Nom : **Prénom :** **T$^{\text{le}}$:**

Spécialité mathématiques

Continuité

Sujet 1 20/01/2026

Note : / 18 Durée : 1 h 30

— La calculatrice est autorisée.
— Le sujet est à rendre avec la copie.

Exercice 1 [/ 9]

Un biologiste s'intéresse à l'évolution de la population d'une espèce animale sur une île du Pacifique. Au début de l'année 2020, cette population comptait 600 individus. On considère que l'espèce sera menacée d'extinction sur cette île si sa population devient inférieure ou égale à 20 individus. Le biologiste modélise le nombre d'individus par la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 & = & 0,6 \\ u_{n+1} & = & 0,75u_n\,(1-0,15u_n) \end{cases}$$

où pour tout entier naturel n, u_n désigne le nombre d'individus, en milliers, au début de l'année $2020+n$.

1. **[/ 1]** Estimer, selon ce modèle, le nombre d'individus présents sur l'île au début de l'année 2021 puis au début de l'année 2022.

Solution:
— 2021 correspond à $n=1$, donc
$$u_1 = 0,75u_0 \times (1-0,15u_0) = 0,75\times 0,6\times(1-0,15\times 0,6) \simeq 0,410,$$
soit environ 410 individus.
— 2022 correspond à $n=2$, donc
$$u_2 = 0,75u_1 \times (1-0,15u_1) = 0,75\times 0,410\times(1-0,15\times 0,410) \simeq 0,288,$$
soit environ 288 individus.

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;1]$ par $f(x)=0,75x(1-0,15x)$.

2. **[/ 1]** Montrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0\,;1]$ et dresser son tableau de variations.

Solution: On a pour tout $x\in\mathbb{R}$,
$$f(x) = -0,1125x^2+0,75x.$$
f est une fonction polynôme dérivable sur $\mathbb{R}$, donc sur $[0\,;1]$ et sur cet intervalle :
$$f'(x) = -0,225x+0,75.$$
Or $0\leqslant x\leqslant 1 \implies 0,525\leqslant f'(x)\leqslant 0,75$. On a alors, sur $[0\,;1]$, $f'(x)>0$, donc f est strictement croissante de $f(0)=0$ à $f(1)=0,6375$.

3. **[/ 1]** Résoudre dans l'intervalle $[0\,;1]$ l'équation $f(x) = x$.

Solution: On a,

$$\begin{aligned} f(x) = x &\iff -0,1125x^2 + 0,75x = x \\ &\iff -0,1125x^2 - 0,25x = 0 \\ &\iff -x(0,1125x + 0,25) = 0. \end{aligned}$$

On en déduit, par règle du produit nul, que $x = 0$ ou $x = -\dfrac{0,25}{0,1125} < 0$. La solution de $f(x) = x$ sur $[0\,;1]$ est donc 0.

4. On remarquera pour la suite de l'exercice que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

(a) **[/ 2]** Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 1$.

Solution: On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_n : 0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 1$.

Initialisation : d'après la question 1, on a

$$0 \leqslant u_1 \leqslant u_0 \leqslant 1,$$

la propriété est donc initialisée.

Hérédité : soit $k \in \mathbb{N}$ fixé.
H.R. : Supposons $P_k : 0 \leqslant u_{k+1} \leqslant u_k \leqslant 1$.
Objectif : Montrons $P_{k+1} : 0 \leqslant u_{k+2} \leqslant u_{k+1} \leqslant 1$.
Par H.R, on a

$$\begin{aligned} & 0 \leqslant u_{k+1} \leqslant u_k \leqslant 1 \\ \implies & f(0) \leqslant f(u_{k+1}) \leqslant f(u_k) \leqslant f(1) \quad \text{ineg. conservées car } f \text{ croissante sur } [0\,;1] \\ \implies & 0 \leqslant u_{k+2} \leqslant u_{k+1} \leqslant 0,6375 < 1. \end{aligned}$$

On a donc $P_k \implies P_{k+1}$.

Conclusion : par principe de récurrence, on a, pour tout $n \in \mathbb{N} : 0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 1$.

(b) **[/ 1]** En déduire que la suite (u_n) est convergente.

Solution: D'après la question précédente, (u_n) est décroissante et minorée par 0, elle converge donc vers une limite $0 \leqslant \ell \leqslant 1$.

(c) **[/ 1]** Déterminer la limite ℓ de la suite (u_n).

Solution: La fonction f est un polynôme donc est elle continue. Par passage à la limite dans l'expression $u_{n+1} = f(u_n)$, on obtient $\ell = f(\ell)$. Or d'après la question 3, la solution de cette équation dans $[0\,;1]$ est 0, on en déduit que $\ell = 0$.

5. Le biologiste a l'intuition que l'espèce sera tôt ou tard menacée d'extinction.

(a) **[/ 1]** Justifier que, selon ce modèle, le biologiste a raison.

Solution: D'après la question précédente, (u_n) est décroissante et tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. Il existe donc une année n telle que $u_n \leqslant 20$, autrement dit telle que l'espèce soit menacée d'extinction.

(b) **[/ 1]** Le biologiste a programmé en langage Python la fonction `menace()` ci-dessous. Donner la valeur numérique renvoyée lorsqu'on appelle la fonction `menace()`. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

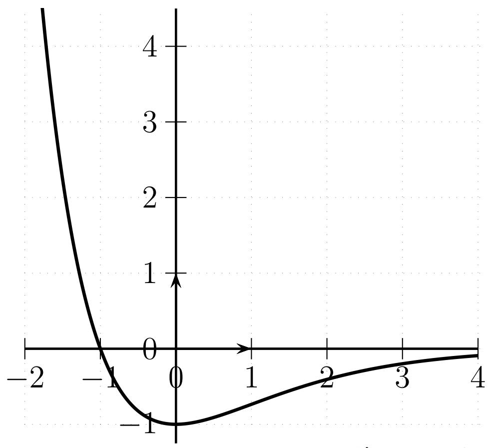
```
def menace() :
    u = 0.6
    n = 0
    while u > 0.02 :
        u = 0.75 * u * (1 - 0.15 * u)
        n = n + 1
    return n
```

Solution: La fonction renvoie 11, c'est le nombre d'années avant que l'espèce ne passe en dessous des 0,02 milliers d'individus, autrement dit 20 individus, et ne soit donc considérée comme menacée.

Exercice 2 [/ 9]

Partie 1

On donne ci-dessous, dans le plan rapporté à un repère orthonormé, la courbe représentant la fonction dérivée f' d'une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$.



Courbe représentant la **dérivée** f' de la fonction f.

À l'aide de cette courbe, conjecturer, en justifiant les réponses :

1. [/ 1] Le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

Solution: On peut conjecturer le tableau de signes / variations ci-dessous en admettant que f' ne change plus de signe :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

2. [/ 1] La convexité de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

Solution: f' est semble décroissante sur $]-\infty\,;0]$, f serait donc concave sur cet intervalle. De même, comme f' semble croissante sur $[0\,;+\infty[$, f y serait convexe.

Partie 2

On admet que la fonction f mentionnée dans la Partie 1 est définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x+2)\mathrm{e}^{-x}$.
On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $\left(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\right)$.
On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, et on note f' et f'' les fonctions dérivées première et seconde de f respectivement.

1. (a) **[/ 1½]** Étudier les limites en $-\infty$ et $+\infty$ de f.

Solution: On a $\lim\limits_{x\to-\infty} x+2 = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-x} = +\infty$, donc, par produit, on en déduit que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.
On a $\lim\limits_{x\to+\infty} x+2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$. On a donc une forme indéterminée du type « $+\infty \times 0$ ».
Levons l'indétermination. On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(x+2)\mathrm{e}^{-x} = x\mathrm{e}^{-x} + 2\mathrm{e}^{-x} = \dfrac{x}{\mathrm{e}^x} + 2\mathrm{e}^{-x}$.
Par croissance comparée, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$ et on en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{\mathrm{e}^x} = 0^+$. De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0^+$, donc par somme, on obtient $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0^+$.

(b) **[/ ½]** Justifier que la courbe $\mathscr{C}$ admet une asymptote que l'on précisera.

Solution: On a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0^+$, f admet donc une asymptote horizontale d'équation $x = 0$.

2. (a) **[/ 1]** Montrer que, pour tout nombre réel x, $f'(x) = (-x-1)\mathrm{e}^{-x}$.

Solution: f est dérivable comme produit de fonctions dérivables. Elle est de la forme $u \times v$ donc f' sera de la forme $u'v + uv'$ avec

$$u(x) = x+2, \quad u'(x) = 1, \quad v(x) = \mathrm{e}^{-x} \quad \text{et} \quad v'(x) = -\mathrm{e}^{-x}.$$

On a donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = 1 \times \mathrm{e}^{-x} - (x+2)\mathrm{e}^{-x} = (1-(x+2))\mathrm{e}^{-x} = (-x-1)\mathrm{e}^{-x}.$$

(b) **[/ 1]** Étudier les variations sur $\mathbb{R}$ de la fonction f et dresser son tableau de variations.

Solution: On déduit les variations de f du signe de f'. Comme, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{-x} > 0$, $f'(x)$ est du signe de $-x-1$. On en déduit :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	e	$\searrow$	0^+

(c) **[/ 1½]** Montrer que l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[-2\,;-1]$ dont on donnera une valeur approchée à 10^{-1} près.

Solution:
- f est continue sur l'intervalle $[-2\,;-1]$.
- f est strictement croissante sur l'intervalle $[-2\,;-1]$.

— $f(-2) = 0$, $f(-1) = \mathrm{e} > 2$ et f est strictement croissante donc $2 \in [0\,;\mathrm{e}] = f([-2\,;-1])$.

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique $\alpha \in [-2\,;-1]$ tel que $f(\alpha) = 2$.

À la calculatrice, on trouve l'encadrement $-1.6 \leqslant \alpha \leqslant -1.5$.

3. [/ 1½] Déterminer, pour tout nombre réel x, l'expression de $f''(x)$ et étudier la convexité de la fonction f. Que représente pour la courbe $\mathscr{C}$ son point A d'abscisse 0 ?

Solution: f' est dérivable comme produit de fonctions dérivables. Elle est de la forme $u \times v$ donc f'' sera de la forme $u'v + uv'$ avec

$$u(x) = -x - 1, \quad u'(x) = -1, \quad v(x) = \mathrm{e}^{-x} \quad \text{et} \quad v'(x) = -\mathrm{e}^{-x}.$$

On a donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f''(x) = -1 \times \mathrm{e}^{-x} - (-x-1)\mathrm{e}^{-x} = (-1 - (-x-1))\mathrm{e}^{-x} = x\mathrm{e}^{-x}.$$

La convexité de f est donnée par le signe de f'' : si f'' est positive, f est convexe ; sinon, elle est concave. Comme, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{-x} > 0$, $f'(x)$ est du signe de x. On en déduit que f est concave sur $\mathbb{R}_-$ et convexe sur $\mathbb{R}_+$.

On a f'' qui s'annule en changeant de signe en 0, autrement dit, f change de convexité en 0. On en déduit que le point A est un point d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}$.

Non noté : Si vous avez fini l'évaluation, vous pouvez colorier Raichu.