Nom : **Prénom :** **2$^{\text{de}}$:**

Mathématiques

Équations et inéquations

Sujet 1-A 02/12/2025

Note : / 20 Durée : 55 min

— La calculatrice n'est pas autorisée.

Exercice 1 [/ 2]

Jane et Liara sont au restaurant à la Citadelle. Jane compte prendre une entrée et un plat ; Liara, elle, va prendre un plat et un dessert.

— Le prix E des entrées est entre 8 et 10 crédits.
— Le prix P des plats est entre 15 et 20 crédits.
— Le prix D les desserts est entre 5 et 10 crédits.

Écrire ces encadrements sous forme d'inégalités puis donner un encadrement du prix total T que vont payer Jane et Liara pour leur repas.

Solution: On a

$$\begin{aligned}
& 8 \leqslant E \leqslant 10 \\
& 15 \leqslant P \leqslant 20 \\
& 5 \leqslant D \leqslant 10 \\
\Longrightarrow\ & 8 + 2 \times 15 + 5 \leqslant E + 2 \times P + D \leqslant 10 + 2 \times 20 + 10 \\
\Longleftrightarrow\ & 43 \leqslant T \leqslant 60.
\end{aligned}$$

Jane et Liara devront donc payer entre 43 et 60 crédits au total.

Exercice 2 [/ 2]

On considère $A = \dfrac{9}{11}$ et $B = \dfrac{6}{7}$. Déterminer si on a $A < B$ ou $A > B$.

Solution: A et B sont tous les deux strictement positifs, on a donc $A < B$ si et seulement si $\dfrac{A}{B} < 1$ et inversement.

$$\frac{A}{B} = \frac{9/11}{6/7} = \frac{9 \times 7}{11 \times 6} = \frac{3 \times 3 \times 7}{11 \times 2 \times 3} = \frac{3 \times 7}{11 \times 2} = \frac{21}{22} < 1.$$

On a donc $A < B$.

Exercice 3 [/ 4]

1. **[/ 1]** Développer $A = (y+1)^2 - 9$.

Solution:

$$A = (y+1)^2 - 9 = y^2 + 2y + 1 - 9 = y^2 + 2y - 8.$$

2. **[/ 1]** Factoriser A.

Solution:

$$A = (y+1)^2 - 9 = (y+1)^2 - 3^2 = (y+1+3)(y+1-3) = (y+4)(y-2).$$

3. **[/ 2]** Déterminer les solutions de l'équation $y^2 + 2y - 8 = 0$.

Solution: D'après les question 1 et 2, on a

$$\begin{aligned} & y^2 + 2y - 8 = 0 \\ \iff & A = 0 \\ \iff & (y+4)(y-2) = 0. \end{aligned}$$

D'après la règle du produit nul, on a soit $y + 4 = 0$ i.e. $y = -4$, soit $y - 2 = 0$ i.e. $y = 2$. L'ensemble des solutions est donc $\{-4\,;\,2\}$.

Exercice 4 [/ 2]

Résoudre $\dfrac{4u+5}{2-3u} = 0$.

Solution: D'après la règle du quotient nul, seul le numérateur peut être nul, donc

$$\begin{aligned} & 4u + 5 = 0 \\ \iff & 4u = -5 \\ \iff & u = -\frac{5}{4}. \end{aligned}$$

On vérifie que cette valeur n'annule pas le dénominateur :

$$2 - 3 \times \left(-\frac{5}{4}\right) = 2 + \frac{15}{4} = \frac{8}{4} + \frac{15}{4} = \frac{23}{4} \neq 0.$$

La solution est donc $u = -\dfrac{5}{4}$.

Exercice 5 [/ 1]

Résoudre l'inéquation $-6y - 15 < 6$.

Solution:

$$\begin{aligned}
& -6y - 15 < 6 \\
\iff & -6y < 21 \\
\iff & y > \frac{21}{-6} \quad \text{on change le sens de l'inégalité car on divise par } -6 \\
\iff & y > -\frac{7}{2}.
\end{aligned}$$

L'ensemble solution est donc l'intervalle $\left]\frac{7}{2}\,;+\infty\right[$.

Exercice 6 [/ 3]

Résoudre l'inéquation $(4x-1)(2x+3) \leqslant 0$.

Solution: On a

$$\begin{aligned}
& 4x - 1 \geqslant 0 \\
\iff & 4x \geqslant 1 \\
\iff & x \geqslant \frac{1}{4},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 2x + 3 \geqslant 0 \\
\iff & 2x \geqslant -3 \\
\iff & x \geqslant -\frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		$\frac{1}{4}$		$+\infty$
$4x - 1$		$-$		$-$	0	$+$	
$2x + 3$		$-$	0	$+$		$+$	
$(4x-1)\times(2x+3)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On en déduit que la solution de l'inéquation est l'intervalle $\left[-\frac{3}{2}\,;\frac{1}{4}\right]$.

Exercice 7 [/ 3]

Résoudre l'inéquation $\dfrac{-4x+7}{5-3x} \geqslant 1$.

Solution: On a

$$\begin{aligned}
& \frac{-4x+7}{5-3x} \geqslant 1 \\
\iff & \frac{-4x+7}{5-3x} - 1 \geqslant 0 \\
\iff & \frac{-4x+7}{5-3x} - \frac{5-3x}{5-3x} \geqslant 0 \\
\iff & \frac{-4x+7-(5-3x)}{5-3x} \geqslant 0 \\
\iff & \frac{-4x+7-5+3x}{5-3x} \geqslant 0 \\
\iff & \frac{-x+2}{5-3x} \geqslant 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -x+2 \geqslant 0 \\
\iff & -x \geqslant -2 \\
\iff & x \leqslant 2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 5-3x \geqslant 0 \\
\iff & -3x \geqslant -5 \\
\iff & x \leqslant \frac{5}{3}.
\end{aligned}$$

x	$-\infty$		$\frac{5}{3}$		2		$+\infty$
$-x+2$		$+$		$+$	0	$-$	
$5-3x$		$+$	0	$-$		$-$	
$\dfrac{2-x}{5-3x}$		$+$	$\|$	$-$	0	$+$	

On en déduit que la solution de l'inéquation est l'intervalle $\left]-\infty\,;\frac{5}{3}\right[\cup [2\,;+\infty[$.

Exercice 8 [/ 3]

Résoudre le système $\begin{cases} 4x+5y=1 \\ -2x+y=3 \end{cases}$

Solution:

$$\begin{aligned}
&\begin{cases} 4x+5y=1 \quad (L_1) \\ -2x+y=3 \quad (L_2) \end{cases} \\
\iff &\begin{cases} 4x+5y=1 \quad (L_1) \\ -4x+2y=6 \quad (L_2 \leftarrow 2L_2) \end{cases} \\
\iff &\begin{cases} 4x+5y=1 \quad (L_1) \\ 0x+7y=7 \quad (L_2 \leftarrow L_2+L_1) \end{cases} \\
\iff &\begin{cases} 4x+5y=1 \\ y=1 \end{cases} \\
\iff &\begin{cases} 4x+5\times 1=1 \\ y=1 \end{cases} \\
\iff &\begin{cases} 4x+5=1 \\ y=1 \end{cases} \\
\iff &\begin{cases} 4x=-4 \\ y=1 \end{cases} \\
\iff &\begin{cases} x=-1 \\ y=1 \end{cases}
\end{aligned}$$

Le système a pour solution $(-1\,;1)$.