Chapitre 8

Informations chiffrées

8.1 Proportion

8.1.1 Proportion

Définition 8.1. *Soient E un ensemble non vide et F un sous-ensemble de E. La **proportion** de F dans E est le réel défini par* $p = \dfrac{\text{mesure}(F)}{\text{mesure}(E)}$.

Remarque : la mesure d'un ensemble peut être son nombre d'éléments, sa longueur, sa surface, son volume, etc.

Proposition 8.1. *Une proportion p est un nombre toujours compris entre 0 et 1 :* $0 \leqslant p \leqslant 1$.

Démonstration. Exercice. □

Exemple : Parmi les 150 premiers pokémons, 12 sont de types feu. La proportion de pokémons feu parmi les 150 premiers est donc

$$p = \frac{\text{nombre pokémons feu}}{\text{nombre total pokémons}} = \frac{12}{150} = 0,08 = 8\%.$$

Proportions usuelles :

Fraction	$\frac{0}{1}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
Décimal	0	1	0,5	0,25	0,75	0,33...	0,66...
Pourcentage	0%	100%	50%	25%	75%	$33,33...\%$	$66,66..\%$
Français	rien	tout	la moitié	le quart	les trois quart	le tiers	les deux tiers

Exercices : 8.1 à 8.3 ; 8.17 et 8.18.

8.1.2 Proportion d'une proportion

Proposition 8.2. *Soient E un ensemble non vide, F une partie non vide de E et G une partie de F. Si p_1 est la proportion de F dans E et si p_2 est la proportion de G dans F, alors la proportion p de G dans E est $p = p_1 \times p_2$.*

Démonstration. Soient E un ensemble non vide, F une partie non vide de E et G une partie de F. Comme E et F sont non vides, on a mesure$(E) \neq 0$ et mesure$(F) \neq 0$. On note p_1 la proportion de F dans E, p_2 la proportion de G dans F et la proportion p de G dans E. On a alors

$$p_1 \times p_2 = \frac{\text{mesure}(F)}{\text{mesure}(E)} \times \frac{\text{mesure}(G)}{\text{mesure}(F)} = \frac{\text{mesure}(G)}{\text{mesure}(E)} = p.$$

□

Exemple : Parmi les 150 premiers pokémons, 8% sont de types feu et parmi les pokémons feu, 20% sont de type vol. La proportion p de pokémon de type feu et vol parmi l'ensemble de tous les pokémons est alors de

$$p = \frac{8}{100} \times \frac{20}{100} = 0,016 = 1,6\%.$$

Exercices : 8.4 et 8.5 ; 8.19.

8.2 Évolutions

8.2.1 Taux d'évolution

Définition 8.2. *Soit v_0 une valeur non nulle évoluant jusqu'à une valeur v_1.*

- *On appelle **évolution absolue** de v_0 à v_1 la différence $v_1 - v_0$.*
- *On appelle **taux d'évolution relatif** à v_0 le rapport $t = \dfrac{v_1 - v_0}{v_0}$.*

Exemple : Après être monté de niveau, la vitesse de Bulbizarre est passé de 33 à 36. On a $v_0 = 33$ et $v_1 = 36$, le taux d'évolution est

$$t = \frac{36 - 33}{33} = \frac{3}{33} = 0,09 = 9\%.$$

La vitesse de Bulbizarre a donc augmenté de 9%.

Exercices : 8.6 ; 8.20.

8.2.2 Coefficient multiplicateur

Définition 8.3. *Soit v_0 une valeur non nulle évoluant jusqu'à une valeur v_1. On appelle **coefficient multiplicateur** le rapport $c = \dfrac{v_1}{v_0}$.*

Exemple : Après avoir lancé deux fois l'attaque Mur lumière, la défense spéciale de Raichu est passée de 72 à 180. On a $v_0 = 72$ et $v_1 = 180$, le coefficient multiplicateur est donc $c = \dfrac{180}{72} = 2,5$, sa défense a donc été multipliée par 2,5 .

Proposition 8.3. *Avec les notations précédentes, on a un lien entre coefficient multiplicateur et taux d'évolution :*

$$c = 1 + t \quad \textit{ou encore} \quad t = c - 1.$$

Démonstration. Soit v_0 une valeur évoluant jusqu'à une valeur v_1. On a

$$t = \frac{v_1 - v_0}{v_0} = \frac{v_1}{v_0} - \frac{v_0}{v_0} = c - 1.$$

$\square$

Exemples : En reprenant l'exemple précédent, on trouve le taux d'évolution $t = 2,5 - 1 = 1,5 = 150\%$, autrement dit, la défense de Raichu a augmenté de 150% .

Exemples :

Taux d'évolution t (en %)	$+25\%$	-3%	-200%	$+150\%$	-90%
Coefficient multiplicateur c	1,25	0,97	-1	2,5	0,1

Remarques : Si $c < 1$, on a une diminution ; si $c > 1$, on a une augmentation .

Exercices : 8.7 à 8.10 ; 8.21 à 8.23.

8.3 Évolutions successives

Proposition 8.4. *Soit v_0 une valeur évoluant jusqu'à une valeur v_1 ; on note le coefficient multiplicateur c_1. Puis v_1 évolue jusqu'à une valeur v_2 ; on note le coefficient multiplicateur c_2. Le* ***coefficient multiplicateur global*** *correspondant à l'évolution de v_0 à v_2 est*

$$C = c_1 \times c_2.$$

$$\begin{tikzcd}
v_0 \arrow[r, "+t_1\%", "\times c_1"'] \arrow[rr, bend left, "+T\%"] \arrow[rr, bend right, "\times C = c_1 \times c_2"'] & v_1 \arrow[r, "+t_2\%", "\times c_2"'] & v_2
\end{tikzcd}$$

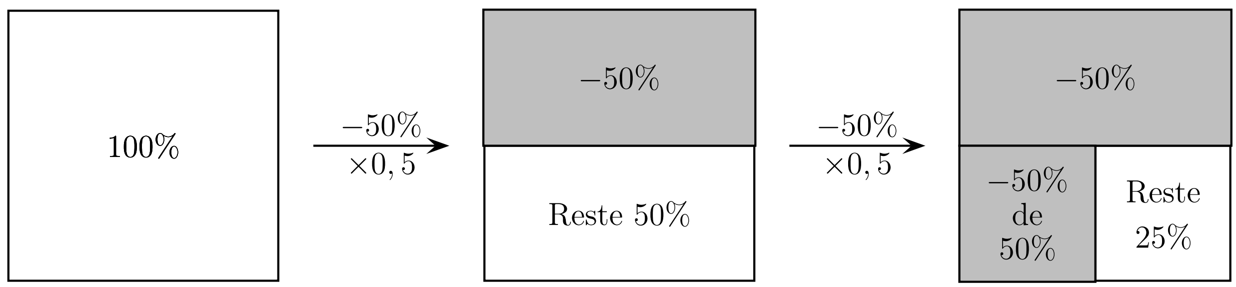
Remarque : attention, les pourcentages d'évolutions ne s'additionnent pas : $T \neq t_1 + t_2$.

Exemple : À quelle évolution globale correspond une baisse de 50% suivie d'une deuxième baisse de 50% ?

On a $c_1 = c_2 = 1 - \dfrac{50}{100} = 0,5$ donc

$$C = c_1 \times c_2 = 0,5^2 = 0,25.$$

On a alors $T = C - 1 = 0,25 - 1 = -0,75 = -75\%$; on a donc une baisse de 75% et non pas de 100% .



Exercices : 8.11 à 8.13 ; 8.24 à 8.26.

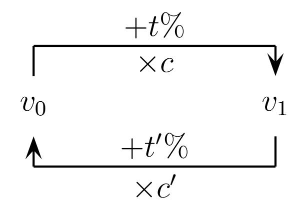
8.4 Évolution réciproque

Définition 8.4. *Soit v_0 une valeur non nulle évoluant jusqu'à une valeur v_1. On appelle* ***évolution réciproque*** *l'évolution allant de v_1 jusqu'à v_0 .*

Proposition 8.5. *Soient v_0 une valeur non nulle évoluant jusqu'à une valeur v_1 et c le coefficient multiplicateur associé à cette évolution.*

— *On appelle* ***coefficient multiplicateur réciproque*** *le coefficient multiplicateur c' permettant de passer de v_1 à v_0. On a alors $c \times c' = 1$ et donc $c' = \dfrac{1}{c}$.*

— *On appelle* ***taux d'évolution réciproque*** *le taux d'évolution t' permettant de passer de v_1 à v_0. On a alors $t' = c' - 1$.*



Exemple : Considérons une diminution de 75% et déterminons son évolution réciproque. Le coefficient multiplicateur associé à cette augmentation est $c = 1 - \dfrac{75}{100} = 0,25$. Le coefficient multiplicateur réciproque est alors $c' = \dfrac{1}{c} = \dfrac{1}{0,25} = 4$. On en déduit que le taux d'évolution réciproque est $t' = c' - 1 = 4 - 1 = 3 = 300\%$. Une baisse de 75% est donc compensée par une hausse de 300% .

Exercices : 8.14 à 8.16 ; 8.27.

8.5 Capacités attendues

— Exploiter la relation entre effectifs, proportions et pourcentages.

— Traiter des situations simples mettant en jeu des pourcentages de pourcentages.

— Exploiter la relation entre deux valeurs successives et leur taux d'évolution.

— Calculer le taux d'évolution global à partir des taux d'évolution successifs. Calculer un taux d'évolution réciproque.

8.6 Exercices

8.6.1 Progresser

Proportion

Exercice 8.1. [Pokémons]

1. Parmi les 150 premiers pokémons, 18 sont de type vol. Quelle proportion de pokémons cela représente-t-il ? Arrondir à $0,1\%$ près.
2. Parmi les 150 premiers pokémons, 9% sont de type plante. Quel est le nombre de pokémons de type plante ?

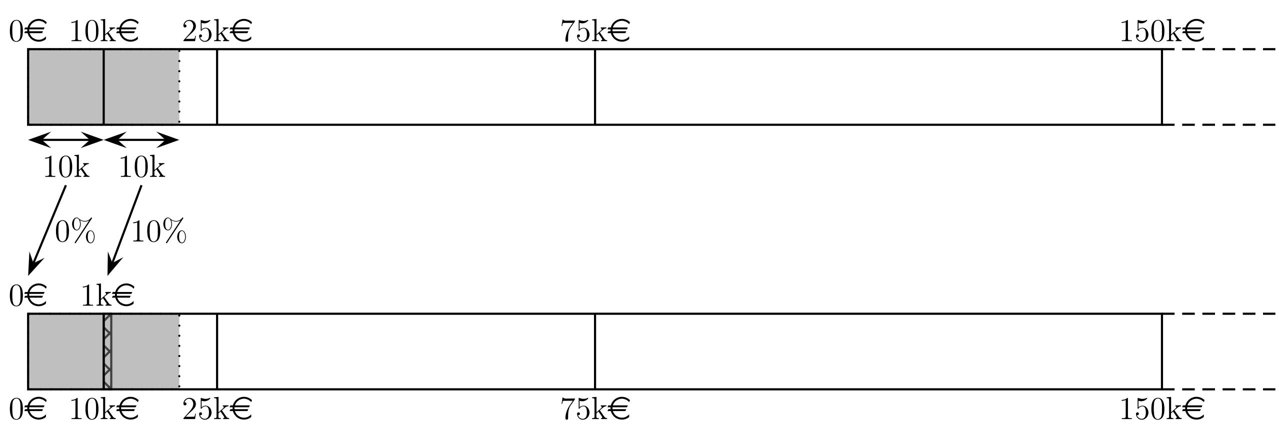
Exercice 8.2. [Impôt sur le revenu] L'impôt sur le revenu se calcule à partir des revenus annuels imposables d'une personne avec un fonctionnement par tranches. Des approximations des tranches et taux marginaux d'impositions (TMI) sont données dans le tableau ci-dessous.

Tranches	[0 ; 10 000[	[10 000 ; 25 000[	[25 000 ; 75 000[	[75 000 ; 150 000[	[150 000 ; $+\infty$[
TMI	0%	10%	30%	40%	45%

Exemples :

— Pour un salaire annuel de 9 000€. Le salaire est inférieur à 10 000€ donc on est dans la première tranche ; on est non imposable.

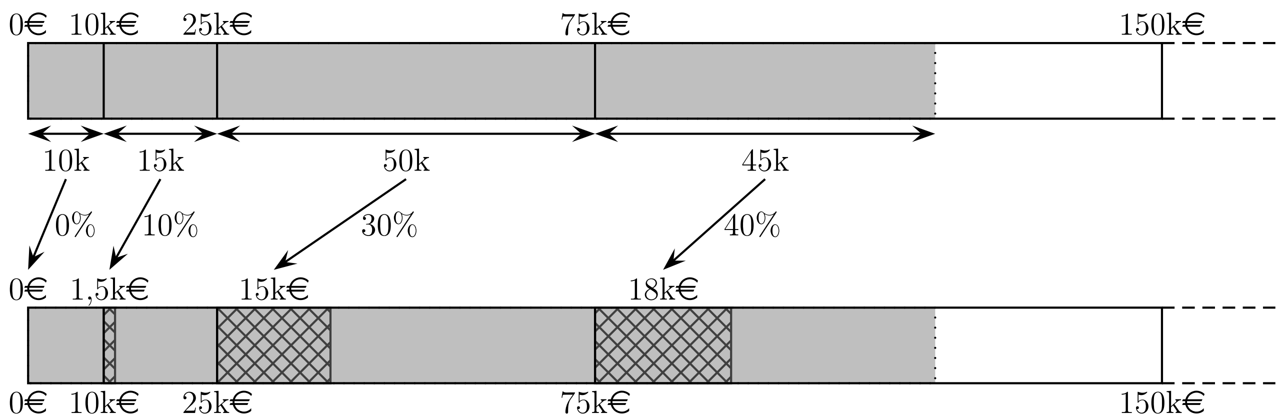
— Pour un salaire annuel de 20 000€. L'erreur est de considérer que l'on est taxé à 10%. Le salaire imposable est en fait découpé selon les tranches.



Tranches	[0 ; 10 000[	[10 000 ; 25 000[
Montant imposable sur la tranche	10 000-0=10 000	20 000-10 000=10 000
Taux marginal d'imposition	0%	10%
Montant prélevé sur la tranche	$10\,000 \times 0\% = 0$	$10\,000 \times 10\% = 1\,000$

Pour un salaire annuel de 20 000€, on doit donc payer 1 000€. Cela représente 5% du salaire annuel et non 10%.

— Considérons un salaire annuel imposable de 120 000€.



$$\begin{aligned}120\,000 &= (10\,000-0)+(25\,000-10\,000)+(75\,000-25\,000)+(120\,000-75\,000)\\ &= \underbrace{10\,000}_{\text{tranche 1}}+\underbrace{15\,000}_{\text{tranche 2}}+\underbrace{50\,000}_{\text{tranche 3}}+\underbrace{45\,000}_{\text{tranche 4}}.\end{aligned}$$

Le montant à prélever est alors calculé comme suit :

$$10\,000\times 0\%+15\,000\times 10\%+50\,000\times 30\%+45\,000\times 40=34\,500,$$

soit un taux d'imposition réel de 28,75% et un salaire net d'impôt de 85 500.

Partie A, un exemple de calcul : On considère une personne dont le revenu imposable est de 80 000€.

1. Calculer le montant de l'impôt que devra verser cette personne.
2. En déduire son taux réel d'imposition et son salaire net d'impôt.

Partie B, changement de tranche : On considère deux ménages dont les revenus imposables sont respectivement de 24 000€ et 25 000€. Compléter le tableau ci-dessous (on arrondira à $0,1\%$ puis dire contrairement ou non à une idée répandue, il nous reste moins d'argent après impôt si on passe dans une tranche supérieure ?

Revenus imposables	Impôts	Taux d'imposition réel	Revenus nets d'impôts
24 000			
25 000			

Exercice 8.3. [Maçonnerie] Afin de faire du béton pour des fondations, des ouvriers du bâtiments mélange « 7 volumes de gravier pour 5 volumes de sable, 2 volumes de ciment et 1 d'eau ».

1. Quelle proportion de gravier retrouve-t-on dans ce mélange ? Arrondir à $0,01\%$ près.
2. Avec 4m^3 de gravier, quel volume de béton peut-on faire ? Arrondir à $0,01\text{m}^3$.

Proportion d'une proportion

Exercice 8.4. Parmi les 150 premiers pokémons, 9% sont de types plantes et parmi ceux-là, 64% sont de types poison. Quel est le pourcentage de pokémons de types plante et poison parmi l'ensemble des pokémons ?

Exercice 8.5. 54% des salariés d'une entreprise sont des hommes. 7% des hommes et 11% des femmes sont des cadres.

1. Quel est le pourcentage de cadres ?
2. L'entreprise compte 85 cadres. Quel est le nombre total de salariés dans l'entreprise ?

Taux d'évolution

Exercice 8.6. Déterminer le pourcentage d'évolution des primes de Luffy et Zoro. Arrondir au pourcent.

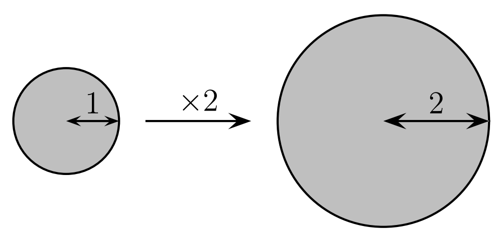
1. La prime de Luffy est passé de 30 000 000 à 3 000 000 000 Berrys entre son arrivée sur Grand Line et son de départ de Wa.
2. La prime de Zoro est passé de 60 000 000 à 1 111 000 000 Berrys entre son départ d'Alabasta et son de départ de Wa.

Coefficient multiplicateur

Exercice 8.7. Compléter le tableau suivant :

Évolution (en %)	+55%		−26%	+305%	
Coefficient multiplicateur		1,4			0,35

Exercice 8.8. [Graphisme]
Un graphiste doit produire pour un journal une représentation graphique du doublement de la population d'une ville. Afin de représenter la population initiale, il décide de faire des cercles d'associer leurs aires à la population de la ville. Pour représenter la population initiale de la ville, il fait un cercle de rayon 1 puis un cercle de rayon 2 pour représenter le doublement de la population.



1. Calculer l'aire des deux cercles.
2. Calculer le taux d'évolution entre l'aire du premier et du deuxième cercle.
3. Le graphiste a-t-il eu raison de doubler le rayon pour doubler l'aire ?
4. Déterminer comment le graphiste aurait dû faire évoluer le rayon du deuxième cercle pour que son aire double.

Exercice 8.9.

1. Augmenter de $7,5\%$ revient à multiplier par ....
2. Diminuer de 35% revient à multiplier par ....
3. Réduire de 75% revient à multiplier par ....
4. Diminuer de $4,6\%$ revient à multiplier par ....
5. Augmenter de $0,3\%$ revient à multiplier par ....

Exercice 8.10. [Prix et volumes] Le prix unitaire d'un produit diminue de 10%. Calculer le pourcentage d'augmentation de la quantité de produits que l'on doit vendre afin que la recette augmente de 15%.

Évolutions successives

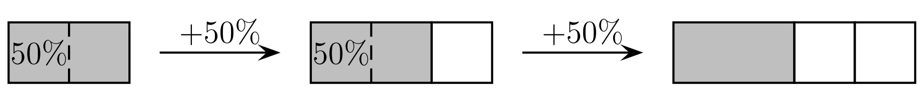
Exercice 8.11. Calculer le taux d'évolution global connaissant les coefficients multiplicateurs intermédiaires dans chacun des cas suivants :

1. $c_1 = 0,4$ et $c_2 = 1,24$;
2. $c_1 = 2$, $c_2 = 0,8$ et $c_3 = 1,05$.

Exercice 8.12. [Soldes et escroquerie] Un commerçant peu scrupuleux souhaite augmenter ses prix avant une période de soldes afin que lorsqu'ils baisseront pendant celle-ci, ils soient en fait plus haut qu'avant les soldes. Il désire afficher une réduction de 20% afin d'attirer la clientèle mais le prix final doit être 5% plus haut que le prix initial. Calculer le pourcentage d'augmentation que le commerçant devra appliquer avant les soldes.

Exercice 8.13. [Intérêts] Un capital de 1 000 euros est placée en banque au taux incroyable de 50%.

Intérêts simples : chaque année, 50% du capital initial (en gris) est ajouté au capital total.



Intérêts composés : chaque année, 50% du capital de l'année précédente (en gris) est ajouté au capital total.

Calculer le capital disponible au bout de 1 an, 2 ans et 5 ans pour les deux systèmes d'intérêts.

Évolution réciproque

Exercice 8.14. Calculer le taux d'évolution réciproque de chacun des taux d'évolution ci-dessous.

1. $+50\%$;
2. -50% ;
3. $+25\%$;
4. -25%.

Exercice 8.15. [Électricité] Le prix d'un MWh d'électricité vaut 51€ le 1er Janvier. Au 1er Juillet, il vaut 132€.

1. Calculer le pourcentage d'évolution du prix du MWh d'électricité. Arrondir à $0,1\%$ près.
2. Calculer le pourcentage d'évolution nécessaire pour qu'au 1er Août le prix du MWh d'électricité repasse à 51€. Arrondir à $0,1\%$ près.

Exercice 8.16. [Écarts de salaires] Un employé affirme que son patron gagne environ 66% de plus que lui, mais le patron prétend que son employé ne gagne que 40% de moins que lui. Qui a raison ? Expliquez.

8.6.2 S'entraîner

Proportion

Exercice 8.17. Dans le parc Safari, on estime que 4% des pokémons sont des Rhinocorne. Au dernier recensement, on comptait 128 Rhinocorne. Quel est le nombre de pokémons dans le parc Safari ? Arrondir à l'unité.

Exercice 8.18. [30 millions d'amis] Un refuge pour animaux accueille 120 chats et chiens issus d'abandons et de sauvetages.

- 30% sont des chats.
- Parmi les chiens, 75% sont issus d'abandons.
- Il y a 32 sauvetages.

Effectifs	Chats	Chiens	Total
Abandons			
Sauvetages			
Total			

1. Recopier et compléter le tableau d'effectifs ci-dessus.
2. Calculer la proportion de chats issus de sauvetages. Arrondir à $0,01\%$ près.

Proportion d'une proportion

Exercice 8.19. Parmi les 150 premiers pokémons, environ 13% sont de types vol et 1% sont de types vol et feu. Quel est le pourcentage de pokémons de type feu parmi les pokémons vol ?

Taux d'évolution

Exercice 8.20. Lors d'une crue, le débit d'une rivière est passé de 90 m^3/s à 450 m^3/s. Quel pourcentage d'évolution cela représente-t-il ?

Coefficient multiplicateur

Exercice 8.21. Compléter le tableau suivant :

Évolution (en %)		$+0,3\%$	$-0,3\%$		
Coefficient multiplicateur	$1,75$			2	$0,5$

Exercice 8.22.

1. Multiplier par $1,5$ revient à augmenter de ....
2. Multiplier par $0,35$ revient à diminuer de ....
3. Multiplier par $0,6$ revient à ....
4. Multiplier par $1,06$ revient à ....
5. Multiplier par $0,95$ revient à ....

Exercice 8.23. Le prix unitaire d'un produit diminue de 5%. Calculer le pourcentage d'augmentation de la quantité de produits que l'on doit vendre afin que la recette augmente de 4%.

Évolutions successives

Exercice 8.24. On justifiera la réponse à chacune des questions suivantes.

1. Après une baisse de 15%, puis une hausse de 15%, un article est vendu :

   (a) plus cher, (b) moins cher, (c) au même prix, (d) la réponse d.

2. Après une hausse de 10% suivie d'une hausse de 5%, un article est vendu avec une augmentation de :

   (a) 15%, (b) $15,5\%$, (c) $14,5\%$, (d) la réponse d.

Exercice 8.25. [Vente de balais] Un fabriquant de balais volants souhaite augmenter ses ventes de 20% sur deux ans. La première année, il les augmente de 10%. Calculer le pourcentage d'augmentation des ventes qu'il devra atteindre la deuxième année afin de réaliser son objectif.

Exercice 8.26. [Démographie] Entre 1900 et 1914, la population française a augmenté de 2,26% ; entre 1914 et 1919, elle a diminué de 7,27% ; entre 1919 et 1934, elle a augmenté de 7,69% ; entre 1934 et 1944, elle a diminué de 6,73% ; depuis 1944, elle a augmenté de 69,32%. Quel est le pourcentage d'évolution globale de la population française entre 1900 et aujourd'hui ? Arrondir à $0,01\%$ près.

Évolution réciproque

Exercice 8.27. Calculer le taux d'évolution réciproque de chacun des taux d'évolution ci-dessous.

1. $+40\%$;
2. -40% ;
3. $+60\%$;
4. -70%.

8.6.3 Le Flashback !

Flashback 8.1. Le point $E\,(3\,;4)$ appartient-il à la droite (FG) où $F\,(-4\,;8)$ et $G\,(17\,;-4)$?

Flashback 8.2. Soit $\mathscr{D}$ passant par le point $A\,(0\,;8)$ et de vecteur directeur $\vec{d}\,(3\,;-4)$. Déterminer l'équation cartésienne de $\mathscr{D}$ puis la tracer dans un repère.

Flashback 8.3. Déterminer l'équation réduite de (AB) puis la tracer dans un repère où $A\,(-2\,;3)$ et $B\,(8\,;-9)$.

Flashback 8.4. Soient f, g et h trois fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 3x^2 - 12x - 15, \quad g(x) = 3(x-2)^2 - 27 \quad \text{et} \quad h(x) = 3(x-5)(x+1).$$

1. Montrer que $f(x), g(x)$ et $h(x)$ sont trois expressions de la même fonction.
2. Répondre aux questions suivantes en choisissant à chaque fois la forme **la plus adaptée**.
   (a) Calculer les images de 0, -1 et $\sqrt{2}+2$.
   (b) Chercher les éventuels antécédents de 0 et -15.
   (c) Trouver les abscisses des points de la courbe $\mathscr{C}_f$ de f d'ordonnée égale à -27 appartenant à la courbe de f.
   (d) Déterminer le signe de f.