**Nom :** **Prénom :** **T$^{\text{le}}$ :**

# Spécialité mathématiques

## Continuité

Sujet 1 20/01/2026

**Note :** / 18 Durée : 1 h 30

— La calculatrice est autorisée.
— Le sujet est à rendre avec la copie.

**Exercice 1 [ / 9]**

Un biologiste s'intéresse à l'évolution de la population d'une espèce animale sur une île du Pacifique. Au début de l'année 2020, cette population comptait 600 individus. On considère que l'espèce sera menacée d'extinction sur cette île si sa population devient inférieure ou égale à 20 individus. Le biologiste modélise le nombre d'individus par la suite $(u_n)$ définie par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_0 & = & 0,6 \\ u_{n+1} & = & 0,75u_n\left(1-0,15u_n\right) \end{array}\right.$$

où pour tout entier naturel $n$, $u_n$ désigne le nombre d'individus, en milliers, au début de l'année $2020+n$.

**1.** **[ / 1]** Estimer, selon ce modèle, le nombre d'individus présents sur l'île au début de l'année 2021 puis au début de l'année 2022.

Soit $f$ la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;1]$ par $f(x)=0,75x(1-0,15x)$.

**2.** **[ / 1]** Montrer que la fonction $f$ est croissante sur l'intervalle $[0\,;1]$ et dresser son tableau de variations.

**3.** **[ / 1]** Résoudre dans l'intervalle $[0\,;1]$ l'équation $f(x)=x$.

**4.** On remarquera pour la suite de l'exercice que, pour tout entier naturel $n$, $u_{n+1}=f(u_n)$.

(a) **[ / 2]** Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n$, $0\leqslant u_{n+1}\leqslant u_n\leqslant 1$.

(b) **[ / 1]** En déduire que la suite $(u_n)$ est convergente.

(c) **[ / 1]** Déterminer la limite $\ell$ de la suite $(u_n)$.

**5.** Le biologiste a l'intuition que l'espèce sera tôt ou tard menacée d'extinction.

(a) **[ / 1]** Justifier que, selon ce modèle, le biologiste a raison.

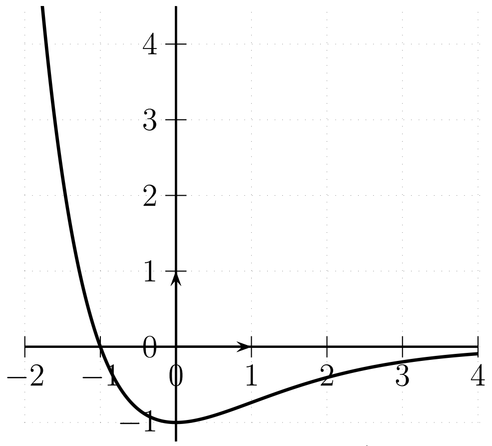
(b) **[ / 1]** Le biologiste a programmé en langage Python la fonction `menace()` ci-dessous. Donner la valeur numérique renvoyée lorsqu'on appelle la fonction `menace()`. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

```
def menace() :
    u = 0.6
    n = 0
    while u > 0.02 :
        u = 0.75 * u * (1 - 0.15 * u)
        n = n + 1
    return n
```

**Exercice 2 [ / 9]**

**Partie 1**

On donne ci-dessous, dans le plan rapporté à un repère orthonormé, la courbe représentant la fonction dérivée $f'$ d'une fonction $f$ dérivable sur $\mathbb{R}$.




Courbe représentant la **dérivée** $f'$ de la fonction $f$.

À l'aide de cette courbe, conjecturer, en justifiant les réponses :

**1. [ / 1]** Le sens de variation de la fonction $f$ sur $\mathbb{R}$.

**2. [ / 1]** La convexité de la fonction $f$ sur $\mathbb{R}$.

**Partie 2**

On admet que la fonction $f$ mentionnée dans la Partie 1 est définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x+2)\mathrm{e}^{-x}$.

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de $f$ dans un repère orthonormé $\left(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\right)$.

On admet que la fonction $f$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, et on note $f'$ et $f''$ les fonctions dérivées première et seconde de $f$ respectivement.

**1.** (a) **[ / 1½]** Étudier les limites en $-\infty$ et $+\infty$ de $f$.

(b) **[ / ½]** Justifier que la courbe $\mathscr{C}$ admet une asymptote que l'on précisera.

**2.** (a) **[ / 1]** Montrer que, pour tout nombre réel $x$, $f'(x) = (-x-1)\mathrm{e}^{-x}$.

(b) **[ / 1]** Étudier les variations sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f$ et dresser son tableau de variations.

(c) **[ / 1½]** Montrer que l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution $\alpha$ sur l'intervalle $[-2\,;-1]$ dont on donnera une valeur approchée à $10^{-1}$ près.

**3. [ / 1½]** Déterminer, pour tout nombre réel $x$, l'expression de $f''(x)$ et étudier la convexité de la fonction $f$. Que représente pour la courbe $\mathscr{C}$ son point $A$ d'abscisse 0 ?

**Non noté :** Si vous avez fini l'évaluation, vous pouvez colorier Raichu.