Chapitre 9

Variations et extremums de fonctions

9.1 Variations

9.1.1 Variations

Définition 9.1. *Soient f une fonction définie sur un ensemble $\mathcal{D}$ et I un intervalle de $\mathcal{D}$.*

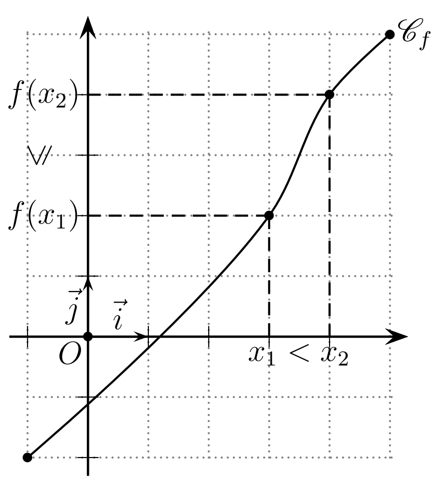
— *f est dite **croissante** sur I si seulement si, pour tous x_1, $x_2 \in I$,*

$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) \leqslant f(x_2).$$

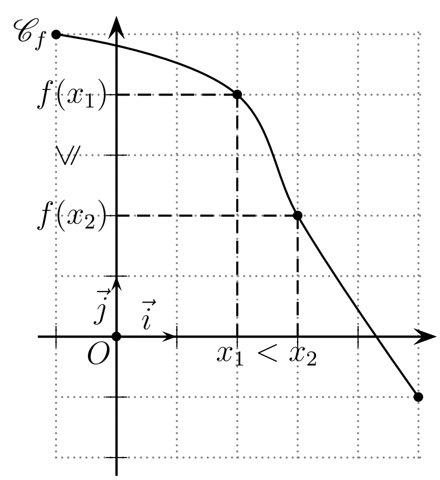
— *f est dite **décroissante** sur I si seulement si, pour tous x_1, $x_2 \in I$,*

$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) \geqslant f(x_2).$$

— *f est dite **monotone** sur I si seulement si, elle n'est que croissante ou que décroissante sur I.*



f croissante



f décroissante

Remarques :

— Une fonction croissante **conserve** les inégalités.

— Une fonction décroissante **change** les inégalités.

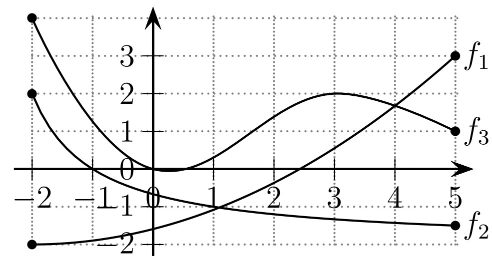
— Une fonction est **strictement croissante** (ou décroissante) si on a des inégalités strictes pour les images dans la définition : $f(x_1) < f(x_2)$ (ou $f(x_1) > f(x_2)$).

Exemples graphiques :

— f_1 est croissante sur $[-2\,;5]$;

— f_2 est décroissante sur $[-2\,;5]$;

— f_3 est ni croissante, ni décroissante sur $[-2\,;5]$.



Exemples de comparaison d'images :

1. Soit f une fonction croissante sur $[4\,;10]$. Comparons $f(5)$ et $f(8)$, f croissante donc

$$5 \leqslant 8 \implies f(5) \leqslant f(8).$$

2. Soit g une fonction décroissante sur $[-1\,;+\infty[$. Comparons $g(0)$ et $g(100)$, f décroissante donc

$$0 \leqslant 100 \implies g(0) \geqslant g(100).$$

Proposition 9.1. *Soient f une fonction définie sur un ensemble $\mathcal{D}$ et I un intervalle de $\mathcal{D}$.*

1. *Si f est strictement croissante, alors, pour tous x_1, $x_2 \in I$, $f(x_1) \leqslant f(x_2) \implies x_1 \leqslant x_2$.*
2. *Si f est strictement décroissante, alors, pour tous x_1, $x_2 \in I$, $f(x_1) \geqslant f(x_2) \implies x_1 \leqslant x_2$.*

Démonstration. Soient f une fonction définie sur un ensemble $\mathcal{D}$ et I un intervalle de $\mathcal{D}$.

1. f est strictement croissante sur I. Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe $x_1, x_2 \in I$ tels que $f(x_1) \leqslant f(x_2)$ et $x_1 > x_2$. Comme f est strictement croissante, on a alors

$$x_1 > x_2 \implies f(x_1) > f(x_2).$$

On a donc à la fois $f(x_1) \leqslant f(x_2)$ et $f(x_1) > f(x_2)$, ce qui est absurde. Donc $f(x_1) \leqslant f(x_2) \implies x_1 \leqslant x_2$.

2. Idem 1.

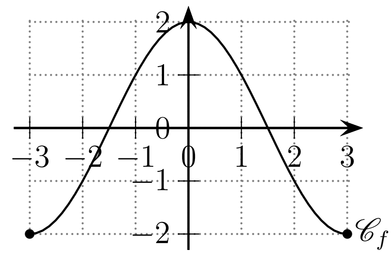
□

Exercices : 9.1 ; 9.12.

9.1.2 Tableau de variations

Les variations d'une fonction f peuvent être synthétisées à l'aide d'un tableau dit **tableau de variations**. Celui est composé de deux lignes : la première contient les bornes des intervalles sur lesquels f est monotone ; la seconde contient des flèches représentant les variations de f (montantes si f croissante, descendantes si f décroissante).

Exemples :



On considère la fonction f représentée par la courbe $\mathscr{C}_f$ ci-contre. La fonction f est croissante sur $[-3\,;0]$ puis décroissante sur $[0\,;3]$. On trouve le tableau de variations qui y est associé ci-dessous.

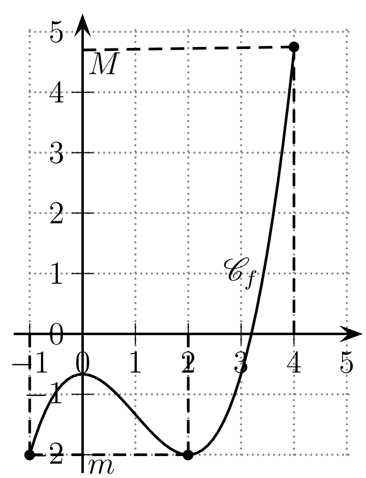
x	-3		0		3
$f(x)$	-2	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2

Exercices : 9.2 à 9.5 ; 9.13.

9.2 Extremums d'une fonction

Définition 9.2. *Soit f une fonction définie sur un ensemble $\mathcal{D}$ et I un intervalle de $\mathcal{D}$.*

- *On dit que M est un **maximum** de f sur I s'il existe $x_M \in I$ tel que $f(x_M) = M$ et pour tout $x \in I$, $f(x) \leqslant M$.*
- *On dit que m est un **minimum** de f sur I s'il existe $x_m \in I$ tel que $f(x_m) = m$ et pour tout $x \in I$, $m \leqslant f(x)$.*



Exemple : On considère la fonction f et g représentée par la courbe $\mathscr{C}_f$ ci-contre. Graphiquement, f admet

- un maximum : $4,75$ atteint en 4 ;
- un minimum : -2 atteint en -1 et 2 .

Exemple : Soit une fonction f définie sur $[-1\,;5]$ ayant pour tableau de variations celui ci-dessous.

f admet pour maximum 3 atteint en 5 et pour minimum -1 atteint en 1.

x	-1	1	5
$f(x)$	2 ↘	-1	↗ 3

Exercices : 9.6 à 9.10 ; 9.14 et 9.16.

9.3 Capacités attendues

— Relier représentation graphique et tableau de variations.
— Comparer deux images d'une fonction.
— Déterminer graphiquement les extremums d'une fonction sur un intervalle.

9.4 Exercices

9.4.1 Progresser

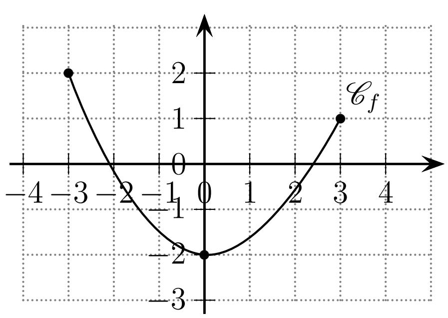
Variations

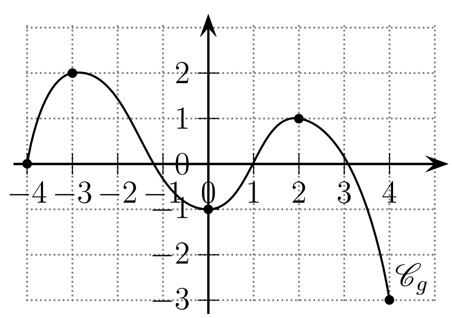
Exercice 9.1. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. Dans chacun des cas suivants, déterminer qui de $f(-1)$ ou de $f(1)$ est le plus grand.

1. lorsque f est croissante.
2. lorsque f est décroissante.

Tableau de variations

Exercice 9.2. Soient deux fonctions représentées ci-dessous. Déterminer l'ensemble de définition de ces deux fonctions puis donner leur tableau de variations.





Exercice 9.3. Tracer une courbe correspondant au tableau de variation ci-contre.

x	-4	-2	1
$f(x)$	2 ↗	3	↘ -2

Exercice 9.4. Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[0\,;4]$ telle que :

— f est croissante sur l'intervalle $[0\,;2]$.

— f est décroissante sur l'intervalle $[2\,;4]$.

— $f(0) = f(4) = 5\,;\ f(2) = 10$.

Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;4]$. Tracer une courbe pouvant représenter cette fonction.

Exercice 9.5. Pour chacun de ces tableaux, dire s'il peut être ou non le tableau de variation correct d'une fonction.

x	-2		1		10
$f(x)$	2	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

x	-4		-1		9
$g(x)$	1	$\searrow$	-3	$\nearrow$	5

x	-5		10		1
$h(x)$	5	$\nearrow$	10	$\searrow$	2

Extremums d'une fonction

Exercice 9.6. Déterminer graphiquement les extremums des deux fonctions de l'exercice 9.2.

Exercice 9.7. On considère une fonction dont on a le tableau de variations ci-dessous. Déterminer l'ensemble de définition et les extremums de f selon ce tableau.

x	-4		-2		1		3		5
$f(x)$	2	$\searrow$	-3	$\nearrow$	-2	$\searrow$	-4	$\nearrow$	0

Exercice 9.8. On considère une fonction f dont on a le tableau de variations ci-dessous.

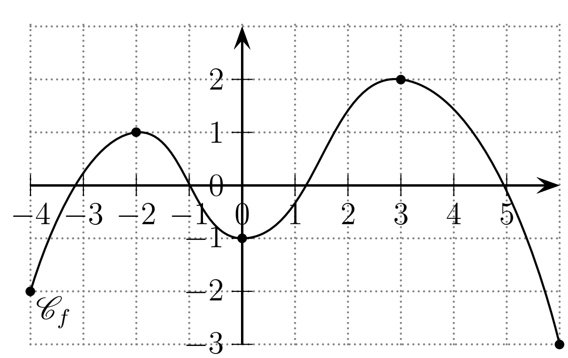
1. Décrire par des phrases les variations de f.
2. Quels sont les extremums de f ?
3. Quel est le signe de f ?

x	-5		-1		0		4
$f(x)$	0	$\searrow$	-3	$\nearrow$	-2	$\searrow$	-5

Exercice 9.9. Soit f une fonction définie sur $[-4\,;5]$ dont on a la courbe ci-dessous.

Pour chaque affirmation dire si elle est vraie ou fausse en justifiant si c'est faux. Sur $[-4\,;5]$:

1. le maximum de f est $(3\,;2)$.
2. le maximum de f est 3.
3. le maximum de f est 2, atteint en 3.
4. le minimum de f est 6.
5. f atteint son minimum en -3.
6. le minimum de f est -3.



Exercice 9.10. On donne ci-dessous le tableau de variation d'une fonction f.

x	-6		-4		-1		0		2		5		6		8
$f(x)$	-3	↗	2	↘	1	↗	5	↘	-1	↗	3	↘	-5	↗	-3

1. Quel est l'ensemble de définition de f ?
2. Quelle est l'image de -1 par f ?
3. Déterminer le maximum de f sur son ensemble de définition.
4. Décrire les variations de f sur $[-4\,;0]$.
5. Compléter :
   — Lorsque $x \in [-6\,;-1]$ ...... $\leqslant f(x) \leqslant$ .....
   — Lorsque $x \in [0\,;8]$ ...... $\leqslant f(x) \leqslant$ .....
6. Comparer $f(3)$ et $f(4)$. Justifier.
7. Comparer $f(-2)$ et $f(-3)$. Justifier.
8. Comparer $f(-5)$ et $f(7)$. Justifier.

9.4.2 Approfondir

Exercice 9.11. [Composée de deux fonctions] Soient $\mathcal{D}_f$, $\mathcal{D}_g$ et I trois ensembles de $\mathbb{R}$. Soient $f : \mathcal{D}_f \to I$ et $g : \mathcal{D}_g \to \mathbb{R}$. La **composée** de f par g est la fonction $h : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$ qui à tout réel x de $\mathcal{D}_f$ associe le réel $h(x) = g(f(x))$. On pourrait résumer cela par le schéma suivant :

$$h : x \underset{f}{\mapsto} f(x) \underset{g}{\mapsto} g(f(x)).$$

Par exemple ; si $f(x) = 3x - 1$ et $g(x) = x^2$,

$$h(x) = g(f(x)) = g(3x-1) = (3x-1)^2.$$

Il ne faut pas confondre avec la composée de g par f. En effet, en reprenant cet exemple, on a

$$f(g(x)) = f(x^2) = 3x^2 - 1 \neq (3x-1)^2 = g(f(x)).$$

1. À quelle condition sur I et $\mathcal{D}_g$, la composée h de f par g est-elle bien définie ?
2. Dans chacun des cas suivants, à l'aide des définitions, déterminer si h est croissante ou décroissante.

   (a) f et g croissante.
   (b) f croissante, g décroissante.
   (c) f décroissante, g croissante.
   (d) f et g décroissantes.

9.4.3 S'entraîner

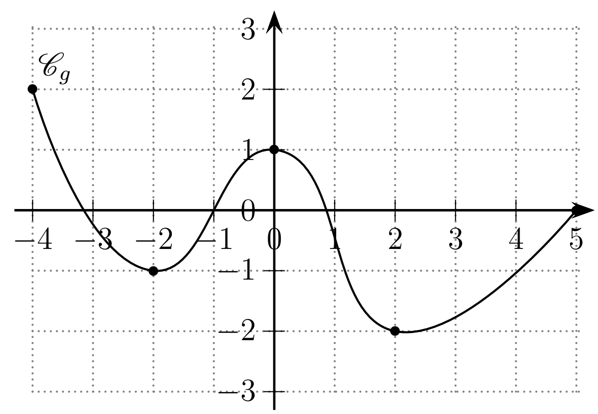
Variations

Exercice 9.12. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. Dans chacun des cas suivants, déterminer qui de $f(x_1)$ ou de $f(x_2)$ est le plus grand.

1. $x_1 = -3$, $x_2 = 4$ et f décroissante.
2. $x_1 = -5$, $x_2 = 7$ et f croissante.
3. $x_1 = \dfrac{1}{4}$, $x_2 = \dfrac{1}{3}$ et f décroissante.
4. $x_1 = \dfrac{5}{6}$, $x_2 = \dfrac{6}{7}$ et f croissante.

Tableau de variations

Exercice 9.13. Soit la fonction représentées ci-dessous. Déterminer l'ensemble de définition de cette fonction puis donner son tableau de variations.



Extremums d'une fonction

Exercice 9.14. Déterminer graphiquement les extremums de la fonction de l'exercice 9.13.

Exercice 9.15. On considère une fonction dont on a le tableau de variations ci-dessous. Déterminer l'ensemble de définition et les extremums de f selon ce tableau.

x	-4		-2		1		3		5
$f(x)$	2	$\searrow$	-3	$\nearrow$	-2	$\searrow$	-4	$\nearrow$	0

Exercice 9.16. On donne ci-dessous le tableau de variation d'une fonction f.

x	-20		-15		-8		-1		3		4		8		10
$f(x)$	3	$\nearrow$	12	$\searrow$	6	$\nearrow$	10	$\searrow$	0	$\nearrow$	3	$\searrow$	-2	$\nearrow$	-1

1. Quel est l'ensemble de définition de f ?
2. Quelle est l'image de -8 par f ?
3. Déterminer le minimum de f sur son ensemble de définition.
4. Décrire les variations de f sur $[-1\,;4]$.
5. Compléter :
   — Lorsque $x \in [-15\,;-1]$ ...... $\leqslant f(x) \leqslant$ .....
   — Lorsque $x \in [3\,;10]$ ...... $\leqslant f(x) \leqslant$ .....
6. Comparer $f(0)$ et $f(1)$. Justifier.
7. Comparer $f(-18)$ et $f(-17)$. Justifier.
8. Comparer $f(-19)$ et $f(5)$. Justifier.

9.4.4 Le Flashback !

Flashback 9.1. [Pokéballs] La Sylphe SARL souhaite baisser ses coûts de production pokéballs de 20% d'ici un an. Sur les trois premiers trimestres, elle les baisse successivement de 6%, 4% et 5%. Calculer le pourcentage de diminutions des coûts qu'elle devra atteindre sur le quatrième trimestre afin de réaliser son objectif.

Flashback 9.2. [Potions magiques, le retour] Suite aux calculs faits dans un exercice précédent, Triss Merigold a baissé ses prix de 40%. Cependant, elle ne vend plus autant de potions qu'avant et souhaiteront donc retourner à son ancien prix. De quel pourcentage doit-elle augmenter le prix de ses potions ?