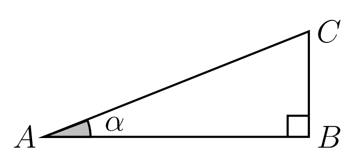
Chapitre 16

Trigonométrie

16.1 Trigonométrie

Définition 16.1. *Soit ABC un triangle rectangle en B.*
On définit le ***cosinus*** *et le* ***sinus*** *de l'angle $\alpha = \widehat{BAC}$ comme :*

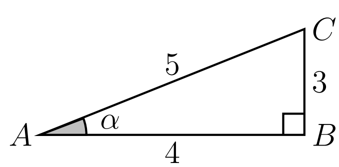
$$\cos(\alpha) = \frac{AB}{AC} \qquad \textit{et} \qquad \sin(\alpha) = \frac{BC}{AC}.$$



Remarque : On a en fait

$$\cos(\alpha) = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypothénuse}} \qquad \text{et} \qquad \sin(\alpha) = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypothénuse}}.$$

Exemple : Soit ABC le triangle rectangle ci-dessous.



On a

$$\cos(\alpha) = \frac{AB}{AC} = \frac{4}{5} = 0,8 \qquad \text{et} \qquad \sin(\alpha) = \frac{BC}{AC} = \frac{3}{5} = 0,6.$$

Proposition 16.1. *Soit α la mesure d'un angle dans un triangle rectangle. On a :*

- $\cos(\alpha) \geqslant 0$;
- $\sin(\alpha) \geqslant 0$.

Démonstration. C'est une conséquence directe du fait que le cosinus et sinus sont le rapport de deux longueurs, qui sont donc positives. □

Remarque : Il est possible de définir de façon plus générale le cosinus et le sinus et cette propriété n'est alors plus vraie.

Proposition 16.2. *Soit α la mesure d'un angle dans un triangle rectangle. On a :*

$$\cos^2(\alpha)+\sin^2(\alpha)=1.$$

Démonstration. Soit ABC un triangle rectangle en B ; on note $\alpha=\widehat{BAC}$. Alors

$$\cos^2(\alpha)+\sin^2(\alpha)=\left(\frac{AB}{AC}\right)^2+\left(\frac{BC}{AC}\right)^2=\frac{AB^2+BC^2}{AC^2}=\frac{AC^2}{AC^2}=1,$$

d'après le théorème de Pythagore car ABC est rectangle en B . □

Méthode : Soit ABC un triangle rectangle en B tel que $AC=10$ et $\sin\left(\widehat{CAB}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$. Déterminer $\cos\left(\widehat{CAB}\right)$ puis AB et BC.

On a

$$\begin{aligned}\cos^2\left(\widehat{CAB}\right)+\sin^2\left(\widehat{CAB}\right)=1 &\iff \cos^2\left(\widehat{CAB}\right)+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=1\\ &\iff \cos^2\left(\widehat{CAB}\right)+\frac{2}{4}=1\\ &\iff \cos^2\left(\widehat{CAB}\right)=1-\frac{2}{4}\\ &\iff \cos^2\left(\widehat{CAB}\right)=\frac{2}{4}\\ &\iff \cos\left(\widehat{CAB}\right)=\sqrt{\frac{2}{4}}\\ &\text{(car cosinus positif)}\\ &\iff \cos\left(\widehat{CAB}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}.\end{aligned}$$

Par ailleurs, on a

$$\begin{aligned}\cos\left(\widehat{CAB}\right)=\frac{AB}{AC} &\iff \frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{AB}{10}\\ &\iff AB=\frac{10\times\sqrt{2}}{2}\\ &\iff AB=5\sqrt{2}.\end{aligned}$$

Enfin, on a

$$\begin{aligned}\sin\left(\widehat{CAB}\right) = \frac{BC}{AC} &\iff \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{BC}{10}\\ &\iff BC = \frac{10\times\sqrt{2}}{2}\\ &\iff BC = 5\sqrt{2}.\end{aligned}$$

On remarque que ABC est isocèle en B .

Exercices : 16.1 à 16.4 ; 16.5 et 16.6.

16.2 Capacités attendues

— Calculer un cosinus ou un sinus.

— Connaître et utiliser les propriétés du cosinus et du sinus.

16.3 Exercices

16.3.1 Progresser

Exercice 16.1. Soit ABC un triangle rectangle en B. Dans chacun des cas, calculer BC et en déduire $\cos\left(\widehat{BAC}\right)$ et $\sin\left(\widehat{BAC}\right)$.

1. $AB = 3$ et $AC = 4$.
2. $AB = 10$ et $AC = 15$.
3. $AB = 7$ et $AC = 11$.

Exercice 16.2. Connaissant la valeur soit du cosinus, soit sinus, en déduire les valeurs de l'autre dans chacun des cas suivants.

1. $\cos(\alpha) = \frac{1}{2}$.
2. $\cos(\alpha) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
3. $\sin(\alpha) = 0$.
4. $\sin(\alpha) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Exercice 16.3. Soit ABC un triangle rectangle en C. On sait que $AC = 2\sqrt{2}$ et $\sin\left(\widehat{CAB}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, déterminer $\cos\left(\widehat{CAB}\right)$ puis AB et BC.

Exercice 16.4. Soit ABC un triangle rectangle en A. On sait que $BC = 3\sqrt{3}$ et $\cos\left(\widehat{ABC}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, déterminer AB puis $\sin\left(\widehat{ABC}\right)$.

16.3.2 S'entraîner

Exercice 16.5. Soit ABC un triangle rectangle en C. On sait que $AC = 2\sqrt{3}$ et $\sin\left(\widehat{CAB}\right) = \dfrac{1}{2}$, déterminer $\cos\left(\widehat{CAB}\right)$ puis AB et BC.

Exercice 16.6. Soit ABC un triangle rectangle en A. On sait que $AB = 2\sqrt{2}$ et $\cos\left(\widehat{ABC}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, déterminer AC puis $\sin\left(\widehat{ABC}\right)$.

16.3.3 Le Flashback !

Flashback 16.1. Déterminer les ensembles de définitions de chacune des fonctions ci-dessous.

1. $f(x) = \sqrt{\left(\dfrac{1}{2}x + 1\right)\left(3x - \dfrac{1}{3}\right)}$.
2. $g(x) = \sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$.

Flashback 16.2. Résoudre les inéquations ci-dessous.

1. $\dfrac{1}{10x + 50} \geqslant 1$.
2. $\dfrac{1}{4x+1} \leqslant \dfrac{1}{1-2x}$.