Chapitre 4

Modélisation linéaire continue

4.1 Fonctions affines et linéaires

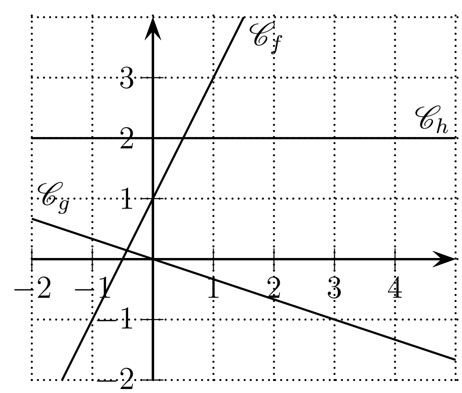
Définition 4.1. *Une **fonction affine** est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par*

$$f(x) = mx + p,$$

avec m, $p \in \mathbb{R}$.

- *Si $m = 0$, alors f est une **fonction constante** : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = p$.*
- *Si $p = 0$, alors f est une **fonction linéaire** : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = mx$.*

Proposition 4.1. *Dans un repère $\left(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\right)$, la représentation graphique d'une fonction affine est une droite d'équation $y = mx + p$.*



Exemples : Les fonctions affines ci-dessous ont pour représentation les droites ci-contre.

1. $f(x) = 2x + 1$;
2. $g(x) = -\dfrac{1}{3}x$;
3. $h(x) = 2$.

Proposition 4.2. *Soit f une fonction affine : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = mx + p$. Quelques soient x_1, $x_2 \in \mathbb{R}$ tels que $x_1 \neq x_2$, on a*

$$m = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Exemple : Soit f une fonction affine vérifiant $f(3) = -2$ et $f(7) = 3$. Déterminons l'expression de f.

Introduction : f est affine donc ils existent m, $p \in \mathbb{R}$ tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = mx + p$.

Calcul de m : on a

$$m = \frac{f(7) - f(3)}{7 - 3} = \frac{3 - (-2)}{4} = \frac{5}{4}.$$

Calcul de p : on a

$$\begin{aligned} & f(3) = -2 \\ \iff & \frac{5}{4} \times 3 + p = -2 \\ \iff & \frac{15}{4} + p = -2 \\ \iff & p = -2 - \frac{15}{4} \\ \iff & p = -\frac{8}{4} - \frac{15}{4} \\ \iff & p = -\frac{23}{4}. \end{aligned}$$

Conclusion : On en déduit que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{5}{4}x - \frac{23}{4}$.

Remarque : Si f est affine et $f(x) = mx + p$, alors on a $f(0) = p$.

Exercices : 4.1 à 4.5 ; 4.12 à 4.15.

4.2 Variations et signes d'une fonction affine

4.2.1 Variations d'une fonction affine

Proposition 4.3. *Soit f une fonction affine s'écrivant $f(x) = mx + p$.*

— *Si $m > 0$ alors f est croissante sur $\mathbb{R}$.*

— *Si $m < 0$ alors f est décroissante sur $\mathbb{R}$.*

Exemples :

1. f définie par $f(x) = 3x + 1$ est croissante sur $\mathbb{R}$.
2. f définie par $f(x) = -\frac{1}{2}x - \frac{2}{3}$ est décroissante sur $\mathbb{R}$.

4.2.2 Signes d'une fonction affine

Proposition 4.4. *Soit f une fonction affine telle que $m \neq 0$. Elle admet pour tableau de signe.*

x	$-\infty$		$-\frac{p}{m}$		$+\infty$
$f(x)$		*signe de -m*	0	*signe de m*	

Exemple : $f(x) = -3x + 2$ admet pour tableau de signes :

x	$-\infty$		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	

Exercices : 4.6 et 4.7 ; 4.16 et 4.17.

4.3 Capacités attendues

- Reconnaître un phénomène continu de croissance linéaire et savoir le modéliser.
- Réaliser et exploiter la représentation graphique des termes d'une fonction affine.
- Résoudre un problème de seuil dans le cas d'une croissance linéaire.

4.4 Exercices

4.4.1 Progresser

Fonctions affines et linéaires

Exercice 4.1. Parmi les fonctions suivantes, lesquelles sont affines ? Le cas échéant, préciser si elles sont constantes, linéaires ou simplement affines.

1. $f_1(x) = 3x + 4$.
2. $f_2(x) = 3x$.
3. $f_3(x) = 3\sqrt{x} + 4$.
4. $f_4(x) = 4$.

Exercice 4.2. Parmi les fonctions suivantes, lesquelles ont une représentation graphique passant par $P\,(-3\,;4)$?

1. $f_1(x) = 4x - 9$.
2. $f_2(x) = -3x - 5$.
3. $f_3(x) = -3x + 4$.
4. $f_4(x) = 4x + 16$.

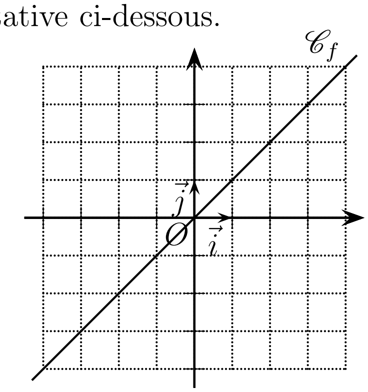
Exercice 4.3. Tracer les droites représentatives des fonctions affines suivantes.

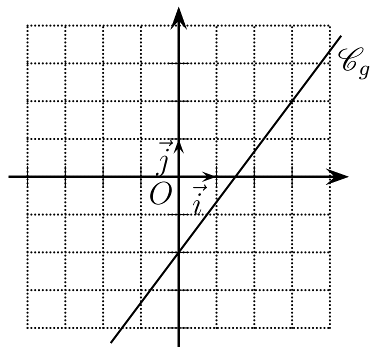
1. $f_1(x) = 4x - 9$.
2. $f_2(x) = -3x - 5$.
3. $f_3(x) = 2$.
4. $f_4(x) = 0,5x$.

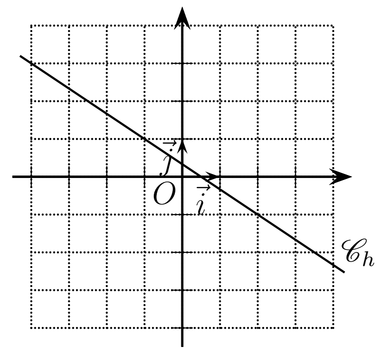
Exercice 4.4. Dans chaque cas, déterminer l'expression de f fonction affine.

1. $f(1) = 3$ et $f(4) = -3$.
2. $f(0) = -2$ et $f(3) = 6$.
3. $f(8) = 1$ et $f(9) = 0$.

Exercice 4.5. Déterminer l'expression de chacune des fonctions affines dont on a la droite représentative ci-dessous.







Variations et signes d'une fonction affine

Exercice 4.6. Donner les variations et le tableau de signes des fonctions de l'exercice 4.5.

Exercice 4.7. Pour chacune des fonctions suivantes, donner ses variations et son tableau de signes. Justifier.

1. $f_1(x) = 4x - 9$.
2. $f_2(x) = -3x - 5$.
3. $f_3(x) = -\dfrac{1}{2}x$.
4. $f_4(x) = \dfrac{2}{3}x - \dfrac{3}{4}$.

4.4.2 Approfondir

Exercice 4.8. [Niveau des mers et des océans] Dans un article de *National Geographic* paru en 2022, on peut lire que, chaque année, le niveau des mers et océans augmente en moyenne de 3,2 mm. On note f la fonction où $f(x)$ représente l'augmentation en mm du niveau des mers et océans x années après 2022, on a donc $f(0) = 0$.

1. Calculer $f(1)$ et $f(2)$.
2. Quelle est la nature de f ? Donner son expression.
3. Calculer la hausse moyenne du niveau des mers et océans à la fin du premier trimestre 2030 puis au milieu de l'année 2050.
4. Un rapport du GIEC sur le climat estime que l'élévation du niveau des mers et océans sera entre 26 et 77 cm d'ici 2100. La modélisation précédente est-elle compatible avec cette estimation ?
5. Un autre rapport rédigé par la NASA et divers organismes européens estime que la hausse sera de 65 cm en 2100.
   (a) Selon ce nouveau modèle, quelle est l'augmentation annuelle moyenne, en mm, du niveau des mers et océans d'ici à 2100 ?
   (b) Déterminer une nouvelle fonction affine g qui modélise cette évolution.

Exercice 4.9. [Renards]
Le tableau suivant donne le nombre de renards observés (en millier) dans une zone protégée en fonction de l'année étudiée.

Année	2010	2012	2014	2016	2017
Individus	1	2		4	4,5

1. Le nombre de renard a augmenté de 50% entre 2012 et 2014. Quel est alors le nombre d'individus en 2014 ?
2. Construire le nuage de points associé au tableau ci-dessus.
3. On admet que l'évolution par année est modélisé par une fonction affine.
   (a) Tracer la droite passant par les points du nuage.
   (b) Déterminer graphiquement le nombre de renards en 2013 et 2015.
   (c) En supposant que ce modèle d'évolution se poursuit jusqu'en 2025, estimer le nombre de renards dans la zone protégée en 2025.

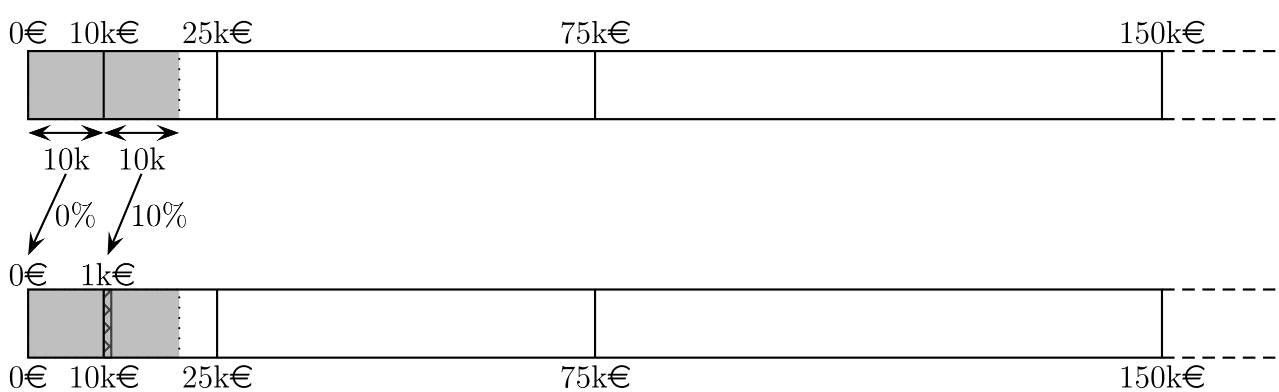
Exercice 4.10. [Impôt sur le revenu] L'impôt sur le revenu se calcule à partir des revenus annuels imposables d'une personne avec un fonctionnement par tranches. Des approximations des tranches et taux marginaux d'impositions (TMI) sont données dans le tableau ci-dessous.

Tranches	[0 ; 10 000[	[10 000 ; 25 000[	[25 000 ; 75 000[	[75 000 ; 150 000[	[150 000 ; +∞[
TMI	0%	10%	30%	40%	45%

Exemples :

— Pour un salaire annuel de 9 000€. Le salaire est inférieur à 10 000€ donc on est dans la première tranche ; on est non imposable.

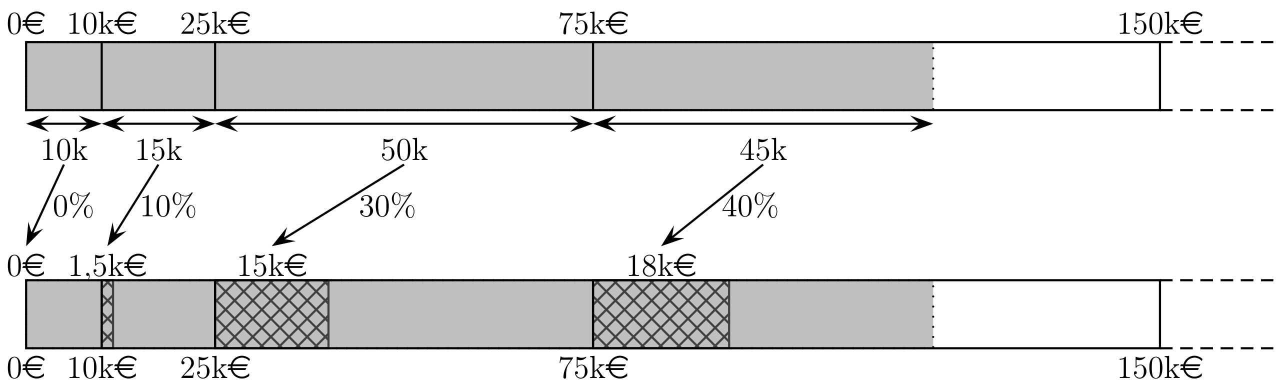
— Pour un salaire annuel de 20 000€. L'erreur est de considérer que l'on est taxé à 10%. Le salaire imposable est en fait découpé selon les tranches.



Tranches	[0 ; 10 000[	[10 000 ; 25 000[
Montant imposable sur la tranche	$10\,000 - 0 = 10\,000$	$20\,000 - 10\,000 = 10\,000$
Taux marginal d'imposition	0%	10%
Montant prélevé sur la tranche	$10\,000 \times 0\% = 0$	$10\,000 \times 10\% = 1\,000$

Pour un salaire annuel de 20 000€, on doit donc payer 1 000€. Cela représente 5% du salaire annuel et non 10%.

— Considérons un salaire annuel imposable de 120 000€.



$$\begin{aligned} 120\,000 &= (10\,000 - 0) + (25\,000 - 10\,000) + (75\,000 - 25\,000) + (120\,000 - 75\,000) \\ &= \underbrace{10\,000}_{\text{tranche 1}} + \underbrace{15\,000}_{\text{tranche 2}} + \underbrace{50\,000}_{\text{tranche 3}} + \underbrace{45\,000}_{\text{tranche 4}} . \end{aligned}$$

Le montant à prélever est alors calculé comme suit :

$$10\,000 \times 0\% + 15\,000 \times 10\% + 50\,000 \times 30\% + 45\,000 \times 40 = 34\,500,$$

soit un taux d'imposition réel de 28,75% et un salaire net d'impôt de 85 500.

Partie A, un exemple de calcul : On considère une personne dont le revenu imposable est de 80 000€.

1. Calculer le montant de l'impôt que devra verser cette personne.
2. En déduire son taux réel d'imposition et son salaire net d'impôt.

Partie B, fonction affine par morceaux : Soit r le revenu imposable d'un ménage, on note $I(r)$ le montant de l'impôt à payer par ce ménage.

1. Déterminer $I(r)$ pour $r \leqslant 10\,000$.
2. Montrer que, pour $r \in [10\,000\,;25\,000[$, on a $I(r) = 0,1r - 1\,000$.
3. Déterminer l'expression de $I(r)$ pour la troisième tranche.
4. On admet que l'expression de $I(r)$ pour la quatrième, resp. cinquième, est $I(r) = 0,4r - 13\,500$, resp. $I(r) = 0,45r - 21\,000$. La fonction I possède donc plusieurs expressions, toujours affines, selon les intervalles. On dit que I est **affine par morceaux**.

(a) Compléter :

$$I(r) = \begin{cases} \dots & \text{si} \quad r \in [0\,;10\,000[\,, \\ 0,1r - 1\,000 & \text{si} \quad r \in \dots \\ \dots & \text{si} \quad r \in \dots \\ \dots & \text{si} \quad r \in \dots \\ \dots & \text{si} \quad r \in \dots \end{cases}$$

(b) Un ménage gagne 50 000€. Calculer le montant de ses impôts, son taux d'imposition réel et ses revenus nets d'impôts.

Partie C, changement de tranche : On considère deux ménages dont les revenus imposables sont respectivement de 24 000€ et 25 000€. Compléter le tableau ci-dessous (on arrondira à $0,1\%$ puis dire contrairement ou non à une idée répandue, il nous reste moins d'argent après impôt si on passe dans une tranche supérieure ?

Revenus imposables	Impôts	Taux d'imposition réel	Revenus nets d'impôts
24 000			
25 000			

Partie D, tableur :

1. Ouvrir le tableur et créer un fichier `impot.odt`.
2. Dans la case `A1`, écrire « Tranches », puis dans les cases dessous leur montant : 10 000, 25 000, 75 000 et 150 000.
3. Dans la case `C1`, écrire « Revenus imposables », et dans la case `C2` 5 000.
4. Dans la case `D1`, écrire « Impôt », et dans la case `D2` une formule permettant de calculer l'impôt à payer correspondant au revenu de la case `C2` à l'aide de l'expression de I vue précédemment. *Indication :* on pourra utiliser la fonction `SI.CONDITIONS`.
5. Dans la case `E1`, écrire « Taux d'imposition », et dans la case `E2` une formule permettant de calculer le taux d'imposition. On mettra le résultat au format pourcentage.
6. Dans la case `F1`, écrire « Revenus nets d'impôts », et dans la case `F2` une formule permettant de calculer les revenus restants après imposition.
7. Dans la case `G1`, écrire « Taux net / brut », et dans la case `G2` une formule permettant de calculer le ratio revenus nets d'impôts sur revenus imposables. On mettra le résultat au format pourcentage.
8. Étendre les cases `C2` à `G2` avec un pas de 5 000 jusqu'à atteindre un revenu imposable de 2 000 000.
9. Afficher un graphique donnant l'évolution des impôts et nets d'impôts en fonction des revenus imposables.

10. Afficher un graphique donnant l'évolution taux d'imposition et net sur brut en fonction des revenus imposables.
11. Interpréter ces courbes.

Exercice 4.11. [Collision] Vous êtes responsables des effets spéciaux et cascades sur le tournage d'un film et allez devoir organiser une scène de collision entre deux voitures. Les deux véhicules, notés A et B, vont se foncer dessus en ligne droite avec des vitesses moyennes respectives $v_A = 100$ km/h et $v_B = 80$ km/h. Les deux véhicules partiront à 2km l'un de l'autre.

1. Convertir les vitesses v_A et v_B en m/s. Arrondir au m/s.
2. Donner les expressions des fonctions f_A et f_B donnant la distance parcourue par les voitures A et B en fonction du temps écoulé t depuis leur départ.
3. Déterminer à quel moment aura lieu la collision.
4. En déduire à quelle distance du point de départ de la voiture A aura lieu la collision afin de pouvoir y installer l'équipe de tournage.

4.4.3 S'entraîner

Fonctions affines et linéaires

Exercice 4.12. Parmi les fonctions suivantes, lesquelles ont une représentation graphique passant par $P\,(-3\,;4)$?

1. $f_1(x) = -\dfrac{7}{3}x - 3.$
2. $f_2(x) = \dfrac{8}{5}.$
3. $f_3(x) = -\dfrac{4}{3}x.$
4. $f_4(x) = -\dfrac{3}{4}x.$

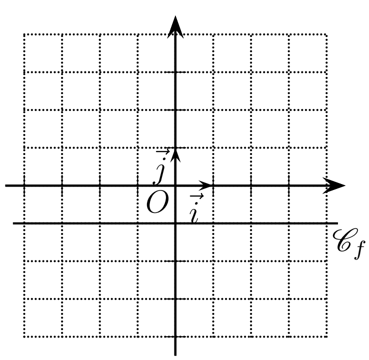
Exercice 4.13. Tracer les droites représentatives des fonctions affines suivantes.

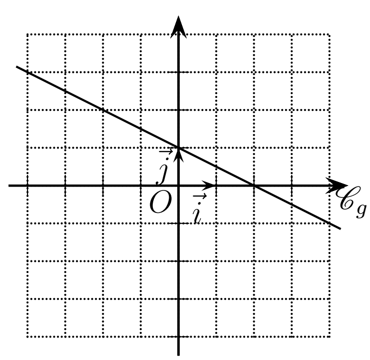
1. $f_1(x) = -\dfrac{7}{3}x - 3.$
2. $f_2(x) = \dfrac{8}{5}.$
3. $f_3(x) = -\dfrac{3}{4}x.$

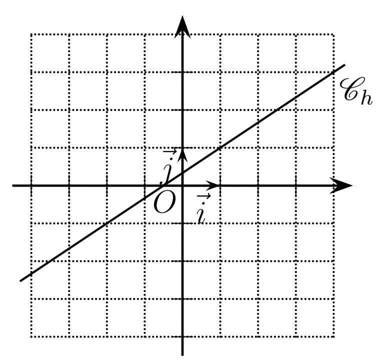
Exercice 4.14. Dans chaque cas, déterminer l'expression de f fonction affine vérifiant les conditions ci-dessous.

1. $f(-3) = 1$ et $f(0) = 9.$
2. $f(5) = -2$ et $f(7) = 0.$

Exercice 4.15. Déterminer l'expression de chacune des fonctions affines dont on a la droite représentative ci-dessous.







Variations et signes d'une fonction affine

Exercice 4.16. Donner les variations et le tableau de signes des fonctions de l'exercice 4.15.

Exercice 4.17. Pour chacune des fonctions suivantes, donner ses variations et son tableau de signes. Justifier.

1. $f_1(x) = -\dfrac{7}{3}x - 3$.
2. $f_2(x) = \dfrac{8}{5}$.
3. $f_3(x) = \sqrt{5}x$.
4. $f_4(x) = -\dfrac{3}{4}x + \dfrac{1}{2}$.

4.4.4 Automatismes

Automatisme 4.1. Dans un manoir, il y a 1 300 pokémons. 1% d'entre eux sont des magmars. Le nombre de magmars dans le manoir est égal à :

1. 1 287
2. 63
3. 1
4. 13

Automatisme 4.2. Dans un parc, un cinquième des pokémons sont des rhinocornes, parmi eux, trois quarts sont des femelles. La proportion des femelles rhincornes par rapport à l'ensemble des pokémons du parc est égale à :

1. 15%
2. $\dfrac{19}{20}$
3. 20%
4. $1,5$

Automatisme 4.3. On considère le nombre $N = \dfrac{15^4}{5^2}$. On a :

1. $N = 3^2$
2. $N = 15^2$
3. $N = 25 \times 15^2$
4. $N = 9 \times 15^2$

Automatisme 4.4. On considère $A = \dfrac{5}{6 - \dfrac{4}{5}}$. On a :

1. $\dfrac{25}{2}$
2. -26
3. $\dfrac{26}{5}$
4. $\dfrac{25}{26}$

Automatisme 4.5. Soit h la fonction définie par : $h(x) = 2x - 8$. $h(x-2)$ est égal à :

1. $2x - 12$
2. $3x - 10$
3. $2x - 10$
4. $2x^2 - 12x + 16$

Automatisme 4.6. Soit h la fonction définie par : $h(x) = 5x - 5$. L'image de $\dfrac{1}{7}$ par la fonction h est :

1. $\dfrac{36}{7}$
2. $-\dfrac{30}{7}$
3. $\dfrac{40}{7}$
4. $-\dfrac{174}{35}$

Automatisme 4.7. Soit la fonction f définie par $f(x) = -8x + 43$. Le plus grand entier naturel n tel que $f(n)$ soit strictement positif est :

1. 4
2. 5
3. 6
4. 7

Automatisme 4.8. On considère une fonction affine f telle que $f(5) = 0$ et $f(9) = -8$. L'image de 14 par cette fonction affine est :

1. -28
2. -8
3. -18
4. -26

Automatisme 4.9.

1. $1,6 \times 1,15 = 1,84$
2. $0,6 \times 0,15 = 0,09$
3. $0,4 \times 1,15 = 0,46$
4. $1,6 \times 0,85 = 1,36$

En utilisant l'un des résultats précédents, déterminer le taux global d'évolution d'un article qui diminue de 60% dans un premier temps, puis qui augmente de 15% dans un second temps.

1. -136%
2. 46%
3. -45%
4. -54%

Automatisme 4.10. Le prix d'un pull est 50 €. Il baisse de 15%. Son nouveau prix est :

1. $42,5$ €
2. $49,25$ €
3. $49,85$ €
4. $57,5$ €

Automatisme 4.11. On donne ci-dessous le tableau de répartition des tailles de plants d'une serre, rangées en classes.

Taille	[2 ; 6[	[6 ; 10[
Effectifs	1	3

Les tailles sont exprimées en centimètres. Quelle est la taille moyenne en cm des plants de cette serre ?

1. 8
2. 7
3. 8,5
4. 2

Automatisme 4.12. On a représenté une courbe $\mathscr{C}$ d'une fonction f. Les points B, E, R et V appartiennent à $\mathscr{C}$. Leurs abscisses sont notées respectivement x_B, x_E, x_R et x_V. L'inéquation $x \times f(x) > 0$ est vérifiée par :

1. x_B, x_E et x_R
2. x_E et x_V
3. x_E et x_R
4. x_B et x_R