Nom : **Prénom :** **2de :**

Mathématiques

Équations et inéquations

Sujet 1-B 02/12/2025

Note : / 20 Durée : 55 min

— La calculatrice n'est pas autorisée.

Exercice 1 [/ 2]

Jane et Liara sont au restaurant à la Citadelle. Jane compte prendre une entrée et un plat ; Liara, elle, va prendre un plat et un dessert.

— Le prix E des entrées est entre 10 et 13 crédits.
— Le prix P des plats est entre 20 et 25 crédits.
— Le prix D les desserts est entre 12 et 17 crédits.

Écrire ces encadrements sous forme d'inégalités puis donner un encadrement du prix total T que vont payer Jane et Liara pour leur repas.

Solution: On a

$$\begin{aligned} & 10 \leqslant E \leqslant 13 \\ & 20 \leqslant P \leqslant 25 \\ & 12 \leqslant D \leqslant 17 \\ \Longrightarrow & 10 + 2 \times 20 + 12 \leqslant E + 2 \times P + D \leqslant 13 + 2 \times 25 + 17 \\ \Longleftrightarrow & 62 \leqslant T \leqslant 80. \end{aligned}$$

Jane et Liara devront donc payer entre 62 et 80 crédits au total.

Exercice 2 [/ 2]

On considère $A = \dfrac{13}{14}$ et $B = \dfrac{6}{7}$. Déterminer si on a $A < B$ ou $A > B$.

Solution: A et B sont tous les deux strictement positifs, on a donc $A < B$ si et seulement si $\dfrac{A}{B} < 1$ et inversement.

$$\frac{A}{B} = \frac{13/14}{6/7} = \frac{13 \times 7}{14 \times 6} = \frac{13 \times 7}{7 \times 2 \times 6} = \frac{13}{2 \times 6} = \frac{13}{21} > 1.$$

On a donc $A > B$.

Exercice 3 [/ 4]

1. **[/ 1]** Développer $B = (x+5)^2 - 16$.

Solution:
$$B = (x+5)^2 - 16 = x^2 + 10x + 25 - 16 = x^2 + 10x + 9.$$

2. **[/ 1]** Factoriser B.

Solution:
$$B = (x+5)^2 - 16 = (x+5)^2 - 4^2 = (x+5+4)(x+5-4) = (x+9)(x+1).$$

3. **[/ 2]** Déterminer les solutions de l'équation $x^2 + 10x + 9 = 0$.

Solution: D'après les question 1 et 2, on a
$$\begin{aligned} & x^2 + 10x + 9 = 0 \\ \iff & B = 0 \\ \iff & (x+9)(x+1) = 0. \end{aligned}$$
D'après la règle du produit nul, on a soit $x+9=0$ i.e. $x=-9$, soit $x+1=0$ i.e. $y=-1$. L'ensemble des solutions est donc $\{-9\,;\,-1\}$.

Exercice 4 [/ 2]

Résoudre $\dfrac{5v-4}{3v+2} = 0$.

Solution: D'après la règle du quotient nul, seul le numérateur peut être nul, donc
$$\begin{aligned} & 5v + 4 = 0 \\ \iff & 5v = -4 \\ \iff & v = -\frac{4}{5}. \end{aligned}$$
On vérifie que cette valeur n'annule pas le dénominateur :
$$3 \times \left(-\frac{4}{5}\right) + 2 = -\frac{12}{5} + 2 = -\frac{12}{5} + \frac{10}{5} = -\frac{2}{5} \neq 0.$$
La solution est donc $v = -\dfrac{4}{5}$.

Exercice 5 [/ 1]

Résoudre l'inéquation $-8z-21 \geqslant -5$.

Solution:

$$\begin{aligned} & -8z-21 \geqslant -5 \\ \iff & -8z \geqslant 16 \\ \iff & z \leqslant \frac{16}{-8} \quad \text{on change le sens de l'inégalité car on divise par } -8 \\ \iff & z \leqslant 2. \end{aligned}$$

L'ensemble solution est donc l'intervalle $]-\infty\,;2]$.

Exercice 6 [/ 3]

Résoudre l'inéquation $(4x-9)(3x+8) \leqslant 0$.

Solution: On a

$$\begin{aligned} & 4x-9 \geqslant 0 \\ \iff & 4x \geqslant 9 \\ \iff & x \geqslant \frac{9}{4}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 3x+4 \geqslant 0 \\ \iff & 3x \geqslant -4 \\ \iff & x \geqslant -\frac{4}{3}. \end{aligned}$$

x	$-\infty$		$-\frac{8}{3}$		$\frac{9}{4}$		$+\infty$
$4x - 9$		$-$		$-$	0	$+$	
$3x + 8$		$-$	0	$+$		$+$	
$(4x-9)\times(3x+8)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On en déduit que la solution de l'inéquation est l'intervalle $\left[-\frac{8}{3}\,;\frac{9}{4}\right]$.

Exercice 7 [/ 3]

Résoudre l'inéquation $\dfrac{-8x+8}{2-7x} \geqslant 1$.

Solution: On a

$$\begin{aligned}
& \frac{-8x+8}{5-3x} \geqslant 1 \\
\iff & \frac{-8x+8}{2-7x} - 1 \geqslant 0 \\
\iff & \frac{-8x+8}{2-7x} - \frac{2-7x}{2-7x} \geqslant 0 \\
\iff & \frac{-8x+8-(2-7x)}{2-7x} \geqslant 0 \\
\iff & \frac{-8x+8-2+7x}{2-7x} \geqslant 0 \\
\iff & \frac{-x+6}{2-7x} \geqslant 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -x+6 \geqslant 0 \\
\iff & -x \geqslant -6 \\
\iff & x \leqslant 6,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 2-7x \geqslant 0 \\
\iff & -7x \geqslant -2 \\
\iff & x \leqslant \frac{7}{2}.
\end{aligned}$$

x	$-\infty$		$\frac{2}{7}$		6		$+\infty$
$-x+6$		$+$		$+$	0	$-$	
$2-7x$		$+$	0	$-$		$-$	
$\dfrac{-x+6}{2-7x}$		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

On en déduit que la solution de l'inéquation est l'intervalle $\left]-\infty\,;\frac{2}{7}\right[\cup [6\,;+\infty[$.

Exercice 8 [/ 3]

Résoudre le système $\begin{cases} 3x - 7y = 13 \\ x + 3y = -1 \end{cases}$

Solution:

$$
\begin{aligned}
& \begin{cases} 3x - 7y = 13 \quad (L_1) \\ x + 3y = -1 \quad (L_2) \end{cases} \\
\iff & \begin{cases} 3x - 7y = 13 \quad (L_1) \\ 3x + 9y = -3 \quad (L_2 \leftarrow 3L_2) \end{cases} \\
\iff & \begin{cases} 3x - 7y = 13 \quad (L_1) \\ 0x + 16y = -16 \quad (L_2 \leftarrow L_2 - L_1) \end{cases} \\
\iff & \begin{cases} 3x - 7y = 13 \\ y = -1 \end{cases} \\
\iff & \begin{cases} 3x - 7 \times (-1) = 13 \\ y = -1 \end{cases} \\
\iff & \begin{cases} 3x + 7 = 13 \\ y = -1 \end{cases} \\
\iff & \begin{cases} 3x = 6 \\ y = -1 \end{cases} \\
\iff & \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}
\end{aligned}
$$

Le système a pour solution $(2\,;-1)$.