$			
$\mathcal{D}_2$			0	4	$y = 4$
$\mathcal{D}_3$			$\frac{1}{3}$	0	$y = \frac{1}{3}x$
$\mathcal{D}_4$			$\frac{3}{2}$	3	$y = \frac{3}{2}x + 3$

**Exercices :** 7.24; 7.38.

7.4 Capacités attendues

- Déterminer une équation de droite à partir de deux points, un point et un vecteur directeur ou un point et la pente.
- Déterminer la pente ou un vecteur directeur d'une droite donnée par une équation ou une représentation graphique.
- Tracer une droite connaissant son équation cartésienne ou réduite.
- Établir que trois points sont alignés ou non.

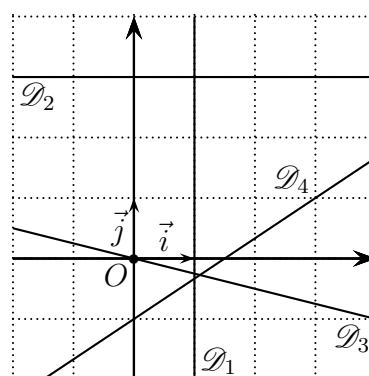
7.5 Exercices

7.5.1 Progresser

Droites du plan et vecteur directeur d'une droite

Exercice 7.1. Donner pour chacune des droites suivantes les coordonnées de deux vecteurs directeurs $\vec{d}$ et $\vec{d}'$ dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

Droite	$\mathcal{D}_1$	$\mathcal{D}_2$	$\mathcal{D}_3$	$\mathcal{D}_4$
$\vec{d} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$				
$\vec{d}' \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$				



Exercice 7.2. Dans chaque cas, déterminer si $\vec{u}$ est un vecteur directeur de la droite (AB) .

1. $A(1; 0)$ et $B(0; 1)$; $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2. $A(2; 3)$ et $B(-3; 4)$; $\vec{u} \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Alignement de points

Exercice 7.3. Dans chacun des cas suivants, déterminer si les points A , B et C sont alignés.

1. $A(2; 13)$, $B(-2; -7)$ et $C(11; 58)$.
2. $A(9; 20)$, $B(2; -1)$ et $C(25; 71)$.

Exercice 7.4. Dans chacun des cas suivants, déterminer la coordonnée manquante de G pour que E , F et G soient alignés.

1. $E(3; -2)$, $F(5; 4)$ et $G(x_G; -6)$.
2. $E(-1; 0)$, $F(4; 7)$ et $G(-2; y_G)$.

Exercice 7.5. Dans chacun des cas suivants, déterminer si A , B et C forment un repère du plan.

1. A , B et C ne sont pas alignés.
2. ABC est un triangle équilatéral.
3. $ABDC$ est un carré.
4. A , B et C sont sur une même droite.

Exercice 7.6. [Algorithmie] Écrire un algorithme ou dessiner un logigramme déterminant si trois points sont alignés connaissant leurs coordonnées.

Exercice 7.7. On considère les points $A(0; 6)$, $B(10; 4)$, $C(0; 6)$ et $D(2; 0)$.

1. Calculer les coordonnées des points E et F définis par :

$$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{DF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}.$$

2. Montrer que D , E et F sont alignés.

Équations cartésiennes de droite

Exercice 7.8. Parmi les équations suivantes, quelles sont celles qui peuvent être des équations cartésiennes de droites ? Justifier.

1. $-4x + 3y - 2 = 0$.
2. $-3(1 + x) + y = 0$.
3. $xy = 5$.
4. $\frac{1}{x} - y + 5 = 0$
5. $\sqrt{x + y - 3} = 0$.

Exercice 7.9. Dans chaque cas, statuer – en justifiant – de l'appartenance du point A à la droite $\mathcal{D}$.

1. $\mathcal{D} : x + 4y - 20 = 0$ et $A(-4; 9)$.
2. $\mathcal{D} : -\frac{2}{3}x + 2y - \frac{2}{3} = 0$ et $A\left(1; \frac{2}{3}\right)$.

Exercice 7.10. Dans chaque cas, calculer la coordonnée manquante du point A pour qu'il appartienne à la droite d'équation donnée.

1. $A(-5; y_A)$ et $\mathcal{D} : 3x - 2y + 1 = 0$.
2. $A\left(x_A; \frac{1}{2}\right)$ et $\mathcal{D} : 7x + y - 1 = 0$.

Exercice 7.11. Tracer dans un repère du plan la droite $\mathcal{D}$ d'équation cartésienne $2x + 3y - 6 = 0$.



De l'équation cartésienne au vecteur directeur**Exercice 7.12.** Déterminer deux vecteurs directeurs des droites d'équations ci-dessous.

1. $3x + y - 1 = 0$. 2. $-2x + 7y + 3 = 0$. 3. $x - 4y = 0$. 4. $9y + 7 = 0$.

Exercice 7.13. Tracer dans un repère les droites d'équation cartésienne ci-dessous.

1. $\mathcal{D}_1 : 3x + y - 1 = 0$. 2. $\mathcal{D}_2 : -2x + 7y + 3 = 0$.

Exercice 7.14. Dans chaque cas, déterminer si le vecteur $\vec{v}$ est un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}$.

1. $\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\mathcal{D} : -3y + 1 = 0$. 2. $\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ 2/5 \end{pmatrix}$ et $\mathcal{D} : -2x + 5y + 2 = 0$.

Du vecteur directeur à l'équation cartésienne**Exercice 7.15.** Dans chaque cas, donner une équation cartésienne de la droite $\mathcal{D}$ passant par le point A de vecteur directeur $\vec{d}$.

1. $A(3; 1)$ et $\vec{d} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$. 2. $A(5; -1)$ et $\vec{d} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 7.16. Déterminer les équations cartésiennes des droites de l'exercice 7.1.**Équations réduites de droites****Exercice 7.17.** Parmi les équations suivantes, quelles sont celles qui sont des équations réduites de droites ? Justifier.

1. $y = -4x + 2$. 3. $y = 2\sqrt{x} + 1$. 5. $y = \sqrt{2}x + 1$
2. $x = 4$. 4. $y = x^2$. 6. $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Exercice 7.18. Dans chaque cas, statuer – en justifiant – de l'appartenance du point A à la droite $\mathcal{D}$.

1. $\mathcal{D} : y = 3x - 1$ et $A(2; 9)$. 3. $\mathcal{D} : x = -1$ et $A(-1; 5)$.
2. $\mathcal{D} : y = -4x - 2$ et $A(1; -6)$. 4. $\mathcal{D} : x = 7$ et $A(0; 3)$.

Exercice 7.19. Tracer la droite $\mathcal{D}$ dans un repère dans chacun des cas suivants à l'aide de deux points de $\mathcal{D}$.

1. $\mathcal{D} : y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$; 2. $\mathcal{D} : y = \frac{5}{7}x - \frac{1}{7}$.

Exercice 7.20. Dans chaque cas, calculer la coordonnée manquante du point A pour qu'il appartienne à la droite d'équation donnée.

1. $A(-5; y_A)$ et $\mathcal{D} : y = 7x$.
2. $A(x_A; \frac{1}{2})$ et $\mathcal{D} : y = \frac{1}{2}x + 1$.
3. $A(x_A; -1)$ et $\mathcal{D} : x = 8$.
4. $A(1; y_A)$ et $\mathcal{D} : x = \frac{1}{2}$.

Exercice 7.21. Donner l'équation réduite des droites d'équations cartésiennes ci-dessous.

1. $-2x + 3y + 1 = 0$.
2. $7x + 5y - 2 = 0$.
3. $\frac{5}{2}x + \frac{1}{4}y = 0$.

Coefficient directeur et ordonnée à l'origine

Exercice 7.22. Dans chacun des cas suivants, déterminer l'équation réduite de (AB) .

1. $A(1; 2)$ et $B(3; 4)$.
2. $A(0; 0)$ et $B(-4; -2)$.
3. $A(1; 2)$ et $B(1; 4)$.
4. $A(-3; -1)$ et $B(-3; 9)$.
5. $A(-\sqrt{3}; -2\sqrt{2})$ et $B(2\sqrt{2}; \sqrt{3})$.
6. $A(\frac{2}{3}; -\frac{1}{2})$ et $B(-\frac{1}{3}; \frac{3}{2})$.

Coefficient et vecteur directeurs

Exercice 7.23. Tracer la droite $\mathcal{D}$ dans un repère dans chacun des cas suivants à l'aide d'un point et d'un vecteur directeur de $\mathcal{D}$.

1. $\mathcal{D} : y = \frac{1}{3}x + 1$;
2. $\mathcal{D} : y = \frac{3}{2}x - 2$.

Lecture graphique d'équation réduite

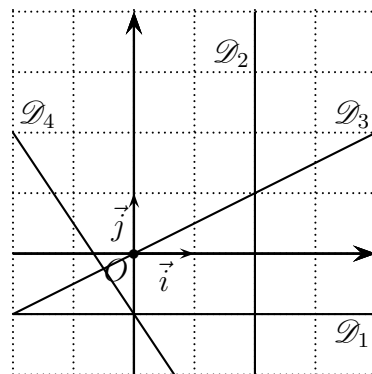
Exercice 7.24. Déterminer les équations réduites de l'exercice 7.1.

7.5.2 S'entraîner

Droites du plan et vecteur directeur d'une droite

Exercice 7.25. Donner pour chacune des droites suivantes les coordonnées de deux vecteurs directeurs $\vec{d}$ et $\vec{d}'$ dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

Droite	$\mathcal{D}_1$	$\mathcal{D}_2$	$\mathcal{D}_3$	$\mathcal{D}_4$
$\vec{d} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$				
$\vec{d}' \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$				



Exercice 7.26. Dans chaque cas, déterminer si $\vec{u}$ est un vecteur directeur de la droite (AB) .

1. $A(-2; 5)$ et $B(6; 9)$; $\vec{u} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$.
2. $A(0; -4)$ et $B(10; -9)$; $\vec{u} \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Alignement de points

Exercice 7.27. Dans chacun des cas suivants, déterminer la coordonnée manquante G pour que E , F et G soient alignés.

1. $E(8; -2)$, $F(1; 4)$ et $G(x_G; 0)$.
2. $E(-1; 5)$, $F(6; 7)$ et $G(0; y_G)$.

Équations cartésiennes de droite

Exercice 7.28. Dans chaque cas, calculer la coordonnée manquante du point A pour qu'il appartienne à la droite d'équation donnée.

1. $A(x_A; -5)$ et $\mathcal{D} : 3x - 2y + 1 = 0$.
2. $A\left(\frac{1}{2}; y_A\right)$ et $\mathcal{D} : 7x + y - 1 = 0$.

Exercice 7.29. Tracer dans un repère du plan la droite $\mathcal{D}$ d'équation cartésienne $4x - 6y + 12 = 0$.

De l'équation cartésienne au vecteur directeur

Exercice 7.30. Déterminer deux vecteurs directeurs des droites d'équations ci-dessous.

1. $-x - y - 1 = 0$.
2. $-4x + 6y + 3 = 0$.
3. $x - y = 0$.
4. $9x + 7 = 0$.

Exercice 7.31. Tracer dans un repère les droites d'équation cartésienne ci-dessous.

1. $\mathcal{D}_1 : -4x + 6y + 3 = 0$.
2. $\mathcal{D}_2 : 9x + 7 = 0$.

Exercice 7.32. Dans chaque cas, déterminer si le vecteur $\vec{v}$ est un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}$.

1. $\vec{v} \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \end{pmatrix}$ et $\mathcal{D} : 3x - 2y + 1 = 0$.
2. $\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ 1/7 \end{pmatrix}$ et $\mathcal{D} : 7x + y - 1 = 0$.

Du vecteur directeur à l'équation cartésienne

Exercice 7.33. Dans chaque cas, donner une équation cartésienne de la droite $\mathcal{D}$ passant par le point A de vecteur directeur $\vec{d}$.

1. $A(-2; 0)$ et $\vec{d} \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$.
2. $A(-1; 1)$ et $\vec{d} \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 7.34. Déterminer les équations cartésiennes des droites de l'exercice 7.25.

Équations réduites de droites

Exercice 7.35. Dans chaque cas, calculer la coordonnée manquante du point A pour qu'il appartienne à la droite d'équation donnée.

1. $A(-5; y_A)$ et $\mathcal{D} : y = -x + 4$.
2. $A\left(x_A; \frac{1}{2}\right)$ et $\mathcal{D} : y = \frac{1}{4}x - 2$.
3. $A(x_A; -1)$ et $\mathcal{D} : x = -5$.
4. $A\left(\frac{1}{2}; y_A\right)$ et $\mathcal{D} : x = \frac{1}{2}$.

Coefficient directeur et ordonnée à l'origine

Exercice 7.36. Dans chacun des cas suivants, déterminer l'équation réduite de (AB) .

1. $A(5; 4)$ et $B(0; -2)$.
2. $A(-2; 1)$ et $B(-2; 0)$.
3. $A(-\sqrt{5}; -2\sqrt{7})$ et $B(2\sqrt{7}; \sqrt{5})$.
4. $A\left(\frac{2}{5}; -\frac{1}{5}\right)$ et $B\left(-\frac{1}{5}; \frac{3}{2}\right)$.

Coefficient et vecteur directeurs

Exercice 7.37. Tracer la droite $\mathcal{D}$ dans un repère dans chacun des cas suivants à l'aide d'un point et d'un vecteur directeur de $\mathcal{D}$.

1. $\mathcal{D} : y = -3x + 4$;
2. $\mathcal{D} : y = 0,25x$.

Lecture graphique d'équation réduite

Exercice 7.38. Déterminer les équations réduites de l'exercice 7.25.

7.5.3 Le Flashback !

Flashback 7.1. Résoudre les équations suivantes :

1. $(4t + 5)(6 - t) = 0$;
2. $\frac{(2u - 1)u}{u^2 + 1} = 0$;

Flashback 7.2. Résoudre les inéquations suivantes :

1. $\frac{1}{2}z + 1 < 1 - \frac{1}{4}z$;
2. $s(s + 7)(9s - 2) < 0$;
3. $k(k^2 + 2k + 1) \leq 0$;
4. $(4 - t^2)(t^2 - 36) < 0$;
5. $(y + 2)^2 - 25 \geq 0$;
6. $t^2 - 6t + 9 \leq 0$;
7. $\frac{z}{z^2 + 1} < 0$;
8. $\frac{(3z + 12)(1 - 6z)}{z^2 + 1} \geq 0$.

Flashback 7.3. Résoudre le système $\begin{cases} 3x + 5y = 9, \\ 9x - 7y = -1. \end{cases}$

