Chapitre 7

Continuité

7.1 Fonction continue

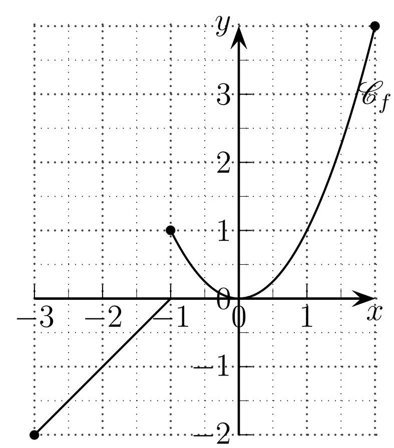
Définition 7.1. *Soient f une fonction définie sur un intervalle I et $x_0 \in I$ un réel.*

- *f est dite **continue en x_0** lorsque f admet une limite en x_0 et que cette limite est $f(x_0)$: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.*
- *f est **continue sur un intervalle I** lorsqu'elle est continue en tout réel x_0 de I.*

Remarque : Graphiquement, la continuité d'une fonction sur un intervalle I se traduit par le fait que sa courbe représentative peut se tracer « sans lever le crayon ».

Exemple : Soit la fonction f définie sur $[-3\,;2]$ par :

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x < -1, \\ x^2 & \text{si } x \geqslant -1. \end{cases}$$



Cette fonction n'est pas continue en -1. En effet :

- $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} x + 1 = 0.$
- $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} x^2 = 1.$

Donc f n'admet pas de limite unique en -1. Elle est cependant continue sur $[-3\,;-1[$ et sur $[-1\,;2]$.

Proposition 7.1. *Toute fonction dérivable sur un intervalle I est continue sur I.*

Démonstration. On considère une fonction f définie et dérivable sur un intervalle I. Soient x, $x_0 \in I$. Pour tout $x \neq x_0$, on a

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \times (x - x_0).$$

Or $\lim\limits_{x \to x_0} (x - x_0) = 0$ et, puisque f est dérivable, $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \in \mathbb{R}$. Ainsi

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) - f(x_0)) = f'(x_0) \times 0 = 0.$$

On en déduit donc que

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0),$$

c'est-à-dire f est continue sur I. □

Remarque : La réciproque de cette propriété est fausse. Par exemple, la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue en 0 ($\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{x} = \sqrt{0} = 0$) mais n'est pas dérivable en 0 (voir le cours de première).

Proposition 7.2.

1. *Les fonctions de références (polynômes, valeur absolue, exponentielle et racine carrée) sont continues sur leur intervalle de définition.*
2. *Toute fonction définie sur un intervalle I et obtenue par opérations ou compositions à partir des fonctions précédentes est continue sur I. En particulier, les **fonctions rationnelles** (quotients de deux polynômes) sont continues sur tout intervalle contenu dans leur intervalle de définition.*

Exemple : La fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{5\}$ par $f(x) = \dfrac{4\mathrm{e}^x + 1}{x - 5}$ est le quotient de la fonction $x \mapsto 4\mathrm{e}^x + 1$, qui est continue sur $\mathbb{R}$, par la fonction $x \mapsto x - 5$ également continue sur $\mathbb{R}$ mais qui s'annule en 5. f est alors continue sur $]-\infty\,;5[$ et sur $]5\,;+\infty[$.

Exercices : 7.1 à 7.5 ; 7.23 à 7.25.

7.2 Fonctions continues et suites convergentes

Proposition 7.3. *Soient I un intervalle et $\ell \in I$. Soient également f une fonction continue en ℓ et (u_n) une suite d'éléments de I qui converge vers ℓ. Alors la suite $(f(u_n))$ converge vers $f(\ell)$:*

$$\lim_{n \to +\infty} f(u_n) = f(\ell).$$

Remarque : C'est une conséquence directe de la définition de continuité.

Méthode pour justifier qu'une suite définie par récurrence à l'aide d'une fonction continue converge et déterminer sa limite :

1. Déterminer la fonction f telle que $u_{n+1} = f(u_n)$.
2. Montrer que (u_n) converge vers une limite ℓ.
3. Justifier que f est continue sur un intervalle contenant u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. En déduire que $(f(u_n))$ converge vers $f(\ell)$ et résoudre $f(x) = x$ pour déterminer la valeur ℓ par passage à la limite.

Exemple : Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 2.$$

On cherche à montrer que (u_n) converge et à déterminer sa limite.

1. On a $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est la fonction définie par $f(x) = \dfrac{1}{2}x + 2$.
2. On peut montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 4$. (u_n) est croissante et majorée par 4, elle converge donc vers une limite ℓ.
3. f est affine, donc continue sur $\mathbb{R}$ et en particulier sur $[1\,;4]$.
4. (u_n) converge vers ℓ et donc (u_{n+1}) aussi. f est continue sur $\mathbb{R}$, donc $(f(u_n))$ converge vers $f(\ell)$. Par passage à la limite dans $u_{n+1} = f(u_n)$, on en déduit que $\ell = f(\ell)$.

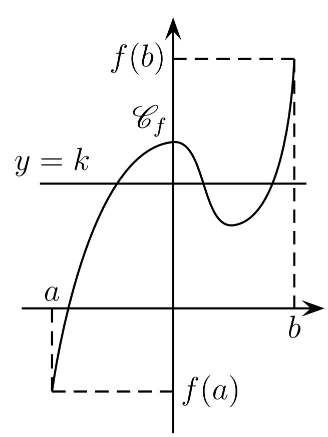
$$f(x) = x \iff \frac{1}{2}x + 2 = x \iff \frac{1}{2}x = 2 \iff x = 4.$$

   $4 \in [1\,;4]$ et est la seule solution de $f(x) = x$, la suite (u_n) converge donc vers 4.

Exercices : 7.6 à 7.8 ; 7.26 et 7.27.

7.3 Le théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 7.1. ***[Théorème des valeurs intermédiaires]*** *Si f est une fonction continue sur $]a\,;b[$ alors, pour tout réel $k \in f(]a\,;b[)$, il existe un réel $c \in \,]a\,;b[$ tel que $f(c) = k$. Autrement dit, l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution sur $]a\,;b[$.*



Remarques :

— Cela fonctionne aussi avec $[a\,;b]$, $]a\,;b]$ et $[a\,;b[$.

— Ainsi, pour $k \in f(]a\,;b[)$, la droite horizontale d'équation $y = k$ coupe au moins une fois la courbe de la fonction f.

— Dans le schéma ci-contre, il y a 3 solutions à l'équation $f(x) = k$.

Démonstration.

1. Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a\,;b]$. On peut supposer, quitte a restreindre l'intervalle $[a\,;b]$, que sont a et b tels que $f(a) \leqslant k \leqslant f(b)$ (ou $f(b) \leqslant k \leqslant f(a)$). On va utiliser le principe de dichotomie pour construire une suite d'intervalles de plus en plus petits contenant toujours le réel k.

   Comme $k \in [f(a)\,;f(b)]$, on a soit $k \in \left[f(a)\,;f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\right]$, soit $k \in \left]f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\,;f(b)\right]$

   On pose $a_0 = a$ et $b_0 = b$, puis on construit deux suites (a_n) et (b_n) de la façon suivante :
   - $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = \dfrac{a_n+b_n}{2}$ si $f\left(\dfrac{a_n+b_n}{2}\right) \geqslant k$;
   - $a_{n+1} = \dfrac{a_n+b_n}{2}$ et $b_{n+1} = b_n$ sinon.
2. Par construction pour tout $n \in \mathbb{N}$, $k \in [a_n\,;b_n]$, et en plus $a_n \leqslant a_{n+1}$ et $b_{n+1} \leqslant b_n$. Donc la suite (a_n) est croissante et majorée par b, donc elle converge vers une limite $\ell_a \in \mathbb{R}$. De même (b_n) est décroissante et minorée par a donc elle converge vers une limite $\ell_b \in \mathbb{R}$. De plus comme à chaque étape on divise par 2 la longueur de $[a_n\,;b_n]$ on a
$$\lim_{n\to+\infty}(b_n - a_n) = \lim_{n\to+\infty}\frac{b-a}{2^n} = 0.$$
   Et donc
$$\ell_a - \ell_b = \lim_{n\to+\infty} b_n - \lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty}(b_n - a_n) = 0;$$
   c'est-à-dire $\ell_a = \ell_b$.
3. Il reste à montrer que $f(\ell) = k$ pour finir la preuve. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(a_n) \leqslant k \leqslant f(b_n)$ et donc par passage à la limite
$$\lim_{n\to+\infty} f(a_n) \leqslant k \leqslant \lim_{n\to+\infty} f(b_n).$$
   Comme f est continue en ℓ, on en déduit que $f(\ell) \leqslant k \leqslant f(\ell)$ et donc $f(\ell) = k$.

□

Méthode pour appliquer le théorème des valeurs intermédiaires : Soit f définie sur $]a\,;b[$. Pour montrer que $f(x) = k$, $k \in \mathbb{R}$, admet au moins une solution sur $]a\,;b[$.

1. Justifier que f est continue sur $]a\,;b[$.
2. Déterminer $f(]a\,;b[)$ et vérifier que $k \in f(]a\,;b[)$.
3. Invoquer le théorème des valeurs intermédiaires pour conclure.

Exemple : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 4x^2 + 4x$. On cherche à montrer qu'il existe au moins un réel $c \in [-2\,;1]$ tel que $f(c) = 3$.

1. f est continue sur $[-2\,;1]$ en tant que fonction polynomiale.
2. Un tableau de variations donne $f([-2\,;1]) = \left[-\dfrac{32}{27}\,;9\right]$, donc $3 \in f([-2\,;1])$.
3. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe au moins un réel $c \in]-2\,;1[$ tel que $f(c) = 3$.

Remarque : Ce théorème ne nous dit pas quelle est cette solution, ni si elle est unique. On peut tout de même essayer de trouver des encadrements de ces solutions.

Contre-exemple : L'hypothèse de continuité est nécessaire dans le théorème des valeurs intermédiaires. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ 1 & \text{si } x \geqslant 0. \end{cases}$$

À l'aide d'un graphique on voit que le TVI ne fonctionne pas en $0,5$. En effet $f(-1) = 0$ et $f(1) = 1$ mais l'équation $f(x) = 0,5$ n'a pourtant aucune solution sur $\mathbb{R}$.

Corollaire 7.1. *[Théorème de la valeur intermédiaire]* *Si f est une fonction continue et* ***strictement monotone*** *sur $]a\,;b[$ alors, pour tout réel $k \in f(]a\,;b[)$, l'équation $f(x) = k$ admet* ***une unique*** *solution dans $]a\,;b[$.*

Remarques :

— Le corollaire est aussi valable avec $[a\,;b]$, $]a\,;b]$ et $[a\,;b[$.

— Comme f est strictement monotone, on a $f(]a\,;b[) =]f(a)\,;f(b)[$ ou $f(]a\,;b[) =]f(b)\,;f(a)[$. Si a et ou b sont infinis ou si f n'est pas définie en a et ou b, $f(a)$ et ou $f(b)$ sont alors remplacés par $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ et ou $\lim\limits_{x\to b} f(x)$.

Méthode pour appliquer le théorème de la valeur intermédiaire : Soit f définie sur $]a\,;b[$. Pour montrer que $f(x) = k$, $k \in \mathbb{R}$, admet une unique solution sur $]a\,;b[$.

1. Justifier que f est continue sur $]a\,;b[$.
2. Montrer que f est strictement monotone sur $]a\,;b[$.
3. Déterminer $f(]a\,;b[)$ et vérifier que $k \in f(]a\,;b[)$.
4. Invoquer le théorème de la valeur intermédiaire pour conclure.

Exemple : Montrons que l'équation $\mathrm{e}^x = 2$ admet une unique solution sur $[0\,;1]$.

1. La fonction exponentielle est continue sur $\mathbb{R}$.
2. La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
3. On a $f(0) = 1$ et $f(1) = \mathrm{e}$ donc $2 \in f([0\,;1]) = [1\,;\mathrm{e}]$.
4. Par le théorème de la valeur intermédiaire, l'équation $\mathrm{e}^x = 2$ admet une unique solution sur $[0\,;1]$.

Exercices : 7.9 à 7.14 ; 7.28 à 7.30.

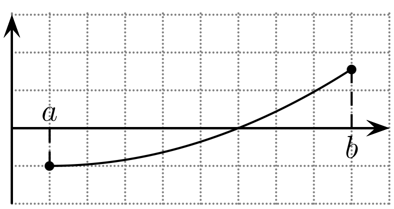
7.4 Méthode d'encadrement des solutions par dichotomie

La méthode de dichotomie permet trouver une valeur approchée d'une solution d'une équation $f(x) = 0$ dans un intervalle $[a\,;b]$ dans le cas où f est monotone sur $[a\,;b]$ et où l'on a établi l'existence d'une solution unique. Elle consiste étape après étape à diviser par deux la taille de l'intervalle dans lequel est la solution – en prenant comme nouvelle borne de celui-ci son milieu – afin d'obtenir un encadrement de plus en plus précis de celle-ci.

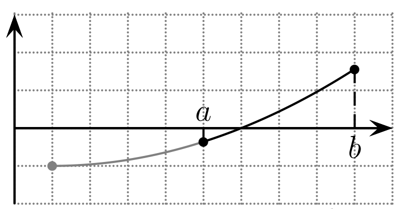
Supposons que la fonction f soit croissante sur $[a\,;b]$. On a alors $f(a) \leqslant 0$ et $f(b) \geqslant 0$. On considère le milieu de $[a\,;b]$, $\dfrac{a+b}{2}$:

- si $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right) \leqslant 0$, la solution cherchée est dans l'intervalle $\left[\dfrac{a+b}{2}\,;b\right]$.
- si $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right) \geqslant 0$, la solution cherchée est dans l'intervalle $\left[a\,;\dfrac{a+b}{2}\right]$.

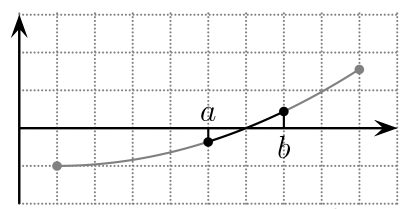
Ainsi, dans les deux cas, on a trouvé un intervalle de longueur moitié dans lequel est située la solution cherchée. On recommence alors avec cet intervalle, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on trouve une approximation qui nous convienne.



Étape 0



Étape 1 : $a \leftarrow \dfrac{a+b}{2}$



Étape 2 : $b \leftarrow \dfrac{a+b}{2}$

Algorithme 1 : Recherche dichotomique

Données : a et b réels, *seuil* réel strictement positif

Tant que $b - a > \mathit{seuil}$ **:**
- $m \leftarrow \dfrac{a+b}{2}$
- **Si** $f(a) \times f(m) \leqslant 0$ **:**
  - $b \leftarrow m$
- **Sinon :**
  - $a \leftarrow m$

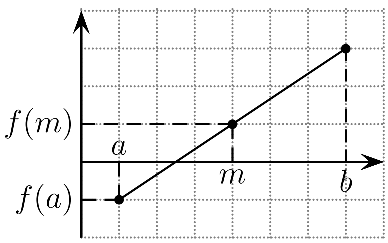
Renvoyer : a, b

Remarques :

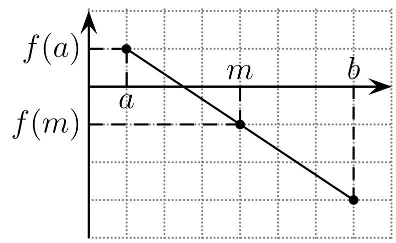
1. La méthode de recherche dichotomique en mathématiques diffère quelque peu de celle vue en informatique dans les cours de première et terminale (recherche d'une valeur dans une liste). Toutefois, son principre reste le même, diviser par deux à chaque étape la taille de l'ensemble dans lequel est effectuée la recherche.

2. Pour rechercher des solutions à une équation de la forme $f(x) = k$, $k \in \mathbb{R}$, il suffit de poser $g(x) = f(x) - k$ et de rechercher une solution à l'équation $g(x) = 0$ à l'aide de la recherche dichotomique.
3. La condition $f(a) \times f(m) \leqslant 0$ dans l'algorithme 1 n'est pas évidente mais est très efficace car elle fonctionne que la fonction soit croissante ou décroissante contrairement à la condition $f(m) \leqslant 0$ (ou $f(m) \geqslant 0$) qui dépend des variations de la fonction.

   Si $f(a) \times f(m) \leqslant 0$ **:** on a $f(a)$ et $f(m)$ sont de signes opposés : l'un est négatif et l'autre positif. On est donc dans une des deux situations illustrées ci-dessous.

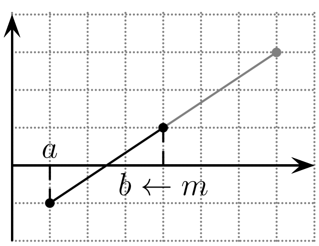


f croissante

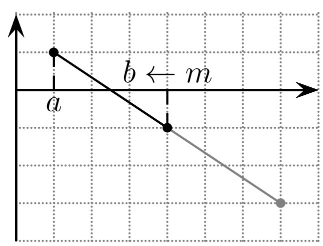


f décroissante

   Dans les deux cas, la solution de l'équation $f(x) = 0$ est dans l'intervalle $[a\,;m]$, on devra donc considérer comme nouvelle borne supérieure de l'intervalle la valeur du milieu de ce dernier : $b \leftarrow m = \dfrac{a+b}{2}$. Les deux situations illustrées ci-dessus évolueront donc en celles ci-dessous.

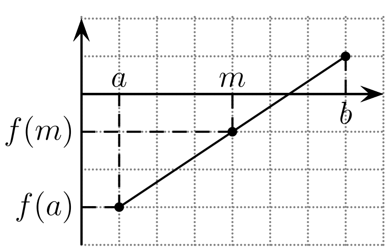


f croissante

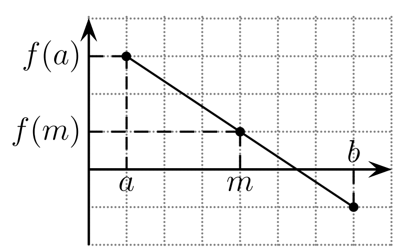


f décroissante

   Si $f(a) \times f(m) \geqslant 0$ **:** on a $f(a)$ et $f(m)$ sont de même signe : ils sont tous deux négatifs ou tous deux positifs. On est donc dans une des deux situations illustrées ci-dessous.

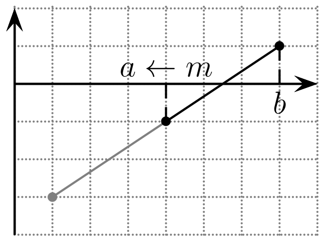


f croissante

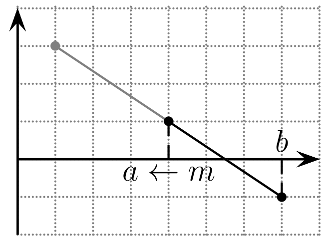


f décroissante

   Dans les deux cas, la solution de l'équation $f(x) = 0$ est dans l'intervalle $[m\,;b]$, on devra donc considérer comme nouvelle borne inférieure de l'intervalle la valeur du milieu de ce dernier : $a \leftarrow m = \dfrac{a+b}{2}$. Les deux situations illustrées ci-dessus évolueront donc en celles ci-dessous.



f croissante



f décroissante

Exercices : 7.15 à 7.17.

7.5 Capacités attendues

— Étudier les solutions d'une équation du type $f(x) = k$: existence, unicité, encadrement.

— Pour une fonction continue f d'un intervalle dans lui-même, étudier une suite définie par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.

7.6 Exercices

7.6.1 Progresser

Fonctions continues

Exercice 7.1. Étudier en 2 la continuité de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} x+5 & \text{si } x \leqslant 2, \\ 7 & \text{si } x > 2. \end{cases}$

Exercice 7.2. Étudier en 0 la continuité de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \begin{cases} x^2+x & \text{si } x \leqslant 0, \\ x+1 & \text{si } x > 0. \end{cases}$
La fonction g est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

Exercice 7.3. Trouver $k \in \mathbb{R}$ telle que la fonction définie par $f : x \mapsto \begin{cases} x^2 + \mathrm{e}^{x-1} & \text{si } x \leqslant 1, \\ x+k & \text{si } x > 1, \end{cases}$ soit continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 7.4. La partie entière d'un réel x, notées $\lfloor x \rfloor$, est l'entier relatif n tel que $n \leqslant x < n+1$.

1. Calculer $\lfloor 3,4 \rfloor$, $\lfloor 2 \rfloor$ et $\lfloor -4,6 \rfloor$.
2. Tracer la représentation graphique de la fonction partie entière sur $[-5\,;5]$.
3. Que peut-on conjecturer graphiquement sur la continuité de la fonction partie entière ?
4. Calculer les limites à gauche et à droite de $\lfloor x \rfloor$ lorsque x tend vers 1. Conclure.

Exercice 7.5. [Prolongement par continuité] Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et $f :]a\,;b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $]a\,;b]$. On dit que f est **prolongeable par continuité** en a si $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existe et est finie.

Si g est définie par $g = f$ sur $]a\,;b]$ et $g(a) = \lim\limits_{x \to a} f(x)$, alors g est continue sur $[a\,;b]$.

Étudier la continuité des fonctions suivantes.

1. $x \mapsto \dfrac{x^2+1}{x-1}$ définie sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ en 1.
2. $x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$ en 0.
3. $x \mapsto \dfrac{\cos(x)-1}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$ en 0.
4. $x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^x-1}{x}$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ en 0.

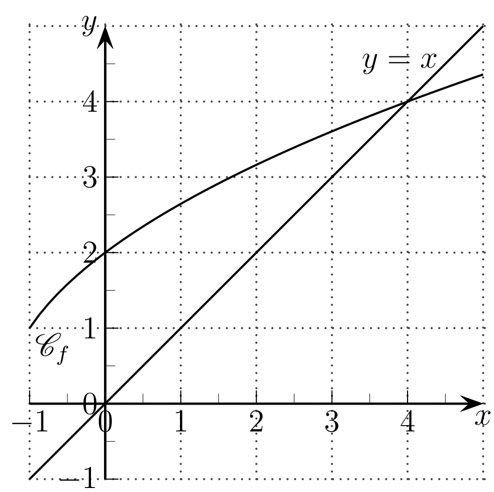
Fonctions continues et suites convergentes

Exercice 7.6. Soient f la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{x^2-x+1}$ et (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Étudier les variations de f.
2. Résoudre l'équation $f(x) = x$.
3. Montrer, par récurrence, que la suite (u_n) est strictement décroissante et minorée par 1.
4. Déterminer alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

Exercice 7.7. Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \sqrt{3u_n+4}$. On pose la fonction f définie sur $I = [0\,;+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{3x+4}$ dont on a la courbe représentative de la fonction f, ainsi que la droite d'équation $y = x$, ci-dessous.

1. Justifier que f est continue sur I.
2. Montrer que pour tout $x \in I$, $f(x) \geqslant 0$. En déduire que f est à valeurs dans I.
3. Placer u_0, u_1, u_2 et u_3 sur l'axe des abscisses.
4. Conjecturez le sens de variations de la suite (u_n), ainsi que l'existence d'un majorant.
5. Démontrer par récurrence ces deux conjectures.
6. En déduire que la suite (u_n) converge, et déterminer algébriquement sa limite.



Exercice 7.8. [Physique] La loi de refroidissement de Newton stipule que le taux d'évolution de la température d'un corps est proportionnel à la différence entre la température de ce corps et celle du milieu ambiant. Une tasse de café servie à une température initiale de 80 degré dans un milieu dont la température est supposé constante égale à 10. Pour tout entier naturel n, on note T_n la température du café à l'instant n, n exprimé en minutes ; On a ainsi $T_0 = 80$. Enfin, on modélise la loi de Newton entre deux minutes consécutives par $T_{n+1} - T_n = -0,2(T_n - 10)$.

1. D'après le contexte, peut-on conjecturer le sens de variation de la suite (T_n).
2. Exprimer T_{n+1} en fonction de T_n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Démontrer que la suite (T_n) est décroissante et minorée.
4. En déduire que la suite (T_n) est convergente et déterminer sa limite.
5. On considère l'algorithme ci-contre
   (a) Quelles valeurs prennent `T` et `n` initialement ?
   (b) Quelle est la valeur de la variable `n` à la fin de l'exécution de l'algorithme ?
   (c) Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

```
T = .....
n = .....
while T >=  40 :
    T = 0.8 * T + 2
    n = n + 1
```

Théorèmes des valeurs intermédiaires

Exercice 7.9. Soit f une fonction définie et continue sur $\mathbb{R}$ telle que :

x	$-\infty$		4		$+\infty$
$f(x)$	-3	$\nearrow$	2	$\searrow$	-7

1. L'équation $f(x) = -4$ admet-elle au moins une solution sur $]-\infty\,;4]$? Sur $[4\,;+\infty[$?
2. Même question pour $f(x) = 3$.
3. L'équation $f(x) = 0$ admet-elle une unique solution de $]-\infty\,;4]$? Sur $\mathbb{R}$?

Exercice 7.10. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - x - 1$. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution sur $[0\,;3]$.

Exercice 7.11. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^x + x$.

1. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer un encadrement de α à 10^{-2} près.
3. Même questions pour $g : x \mapsto x\mathrm{e}^{-x} + 1$ définie sur $\mathbb{R}$.

Exercice 7.12. Soient f_1 et f_2 deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f_1(x) = \mathrm{e}^x$ et $f_2(x) = -x + 2$. Démontrer que l'équation $f_1(x) = f_2(x)$ admet une unique solution sur $[0\,;1]$.

Exercice 7.13. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 3 - \dfrac{u_n + 1}{\mathrm{e}^{u_n}}$.

1. Étudier les variations de la fonction $f : x \mapsto 3 - \dfrac{x+1}{\mathrm{e}^x}$ sur $[0\,;+\infty[$.
2. Montrer que l'équation $f(x) = x$ possède une unique solution α sur $[0\,;+\infty[$.
3. Déterminer un encadrement de α à 10^{-2} prés.
4. Montrer que récurrence que (u_n) est croissante et majorée par α.
5. Déterminer, en justifiant son existence, la limite de la suite (u_n).

Exercice 7.14. [Corollaire du TVI] On souhaite démontrer : « Si f est une fonction continue et **strictement monotone** sur $[a\,;b]$ alors, pour tout réel $k \in f([a\,;b])$, l'équation $f(x) = k$ admet **une unique** dans $[a\,;b]$ ».

1. Démontrer qu'il existe au moins une solution sur I à l'équation $f(x) = k$.
2. Avec un raisonnement par l'absurde en supposant qu'il existe deux réels distincts α et β tels que $f(\alpha) = f(\beta) = k$ terminer la démonstration.

Recherche dichotomique

Exercice 7.15. Appliquer l'algorithme de la recherche dichotomique dans chacun des cas suivants.

1. $f(x) = x - 1$, $a = 0$, $b = 3$, $seuil = 0,5$.
2. $f(x) = 1 - x^2$, $a = 0$, $b = 3$, $seuil = 0,1$.

Exercice 7.16. [Python] Programmer en python une fonction de recherche dichotomique. La tester avec des fonctions simples.

Exercice 7.17. [Terminaison de la recherche dichotomique] Le but de cet exercice est de montrer que la boucle **Tant que** présente dans l'algorithme de recherche dichotomique prend fin, autrement dit, qu'elle n'est pas infinie.

Soient $I = [a\,;b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur I dont on suppose que l'on a établi l'existence d'une solution à l'équation $f(x) = 0$ sur I.

On pose a_n et b_n les bornes inférieures et supérieures de l'intervalle conservé à la n-ième itération de la boucle **Tant que** dans l'algorithme de recherche dichotomique ; ainsi $a_0 = a$ et $b_0 = b$. On note également l_n la longueur de l'intervalle conservé à la n-ième itération de la boucle **Tant que** : $l_n = b_n - a_n$.

1. Le but de cette question est de prouver que (l_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$.
   (a) Supposons que $f(a_n) \times f\left(\dfrac{a_n + b_n}{2}\right) \leqslant 0$, que valent a_{n+1} et b_{n+1} ?
   (b) Même question si $f(a_n) \times f\left(\dfrac{a_n + b_n}{2}\right) \geqslant 0$.
   (c) En déduire que dans tous les cas, $l_{n+1} = \dfrac{1}{2} l_n$. Conclure quant à la nature de (l_n).
2. Quelle est la limite de (l_n) ? L'écrire à l'aide de la définition de la limite.
3. En choisissant habilement une valeur de ϵ dans la définition de la limite, montrer qu'il existe un rang n_s tel que pour tout $n \geqslant n_s$, $l_n < seuil$.
4. En déduire que la boucle **Tant que** se termine bien.

7.6.2 Approfondir

Exercice 7.18. [Koalas]

Partie A : étude d'un modèle discret

Les koalas se nourrissent de feuilles d'eucalyptus mais ils ne peuvent pas manger les feuilles desséchées, celles des arbres malades, les jeunes pousses, etc.

Après les incendies de 2019, des scientifiques koalas (équipées de blouses blanches et de lunettes) ont décidé d'étudier le pourcentage de feuilles d'eucalyptus comestibles dans une forêt qui ont été préservées et qui peuvent servir de nourriture aux koalas. Ce pourcentage dépend du nombre de koalas ayant survécu et présents sur les lieux, du nombres d'eucalyptus plantés, de l'espace disponible, des incendies, de la météo, de la pollution, etc.

Dans cette forêt, ils estiment que 60% des feuilles d'eucalyptus étaient disponibles en janvier 2020. On modélise le pourcentage de feuilles comestibles par la suite (P_n), qui à tout entier naturel n, associe la proportion de feuilles d'eucalyptus comestibles n années après 2020 ; on a ainsi $P_0 = 0,6$. Le modèle choisi est tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$P_{n+1} = P_n(1 - 0,4P_n).$$

On définit la fonction f sur l'intervalle $[0\,;1]$ par $f(x) = x(1-0,4x)$. Ainsi, la suite (P_n) vérifie, pour tout entier naturel n, $P_{n+1} = f(P_n)$.

1. Pourquoi restreindre l'étude de f à l'intervalle $[0\,;1]$?
2. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;1]$.
3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $0 \leqslant P_{n+1} \leqslant P_n \leqslant 1$.
4. Montrer que (P_n) converge vers une limite ℓ à déterminer. Est-ce une bonne nouvelle pour nos amis les koalas ?

Partie B : étude d'un modèle continu

Un autre groupe de scientifiques koalas travaille sur le nombre de koalas peuplant cette partie de la forêt. Au 1er janvier 2020, ils pouvaient en dénombrer 250. Ils estiment que le nombre de koalas présents dans la forêt peut être modélisé par la fonction N définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par :

$$N(t) = \frac{1\,000}{0,4 + 3,6\mathrm{e}^{-0,5t}}$$

où t est le temps écoulé en année depuis 2020.

1. Étudier les variations de la fonction N sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.
2. Montrer qu'il existe une unique valeur $t_0 \in [0\,;+\infty[$ telle que $N(t_0) = 2\,000$.
3. Selon ce modèle, déterminer au cours de quelle année le nombre de koalas pourrait dépasser pour la première fois les $2\,000$ individus.

Exercice 7.19. [Racine de polynôme de degré impair] Soit n un entier naturel. On considère une fonction polynôme de degré n,

$$f : x \mapsto \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n,$$

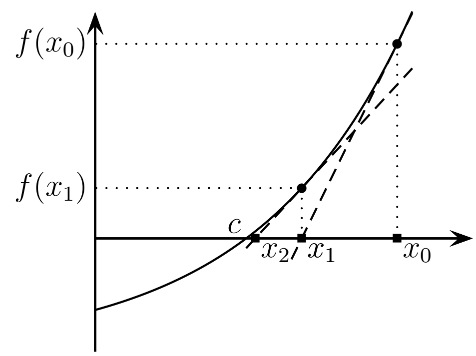
où $a_i \in \mathbb{R}$ pour tout i de 0 à n et $a_n \neq 0$. Démontrer que toute fonction polynôme de degré impair admet au moins une racine réelle.

Exercice 7.20. [Méthode de Newton] Soit f une fonction convexe, dérivable de dérivée continue et strictement positive sur un intervalle I telle qu'il existe $c \in I$ vérifiant $f(c) = 0$. Le but de la méthode de Newton est d'approcher c à l'aide d'une suite (x_n) convergeant vers celui-ci.

On commence avec x_0 choisi supérieur à c. Le principe de la méthode de Newton repose sur le fait que la tangente à f en x_0 est proche de f pour les x proches de x_0 :

$$f(x) \simeq f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

On note x_1 la solution de $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = 0$. Avec les bonnes hypothèses sur f, x_1 est en général plus proche de c que x_0. On recommence alors la même opération avec x_1 afin d'obtenir x_2 comme sur le schéma ci-contre.



On souhaite montrer que la suite (x_n) converge vers c.

1. Donner l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse x_0.
2. Déterminer l'abscisse x_1 de l'intersection de cette tangente et de l'axe des abscisses.
3. Justifier que $x_1 \geqslant c$.
4. Justifier que la suite (x_n) est définie par la formule $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ et que $x_n \geqslant c$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
5. Montrer que (x_n) décroît.
6. En déduire qu'elle converge vers c.
7. **[Application]** Soit f la fonction définie sur l'intervalle $I = [-1\,;2]$ par
$$f(x) = \mathrm{e}^{x-1} - 1.$$
   (a) Montrer que f est convexe et dérivable de dérivée continue et strictement positive sur I.
   (b) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans I. La résoudre.
   (c) Compléter le programme ci-contre afin que la fonction `newton` renvoie la valeur de x_n.
   (d) Le tester avec $x_0 = -1$ et afficher les dix premiers termes de la suites. Que remarque-t-on ?

```
def f(x) :
    return ...................

def derivee(x) :
    return ...................

def newton(x, n) :
    for i in range(n) :
        x =  ..............
    return x
```

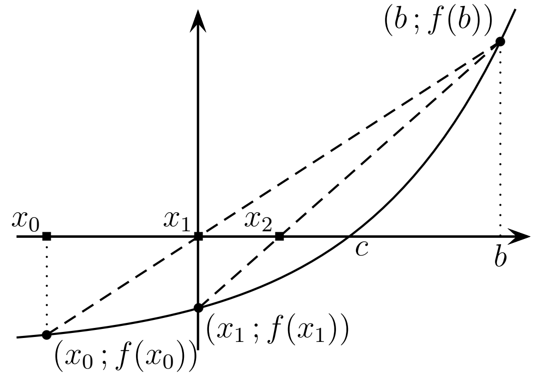
Exercice 7.21. [Méthode de la sécante] Soit f une fonction convexe, dérivable de dérivée continue et strictement positive sur un intervalle I telle qu'il existe $c \in I$ vérifiant $f(c) = 0$. Comme la méthode de Newton, la méthode de la sécante a pour but d'approcher c à l'aide d'une suite (x_n) convergeant vers celui-ci.

On cherche d'abord un intervalle $I = [a\,;b]$ contenant c. On construit ensuite (x_n) comme suit :

— $x_0 = a\,;$

— pour tout $n \in \mathbb{N}$, x_{n+1} est l'abscisse du point d'intersection de l'axe des abscisses et de la corde de $\mathscr{C}_f$ passant par les points de coordonnées $(x_n\,; f(x_n))$ et $(b\,; f(b))$.

On souhaite montrer que la suite (x_n) converge vers c.



1. Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \leqslant c$, en utilisant la convexité de f.
2. Donner l'équation de la corde à $\mathscr{C}_f$ passant par les points de coordonnées $(x_n\,; f(x_n))$ et $(b\,; f(b))$.
3. En déduire que $x_{n+1} = x_n - \dfrac{x_n - b}{f(x_n) - f(b)} \times f(x_n)$.
4. Montrer que (x_n) croît.
5. En déduire qu'elle converge vers c.
6. **[Application]** Soit f la fonction définie sur l'intervalle $I = [1\,;3]$ par
$$f(x) = \mathrm{e}^{x-1} - 1.$$
   (a) Montrer que f est convexe et dérivable de dérivée continue et strictement positive sur I.
   (b) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans I. La résoudre.
   (c) Écrire en Python une fonction `secante` qui prend la valeur de n en paramètre et renvoie la valeur de x_n en sortie.
   (d) Le tester avec $x_0 = 1$ et afficher les dix premiers termes de la suites. Que remarque-t-on ?
   (e) Comparer ce résultat avec la méthode de Newton.

Exercice 7.22. [Équation fonctionnelle] On cherche à déterminer toutes les fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que pour tous réels x_1 et x_2,
$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2).$$
Cette équation est ce qu'on appelle une équation fonctionnelle : son inconnue est une fonction.

Partie A : exemples

1. Montrer que si f est linéaire, alors f est solution du problème.
2. Montrer que les fonctions affines non linéaires et carré ne sont pas solutions du problème.

Partie B : résolution du problème

1. Calculer $f(0)$ et en déduire que f est impaire sur $\mathbb{R}$.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(nx) = nf(x)$.
3. En utilisant l'imparité, étendre ce résultat pour tout $n \in \mathbb{Z}$.
4. En utilisant le fait que pour tout $q \in \mathbb{Z}^*$, $\dfrac{q}{q} = 1$, montrer que $f\left(\dfrac{1}{q}\right) = \dfrac{1}{q}f(1)$.
5. Démontrer que, pour tout $r \in \mathbb{Q}$, $f(r) = rf(1)$.
6. On admet le théorème suivant : « Tout nombre réel est limite d'une suite de rationnels ». Démontrer que f doit être une fonction linéaire.

7.6.3 S'entraîner

Fonctions continues

Exercice 7.23. Étudier en 3 la continuité de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 2x+5 & \text{si } x \leqslant 3, \\ -x+14 & \text{si } x > 3. \end{cases}$$

Exercice 7.24. Étudier la continuité sur $\mathbb{R}$ de la fonction g définie par : $g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leqslant 1, \\ -x^3+2 & \text{si } x > 1. \end{cases}$
La fonction g est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

Exercice 7.25. Soit une fonction f telle que $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x<2}} f(x) = 4$; $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x>2}} f(x) = 8$ et $f(2) = 6$.

1. Justifier que f n'est pas continue en 2.
2. Donner un exemple d'une telle fonction.

Fonctions continues et suites convergentes

Exercice 7.26. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 4$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{u_n^2}{5}$.

1. Déterminer une fonction f telle que $u_{n+1} = f(u_n)$ puis étudier ses variations.
2. Résoudre l'équation $f(x) = x$.
3. Démontrer par récurrence que (u_n) est décroissante et minorée par 0.
4. Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.

Exercice 7.27. [Pingouins] Un groupe de pingouins compte 3 000 individus au 1er juin 2020. Le gouvernement pingouin s'inquiète d'une baisse démographique de leur groupe à cause du réchauffement climatique. Une étude lui permet d'élaborer un modèle selon lequel chaque année :

— entre le 1er juin et le 31 octobre, 80 pingouins arrivent dans le groupe ;

— entre le 1er novembre et le 31 mai, le groupe subit une baisse de 5 % de son effectif par rapport à celui du 31 octobre qui précède.

On désigne par la suite (p_n) le nombre de pingouins au 1er juin de l'année $2020 + n$.

1. Déterminer p_0 et l'expression de p_{n+1} en fonction de p_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Déterminer les 3 premiers termes de la suite, on arrondira à l'unité.
3. (a) Démontrer que (p_n) est décroissante et minorée par 1 520.
   (b) En déduire que la suite (p_n) est convergente.
4. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par
   $$f(x) = (x + 80) \times 0,95.$$
   Résoudre l'équation $f(x) = x$.
5. En déduire la limite de la suite (p_n).
6. Montrer que le nombre de pingouins dans le groupe sera un jour inférieur à 2 000.
7. Compléter la fonction en Python ci-contre qui renvoie l'année à partir de laquelle le nombre de pingouins présents dans le groupe sera inférieur à 2 000.

```
def pingouins():
    n = ..........
    p = 3000
    while ............... :
        n = ..........
        p = ..........
    return ..........
```

Théorèmes des valeurs intermédiaires

Exercice 7.28. Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 3x^2 - 1$.

1. Déterminer les variations de f sur $\mathbb{R}$.
2. Justifier alors que $f(x) = 2$ admet trois solutions sur $[-4\,;4]$.

Exercice 7.29. Soit la fonction $h : x \mapsto (3x - 4)\mathrm{e}^{-x}$ définie sur $\mathbb{R}$. Montrer que l'équation $h(x) = -1$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$ et donner un encadrement de cette solution avec une précision de 10^{-3}.

Exercice 7.30. Montrer que l'équation $2\mathrm{e}^{2x} = \sqrt{5 - x}$ admet une unique solution α sur $]-\infty\,;5]$ et que $\alpha \in [0\,;1]$.