

# Spécialité mathématiques

## Orthogonalité dans l'espace

Sujet 1

09/12/2025

Note : / 15

Durée : 1 h

- La calculatrice n'est pas autorisée.
- Le sujet est à rendre avec la copie.

**Exercice 1 [ / 3]**

Soient  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs de l'espace tels que  $\|\vec{u}\| = 3$ ,  $\|\vec{v}\| = 4$  et  $\|\vec{u} + \vec{v}\| = \sqrt{25 - 12\sqrt{3}}$ . Déterminer les mesures possibles de l'angle  $(\vec{u}; \vec{v})$ .

**Solution:** On va utiliser la formule

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos((\vec{u}; \vec{v})).$$

Cependant, pour cela, on a besoin de  $\vec{u} \cdot \vec{v}$  que l'on calcule comme suit

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2).$$

Cela nous donne

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} &= \frac{1}{2} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2) \\ &= \frac{1}{2} \left( \sqrt{25 - 12\sqrt{3}}^2 - 3^2 - 4^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} (25 - 12\sqrt{3} - 9 - 16) \\ &= \frac{1}{2} (-12\sqrt{3}) \\ &= -6\sqrt{3}. \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} -6\sqrt{3} &= 3 \times 4 \times \cos((\vec{u}; \vec{v})) \\ \iff \cos((\vec{u}; \vec{v})) &= -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \iff (\vec{u}; \vec{v}) &= \pm \frac{5\pi}{6}. \end{aligned}$$

## Exercice 2 [ / 4]

$A(0;1;0)$ ,  $B(-1;2;1)$  et  $C(3;0;1)$  sont des points dans l'espace muni d'un repère orthonormé.

1. [ / 2] Montrer que  $A$ ,  $B$  et  $C$  définissent un plan.

**Solution:**  $A$ ,  $B$  et  $C$  définissent un plan si et seulement si les vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$  ne sont pas colinéaires. Calculons leurs coordonnées.

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix} \implies \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

De même, on trouve  $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ . On a alors

$$\frac{z_{\overrightarrow{AB}}}{z_{\overrightarrow{AC}}} = 1 \neq -1 = \frac{y_{\overrightarrow{AB}}}{y_{\overrightarrow{AC}}}.$$

$\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$  ne sont pas colinéaires et donc  $A$ ,  $B$  et  $C$  définissent un plan.

2. [ / 2] Déterminer un vecteur normal au plan  $(ABC)$ .

**Solution:** Soit  $\vec{n} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ .  $\vec{n}$  est normal au plan  $(ABC)$  si et seulement si  $\vec{n}$  est orthogonal à deux vecteurs directeurs de  $(ABC)$  :  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$  (d'après 1.) ; et, étant dans un repère orthonormé, si et seulement si

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} \vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \end{array} \right. &\iff \left\{ \begin{array}{l} (-1) \times x + 1 \times y + 1 \times z = 0 \\ 3 \times x + (-1) \times y + 1 \times z = 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} -x + y + z = 0 \\ 3x - y + z = 0 \end{array} \right. \\ &\iff \left\{ \begin{array}{l} -x + y + z = 0 \\ 2x + 2z = 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} -x + y + z = 0 \\ x = -z \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} -(-z) + y + z = 0 \\ x = -z \end{array} \right. \\ &\iff \left\{ \begin{array}{l} y = -2z \\ x = -z \end{array} \right. . \end{aligned}$$

Pour  $z = 1$ , on obtient  $\vec{n} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ , vecteur normal au plan  $(ABC)$ .

### Exercice 3 [ / 8]

$A(1; -2; -1)$ ,  $B(1; 1; -1)$  et  $C(1; -2; 2)$ ,  $D(3; -1; 0)$  sont des points dans l'espace muni d'un repère orthonormé.

1. [ / 2] Montrer que  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  sont non coplanaires.

**Solution:**  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  sont non coplanaires si et seulement si  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{AC}$  et  $\overrightarrow{AD}$  sont linéairement indépendants, si et seulement si

$$a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC} + c\overrightarrow{AD} = \vec{0} \implies a = b = c = 0.$$

On a

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix} \implies \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

De même, on trouve  $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$  et  $\overrightarrow{AD} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ . On a alors

$$a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC} + c\overrightarrow{AD} = \vec{0} \iff \begin{cases} 0a + 0b + 2c = 0 \\ 3a + 0b + 1c = 0 \\ 0a + 3b + 1c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} c = 0 \\ a = 0 \\ b = 0 \end{cases}.$$

2. [ / 1] Montrer que le triangle  $ABC$  est rectangle en  $A$ .

**Solution:**  $ABC$  est rectangle en  $A$  si et seulement si  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$  sont orthogonaux et puisque l'on est dans un repère orthonormé, si et seulement si  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ . On a

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \times 0 + 3 \times 0 + 0 \times 3 = 0.$$

$ABC$  est donc bien rectangle en  $A$ .

3. [ / 3] Montrer que le point  $H(1; -1; 0)$  est le projeté orthogonal de  $D$  sur le plan  $(ABC)$ .

**Solution:**  $H$  est le projeté orthogonal de  $D$  sur le plan  $(ABC)$  si et seulement si

1.  $H \in (ABC)$  ;
2.  $\overrightarrow{HD}$  est normal à  $(ABC)$ .

$\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$  forment une base du plan  $(ABC)$  puisqu'ils sont orthogonaux, et donc non colinéaires.

1.  $H \in (ABC) \iff \exists (\lambda; \mu) \in \mathbb{R}^2 / \overrightarrow{AH} = \lambda \overrightarrow{AB} + \mu \overrightarrow{AC}$ .

On a  $\overrightarrow{AH} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

$$\overrightarrow{AH} = \lambda \overrightarrow{AB} + \mu \overrightarrow{AC} \iff \begin{cases} 0 = 0\lambda + 0\mu \\ 1 = 3\lambda + 0\mu \\ 1 = 0\lambda + 3\mu \end{cases} \iff \lambda = \mu = \frac{1}{3}.$$

Donc  $H \in (ABC)$ .

2.  $\overrightarrow{HD}$  est normal à  $(ABC)$  si et seulement si  $\overrightarrow{HD}$  est orthogonal à deux vecteurs de base du plan :  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$ . On a

On a  $\overrightarrow{HD} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ . On en déduit que

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{HD} = 0 \times 2 + 3 \times 0 + 0 \times 0 = 0 \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{HD} = 0 \times 2 + 0 \times 0 + 3 \times 0 = 0.$$

Étant donné dans un repère orthonormé,  $\overrightarrow{HD}$  est orthogonal à  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$  et donc normal à  $(ABC)$ .

$H$  est donc bien le projeté orthogonal de  $D$  sur  $(ABC)$ .

4. [ / 2] Calculer le volume du tétraèdre  $ABCD$ . *Rappel* : le volume d'un tétraèdre est donné par la formule  $V = \frac{1}{3}\mathcal{A}h$  où  $h$  est la hauteur issue d'un point et  $\mathcal{A}$  l'aire de la base associée à cette hauteur.

**Solution:**

Comme  $H$  est le projeté orthogonal de  $D$  sur  $(ABC)$ ,  $[HD]$  est la hauteur issue de  $D$ . Il suffit donc de calculer  $HD$  et l'aire du triangle  $ABC$ . On a

$$HD = \sqrt{2^2 + 0^2 + 0^2} = 2.$$

D'après la question 2,  $ABC$  est rectangle en  $A$ , on a donc

$$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{AB \times AC}{2}.$$

On a

$$AB = \sqrt{0^2 + 3^2 + 0^2} = 3 \quad \text{et} \quad AC = \sqrt{0^2 + 0^2 + 3^2} = 3.$$

Donc

$$V_{ABCD} = \frac{1}{3} \times \frac{3 \times 3}{2} \times 2 = 3.$$

**Non noté :** Si vous avez fini l'évaluation, vous pouvez colorier Loklass.

