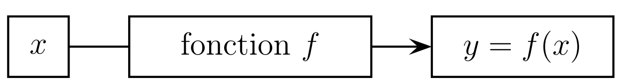
Chapitre 6

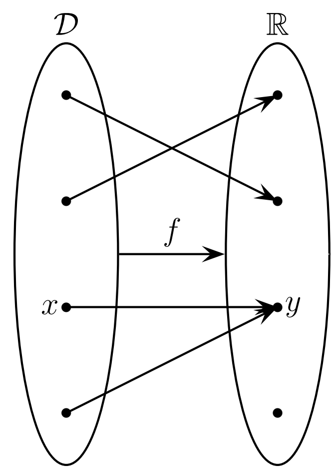
Généralités sur les fonctions

6.1 Fonction, image et antécédents

Définition 6.1. *Définir une* ***fonction*** f *sur un ensemble* $\mathcal{D}$ *de réels, c'est associer à chaque élément* x *de* $\mathcal{D}$ *un unique réel* y*. On écrira* $y = f(x)$ *et on note cette correspondance :*

$$\begin{array}{rcl} f : \mathcal{D} & \to & \mathbb{R}, \\ x & \mapsto & f(x). \end{array}$$





Définition 6.2.
- $\mathcal{D}$ *est appelé l'****ensemble de définition*** *de* f.
- y *est appelé* ***image*** *de* x *par* f .
- *On dit que* x *est un* ***antécédent*** *de* y *par* f .

Exemple : La température dans une ville au cours d'une journée est fonction du temps. À chaque instant t est associée une unique température $\theta(t)$ (θ est la lettre grecque thêta) ; la fonction θ est définie sur $\mathcal{D} = [0\,;24]$. Les températures atteintes au cours de la journée ont plusieurs antécédents : il peut par exemple faire 10 ° C à 9h puis à 22h.

6.2 Modes de définition d'une fonction

6.2.1 Tableau de valeurs

Un **tableau de valeur** donne explicitement les images associées à certains antécédents .

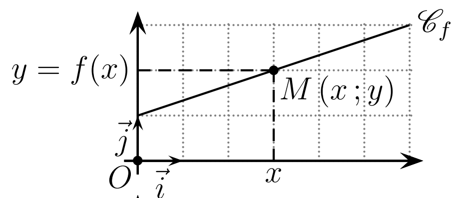
Exemple : On a dans le tableau ci-contre les températures θ de la ville de Bourg Palette en fonction de l'instant de la journée.
L'image de 14 par θ est 17 et 10 admet pour antécédents 9 et 22 .

t	7	9	12	14	17	20	22
$\theta(t)$	8	10	13	17	19	15	10

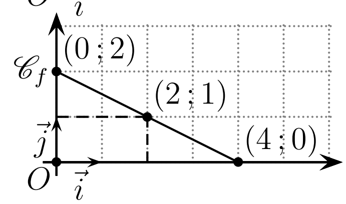
Exercices : 6.1 et 6.2 ; 6.15.

6.2.2 Courbe représentative

Définition 6.3. *La **courbe représentative** d'une fonction f est l'ensemble des points $M\,(x\,;y)$ tels que $y = f(x)$.*



Exemple : La courbe ci-contre représente la fonction f.
Par f, 0 a pour image 2 ; 1 a pour antécédent 2 et 0 a pour antécédent 4 .



Exercices : 6.3 et 6.4 ; 6.16

6.2.3 Relation algébrique

Une fonction peut être définie par une **relation algébrique** qui donne explicitement $f(x)$ en fonction de x . Cela permet de calculer des images de façon exacte et éventuellement des antécédents.

Exemple : L'aire $\mathcal{A}$ d'un carré de côté c est donnée par $\mathcal{A}(c) = c^2$ avec $c \in \mathbb{R}_+$.

Exemple : On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $p(t) = 3t^2 - 1$. Cherchons l'image de 10 par p. On a

$$p(10) = 3 \times 10^2 - 1 = 3 \times 100 - 1 = 299.$$

Exemple : On considère la fonction définie sur $[-2\,;13]$ par $g(y) = -2y + 6$. Cherchons les éventuels antécédents de 0 par g dans $[-2\,;13]$. On a

$$-2y + 6 = 0 \iff -2y = -6 \iff x = \frac{-6}{-2} \iff x = 3.$$

Donc 0 admet pour unique antécédent 3 par g .

Exercices : 6.5 à 6.9 ; 6.17 à 6.19.

6.3 Résolution graphique d'équation et d'inéquation

Définition 6.4. *Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I de courbes représentatives $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ et k une constante.*

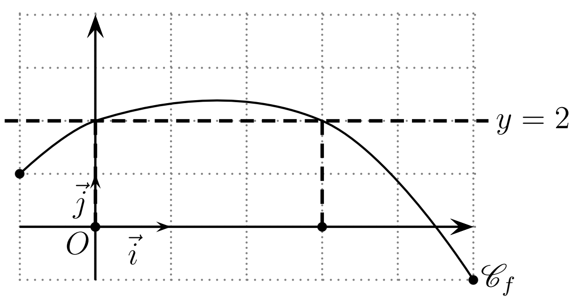
— *Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = k$ consiste à déterminer les abscisses des points de $\mathscr{C}_f$ ayant pour ordonnée k .*

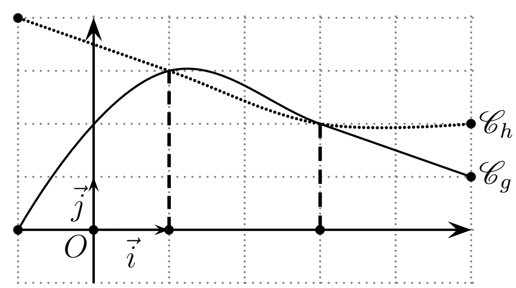
— *Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = g(x)$ consiste à déterminer les abscisses des points d'intersection de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.*

Remarque : Résoudre une équation de la forme $f(x) = k$ revient à chercher les antécédents de k par f.

Exemples :

1. L'équation $f(x) = 2$ a pour solutions : 0 et 3 .
2. L'équation $g(x) = h(x)$ a pour solutions : 1 et 3





Définition 6.5. *Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I de courbes représentatives $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ et k une constante.*

— *Résoudre graphiquement l'équation $f(x) \geqslant k$ consiste à déterminer les abscisses des points de $\mathscr{C}_f$ ayant une ordonnée supérieure à k.*

— *Résoudre graphiquement l'équation $f(x) \geqslant g(x)$ consiste à déterminer les abscisses des points pour lesquels $\mathscr{C}_f$ est au dessus ou confondue avec $\mathscr{C}_g$.*

Exemples : On reprend l'exemple précédent.

1. L'inéquation $f(x) \geqslant 2$ a pour solutions : $[0\,;3]$.
2. L'inéquation $f(x) < 2$ a pour solutions : $[-1\,;0[\cup]3\,;5]$.
3. L'inéquation $g(x) \leqslant h(x)$ a pour solutions : $[-1\,;1] \cup [3\,;5]$
4. L'inéquation $g(x) > h(x)$ a pour solutions : $]1\,;3[$

Exercices : 6.10 et 6.11 ; 6.20.

6.4 Fonctions paires et impaires

Définition 6.6. *Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, on dit que*

— *f est **paire** lorsque pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = f(x)$.*

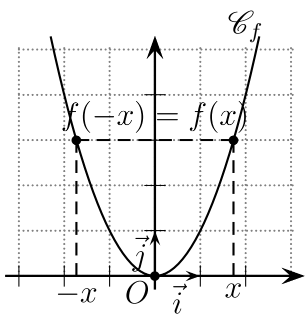
— *f est **impaire** lorsque pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = -f(x)$.*

Propriété 6.1. *Soient f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.*

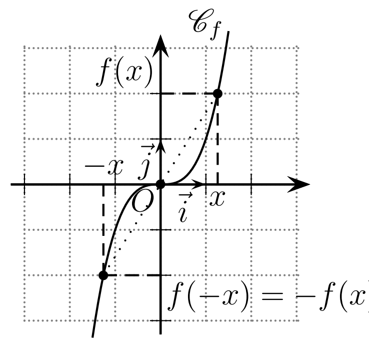
— *f est paire si et seulement si $\mathscr{C}_f$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.*

— *f est impaire si et seulement si $\mathscr{C}_f$ est symétrique par rapport à l'origine O du repère.*

Exemples :



Fonction paire



Fonction impaire

Exercices : 6.12 à 6.14 ; 6.21.

6.5 Capacités attendues

— Exploiter l'équation $y = f(x)$ d'une courbe : appartenance, calcul de coordonnées.

— Modéliser par des fonctions des situations issues des mathématiques, des autres disciplines.

— Résoudre une équation ou une inéquation du type $f(x) = k$, $f(x) < k$, en choisissant une méthode adaptée : graphique, algébrique, logicielle.

— Résoudre une équation, une inéquation produit ou quotient, à l'aide d'un tableau de signes.

— Résoudre, graphiquement ou à l'aide d'un outil numérique, une équation ou inéquation du type $f(x) = g(x)$, $f(x) < g(x)$.

6.6 Exercices

6.6.1 Progresser

Tableau de valeurs

Exercice 6.1. Soit h une fonction définie par le tableau de valeurs suivants :

z	-3	-1	0	4	7	9	13
$h(z)$	3	1	4	5	-2	-4	-5

1. Quelles sont les images de -3 et 7 ?
2. Déterminer $h(-1)$ et $h(13)$.
3. Quels sont les antécédents de -2, 1 et 4 par h ?

Exercice 6.2. Soit h une fonction définie par le tableau de valeurs suivants :

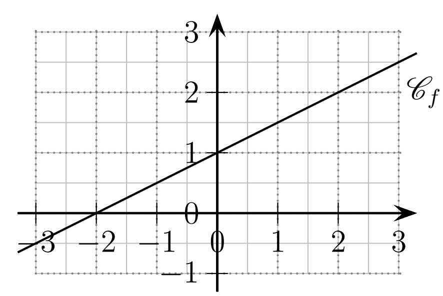
z	-4	-2	-1	1	2	5	6
$h(z)$	-4	6	4	5	-2	-4	-1

1. Quelles sont les images de -4, -2 et 2 ?
2. Quels sont les antécédents de -4, -2 et 5 par h ?

Courbe représentative

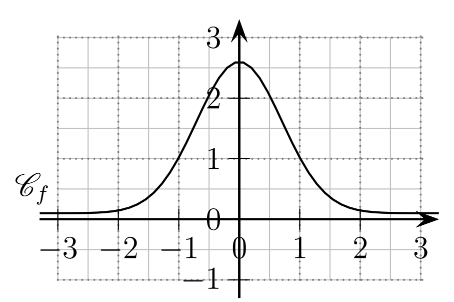
Exercice 6.3.

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par la courbe ci-contre. Par lecture graphique, déterminer :
   (a) L'image de 1 par f.
   (b) L'image de -2 par f.
   (c) Les antécédents éventuels de 1.
   (d) Les antécédents éventuels de 2.
2. Résoudre l'équation $f(x) = 2,5$.



Exercice 6.4.

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par la courbe ci-contre. Par lecture graphique, déterminer :
   (a) l'image de -1 par f ;
   (b) l'image de 0 par f ;
   (c) les antécédents éventuels de 1 ;
   (d) les antécédents éventuels de -2 ;
2. Résoudre l'équation $f(x) = 2$.



Relation algébrique

Exercice 6.5. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x + 5$.

1. Calculer $f(6)$ et $f(7)$.
2. Quelle est l'image de -5 par f ?
3. -5 est-il un antécédent de 2 ?
4. Déterminer un antécédent de 0.

Exercice 6.6. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2x^3 - 3x + 1$.

1. Calculer l'image de 2.
2. En déduire les coordonnées d'un point appartenant à la courbe représentative de g.
3. Proposer les coordonnées d'un deuxième point appartenant à cette courbe.

Exercice 6.7. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 5x + 2$ et $\mathscr{C}_g$ sa courbe représentative.

1. Le point $M\left(\dfrac{2}{3}\,;5\right)$ appartient-il à $\mathscr{C}_g$?
2. Calculer l'ordonnée du point $N \in \mathscr{C}_g$ tel que l'abscisse de N soit nulle.
3. Calculer l'abscisse du point $P \in \mathscr{C}_g$ tel que l'ordonnée de P soit nulle.
4. Donner les coordonnées d'un quatrième point appartenant à $\mathscr{C}_g$.

Exercice 6.8. Soient f, g et h trois fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2x^2 + 4x - 6, \quad g(x) = 2(x+1)^2 - 8 \quad \text{et} \quad h(x) = 2(x-1)(x+3).$$

1. Montrer que $f(x)$, $g(x)$ et $h(x)$ sont trois expressions de la même fonction.
2. Répondre aux questions suivantes en choisissant à chaque fois la forme **la plus adaptée**.
   (a) Calculer les images de 0, 1 et $\sqrt{3} - 1$.
   (b) Chercher les éventuels antécédents de 0 et -6.
   (c) Trouver les abscisses des points de la courbe $\mathscr{C}_f$ de f d'ordonnée égale à 24 appartenant à la courbe de f.
   (d) Déterminer le signe de f.

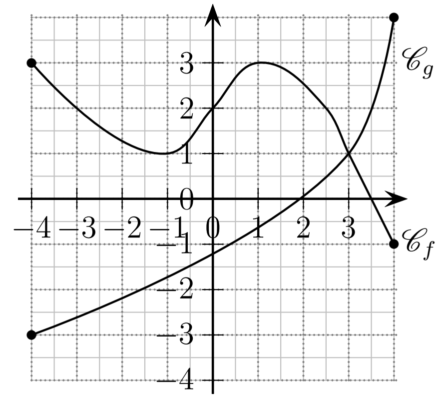
Exercice 6.9. [Géométrie] On considère un rectangle $ABCD$ de dimensions $AB = 6$cm et $BC = 8$cm. Sur le côté $[AB]$, on place un point M quelconque. On considère ensuite les points N sur $[BC]$, P sur $[CD]$ et Q sur $[AD]$ tels que $AM = BN = CP = DQ$. On appelle x la longueur AM et f la fonction qui à x associe la valeur de l'aire de $MNPQ$.

1. Faire un schéma de la situation.
2. AM peut-elle prendre la valeur 7 ? Pourquoi ?
3. Quel est l'ensemble de définition de f ?
4. Démontrer que $f(x) = 2x^2 - 14x + 48$.
5. A l'aide d'une calculatrice ou d'un logiciel, tracer la courbe représentative de f.
6. Pour quelles valeurs de x l'aire de $MNPQ$ est-elle supérieur ou égale à 24cm^2.

Résolution graphique d'équation et d'inéquation

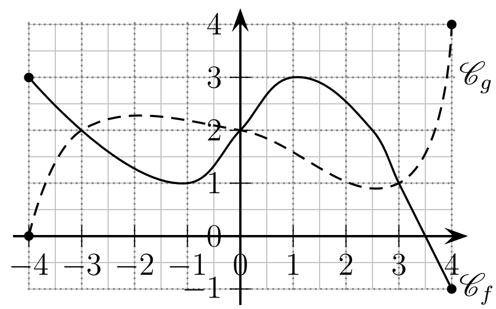
Exercice 6.10. Soient f et g deux fonctions définies sur $[-4\,;4]$.

1. Résoudre graphiquement $f(x) = -1$, $f(x) = 1$, $f(x) = 2$ et $f(x) = 3$.
2. Résoudre graphiquement $f(x) = g(x)$.
3. Résoudre graphiquement $g(x) \geqslant 1$ et $g(x) > f(x)$.
4. Résoudre graphiquement $f(x) \geqslant 2$.



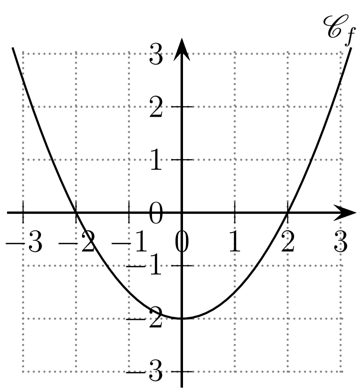
Exercice 6.11. Soient f et g deux fonctions définies sur $[-4\,;4]$.

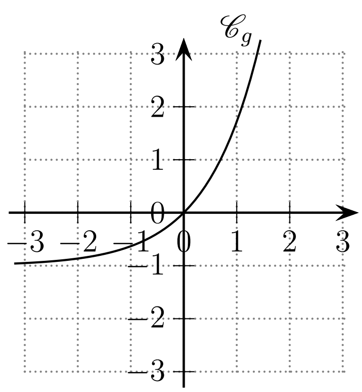
1. Résoudre graphiquement $f(x) = g(x)$.
2. Résoudre graphiquement $f(x) \leqslant 3$ et $f(x) > 1$.
3. Résoudre graphiquement $f(x) < g(x)$ et $f(x) \geqslant g(x)$.

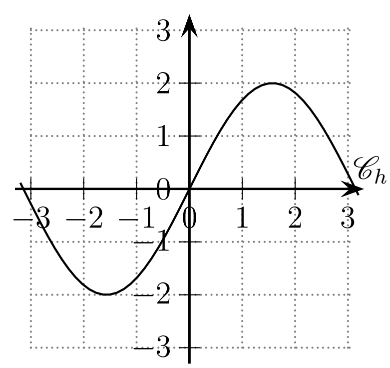


Fonctions paires et impaires

Exercice 6.12. Déterminer graphiquement si les fonctions représentées ci-dessous sont paires, impaires ou ni l'une ni l'autre.







Exercice 6.13. Déterminer si chacune des fonctions f suivantes – définie sur $\mathbb{R}$ – est paire, impaire ou ni l'une ni l'autre.

1. $f(x) = x^2$,
2. $f(x) = x^3$,
3. $f(x) = \dfrac{1}{x}$,
4. $f(x) = x + 1$.

Exercice 6.14. Déterminer si chacune des fonctions f suivantes – définie sur $\mathbb{R}$ – est paire, impaire ou ni l'une ni l'autre.

1. $f(x) = 2x^3 + 4$,
2. $f(x) = 4x + 2$,
3. $f(x) = \dfrac{1}{2x^2 + 1}$,
4. $f(x) = 3x + x^3$.

6.6.2 S'entraîner

Tableau de valeurs

Exercice 6.15. Soit h une fonction définie par le tableau de valeurs suivants :

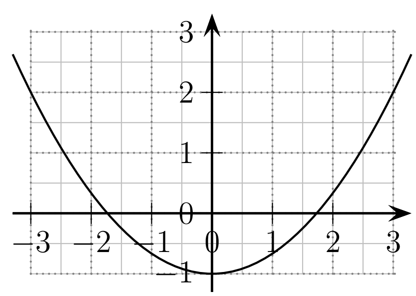
z	-5	$-2,5$	$-1,2$	0	2,5	4	5,5
$h(z)$	-5	3	4	5	0	-5	-1

1. Quelles sont les images de -5, 0 et 2,5 ?
2. Quels sont les antécédents de -5, 0 et 4 par h ?

Courbe représentative

Exercice 6.16. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par la courbe ci-contre. Par lecture graphique, déterminer :

1. l'image de $-2,5$ par f ;
2. l'image de 0 par f ;
3. les antécédents éventuels de 1 ;
4. les antécédents éventuels de 2.



Relation algébrique

Exercice 6.17. Pour chacune des fonctions ci-dessous, déterminer les images de 0 et 1 puis déterminer les éventuels antécédents de 0.

1. $f_1(x) = 3x + 1$;
2. $f_2(x) = -x + 8$;
3. $f_3(x) = \dfrac{1}{2}x - 1$;
4. $f_4(x) = \dfrac{3x}{4} - \dfrac{1}{2}$;
5. $f_5(x) = (2x - 2)(x - 1)$;
6. $f_6(x) = x\left(1 - \dfrac{x}{3}\right)$.

Exercice 6.18. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -\dfrac{3}{2}x + \dfrac{1}{5}$ et $\mathscr{C}_g$ sa courbe représentative.

1. Le point $M\left(-\dfrac{2}{3}\,;\dfrac{6}{5}\right)$ appartient-il à $\mathscr{C}_g$?
2. Calculer l'ordonnée du point $N \in \mathscr{C}_g$ tel que l'abscisse de N soit nulle.
3. Calculer l'abscisse du point $P \in \mathscr{C}_g$ tel que l'ordonnée de P soit nulle.
4. Donner les coordonnées d'un quatrième point appartenant à $\mathscr{C}_g$.

Exercice 6.19. Soient f, g et h trois fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

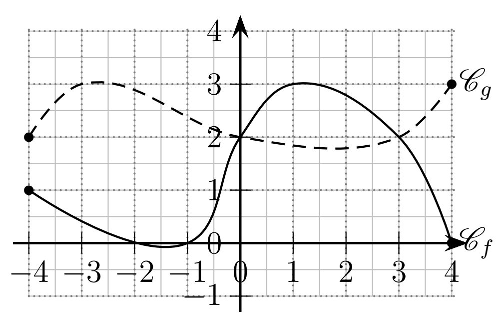
$$f(x) = x^2 + x + \frac{3}{16}, \quad g(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{16} \quad \text{et} \quad h(x) = \left(x + \frac{1}{4}\right)\left(x + \frac{3}{4}\right).$$

1. Montrer que $f(x), g(x)$ et $h(x)$ sont trois expressions de la même fonction.
2. Répondre aux questions suivantes en choisissant à chaque fois la forme **la plus adaptée**.
   (a) Calculer les images de 0, $-\dfrac{1}{4}$ et $\sqrt{5} - \dfrac{1}{2}$.
   (b) Chercher les éventuels antécédents de 0 et $\dfrac{3}{16}$.
   (c) Trouver les abscisses des points de la courbe $\mathscr{C}_f$ de f d'ordonnée égale à $-\dfrac{1}{16}$ appartenant à la courbe de f.
   (d) Déterminer le signe de f.

Résolution graphique d'équation et d'inéquation

Exercice 6.20. Soient f et g deux fonctions définies sur $[-4\,;4]$.

1. Résoudre graphiquement $g(x) = 2$.
2. Résoudre graphiquement $f(x) = g(x)$.
3. Résoudre graphiquement $f(x) < 2$ et $g(x) \geqslant 2$.
4. Résoudre graphiquement $f(x) < g(x)$ et $f(x) \geqslant g(x)$.



Fonctions paires et impaires

Exercice 6.21. Déterminer si chacune des fonctions f suivantes – définie sur $\mathbb{R}$ – est paire, impaire ou ni l'une ni l'autre.

1. $f(x) = x^2 + 1$,
2. $f(x) = 2x$,
3. $f(x) = \dfrac{1}{x^3}$,
4. $f(x) = x^3 + x^4$.

6.6.3 Le Flashback !

Flashback 6.1. Simplifier les fractions suivantes :

1. $\dfrac{72/24}{27/42}$;
2. $\dfrac{\frac{2}{9} - 1}{\frac{2}{9} + 2}$;

Flashback 6.2.

1. Simplifier les expressions suivantes :
   (a) $6^4 \times 6^2$;
   (b) $\dfrac{13^{11}}{13^{15}}$;
   (c) $6^6 \times 36^3$;
   (d) $\dfrac{(11a)^6}{121a^4}$.
2. Écrire sous la forme $a\sqrt{b}$ les racines carrées suivantes avec a et b les plus petits possibles.
   (a) $\sqrt{27}$;
   (b) $\sqrt{242}$;
   (c) $\sqrt{72}$.

Flashback 6.3. Écrire sans racine carrée au dénominateur et simplifier les expressions suivantes :

1. $A = \dfrac{1}{\sqrt{6} + 3}$;
2. $B = \dfrac{-1}{\sqrt{11} - \sqrt{10}}$.

Flashback 6.4. On considère les points $A\,(2\,;4)$, $B\,(0\,;-4)$, $C\,(8\,;-6)$ et $D\,(10\,;2)$ quatre points d'un repère du plan. Quelle est la nature du quadrilatère $ABCD$? Justifier.

Flashback 6.5. Soient $A\,(-1\,;3)$, $B\,(-2\,;6)$, $C\,(3\,;0)$ et $D\,(x_D\,;y_D)$ quatre points d'un repère du plan. Trouver les coordonnées de D telles que $ABDC$ soit un parallélogramme.

Flashback 6.6. Soient $A\,(-3\,;3)$, $B\,(1\,;5)$, $D\,(1\,;1)$ et $M\,(-1\,;2)$ quatre points d'un repère du plan.

1. Calculer les coordonnées du point P défini par $\overrightarrow{DP} = -\overrightarrow{DB} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}$.
2. $AMPB$ est-il un parallélogramme ?