

Spécialité mathématiques

Orthogonalité dans l'espace

Sujet 1

09/12/2025

Note : / 15

Durée : 1 h

- La calculatrice n'est pas autorisée.
- Le sujet est à rendre avec la copie.

Exercice 1 [/ 3]

Soient \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs de l'espace tels que $\|\vec{u}\| = 3$, $\|\vec{v}\| = 4$ et $\|\vec{u} + \vec{v}\| = \sqrt{25 - 12\sqrt{3}}$. Déterminer les mesures possibles de l'angle $(\vec{u}; \vec{v})$.

Solution: On va utiliser la formule

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos((\vec{u}; \vec{v})).$$

Cependant, pour cela, on a besoin de $\vec{u} \cdot \vec{v}$ que l'on calcule comme suit

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} \left(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 \right).$$

Cela nous donne

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} &= \frac{1}{2} \left(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\sqrt{25 - 12\sqrt{3}}^2 - 3^2 - 4^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} (25 - 12\sqrt{3} - 9 - 16) \\ &= \frac{1}{2} (-12\sqrt{3}) \\ &= -6\sqrt{3}. \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} -6\sqrt{3} &= 3 \times 4 \times \cos((\vec{u}; \vec{v})) \\ \iff \cos((\vec{u}; \vec{v})) &= -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \iff (\vec{u}; \vec{v}) &= \pm \frac{5\pi}{6}. \end{aligned}$$

Exercice 2 [/ 4]

$A(0; 1; 0)$, $B(-1; 2; 1)$ et $C(3; 0; 1)$ sont des points dans l'espace muni d'un repère orthonormé.

1. [/ 2] Montrer que A , B et C définissent un plan.

Solution: A , B et C définissent un plan si et seulement si les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} ne sont pas colinéaires. Calculons leurs coordonnées.

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

De même, on trouve $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. On a alors

$$\frac{z_{\overrightarrow{AB}}}{z_{\overrightarrow{AC}}} = 1 \neq -1 = \frac{y_{\overrightarrow{AB}}}{y_{\overrightarrow{AC}}}.$$

\overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} ne sont pas colinéaires et donc A , B et C définissent un plan.

2. [/ 2] Déterminer un vecteur normal au plan (ABC) .

Solution: Soit $\vec{n} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. \vec{n} est normal au plan (ABC) si et seulement si \vec{n} est orthogonal

à deux vecteurs directeurs de (ABC) : \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} (d'après 1.); et, étant dans un repère orthonormé, si et seulement si

$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} (-1) \times x + 1 \times y + 1 \times z = 0 \\ 3 \times x + (-1) \times y + 1 \times z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -x + y + z = 0 \\ 3x - y + z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -x + y + z = 0 \\ 2x + 2z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -x + y + z = 0 \\ x = -z \end{cases} \iff \begin{cases} -(-z) + y + z = 0 \\ x = -z \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y = -2z \\ x = -z \end{cases}.$$

Pour $z = 1$, on obtient $\vec{n} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, vecteur normal au plan (ABC) .

Exercice 3 [/ 8]

$A(1; -2; -1)$, $B(1; 1; -1)$ et $C(1; -2; 2)$, $D(3; -1; 0)$ sont des points dans l'espace muni d'un repère orthonormé.

1. [/ 2] Montrer que A , B , C et D sont non coplanaires.

Solution: A , B , C et D sont non coplanaires si et seulement si \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AC} et \overrightarrow{AD} sont linéairement indépendants, si et seulement si

$$a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC} + c\overrightarrow{AD} = \vec{0} \implies a = b = c = 0.$$

On a

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix} \implies \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

De même, on trouve $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AD} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. On a alors

$$a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC} + c\overrightarrow{AD} = \vec{0} \iff \begin{cases} 0a + 0b + 2c = 0 \\ 3a + 0b + 1c = 0 \\ 0a + 3b + 1c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} c = 0 \\ a = 0 \\ b = 0 \end{cases}.$$

2. [/ 1] Montrer que le triangle ABC est rectangle en A .

Solution: ABC est rectangle en A si et seulement si \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} sont orthogonaux et puisque l'on est dans un repère orthonormé, si et seulement si $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$. On a

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \times 0 + 3 \times 0 + 0 \times 3 = 0.$$

ABC est donc bien rectangle en A .

3. [/ 3] Montrer que le point $H(1; -1; 0)$ est le projeté orthogonal de D sur le plan (ABC) .

Solution: H est le projeté orthogonal de D sur le plan (ABC) si et seulement si

1. $H \in (ABC)$;
2. \overrightarrow{HD} est normal à (ABC) .

\overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} forment une base du plan (ABC) puisqu'ils sont orthogonaux, et donc non colinéaires.

1. $H \in (ABC) \iff \exists (\lambda; \mu) \in \mathbb{R}^2 / \overrightarrow{AH} = \lambda\overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{AC}$.

On a $\overrightarrow{AH} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\overrightarrow{AH} = \lambda\overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{AC} \iff \begin{cases} 0 = 0\lambda + 0\mu \\ 1 = 3\lambda + 0\mu \\ 1 = 0\lambda + 3\mu \end{cases} \iff \lambda = \mu = \frac{1}{3}.$$

Donc $H \in (ABC)$.

2. \overrightarrow{HD} est normal à (ABC) si et seulement si \overrightarrow{HD} est orthogonal à deux vecteurs de base du plan : \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} . On a

On a $\overrightarrow{HD} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. On en déduit que

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{HD} = 0 \times 2 + 3 \times 0 + 0 \times 0 = 0 \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{HD} = 0 \times 2 + 0 \times 0 + 3 \times 0 = 0.$$

Étant un dans un repère orthonormé, \overrightarrow{HD} est orthogonal à \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} et donc normal à (ABC) .

H est donc bien le projeté orthogonal de D sur (ABC) .

4. [/ 2] Calculer le volume du tétraèdre $ABCD$. *Rappel* : le volume d'un tétraèdre est donné par la formule $\mathcal{V} = \frac{1}{3}\mathcal{A}h$ où h est la hauteur issue d'un point et \mathcal{A} l'aire de la base associée à cette hauteur.

Solution:

Comme H est le projeté orthogonal de D sur (ABC) , $[HD]$ est la hauteur issue de D . Il suffit donc de calculer HD et l'aire du triangle ABC . On a

$$HD = \sqrt{2^2 + 0^2 + 0^2} = 2.$$

D'après la question 2, ABC est rectangle en A , on a donc

$$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{AB \times AC}{2}.$$

On a

$$AB = \sqrt{0^2 + 3^2 + 0^2} = 3 \quad \text{et} \quad AC = \sqrt{0^2 + 0^2 + 3^2} = 3.$$

Donc

$$\mathcal{V}_{ABCD} = \frac{1}{3} \times \frac{3 \times 3}{2} \times 2 = 3.$$

Non noté : Si vous avez fini l'évaluation, vous pouvez colorier Lokhlass.

