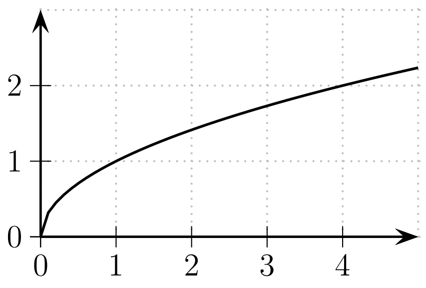
Chapitre 15

Fonctions racine et inverse

15.1 Fonction racine carrée

15.1.1 Définition

Définition 15.1. *La fonction f définie sur* $[0\,;+\infty[$ *par* $f(x)=\sqrt{x}$ *est appelée* ***fonction racine carrée*** .

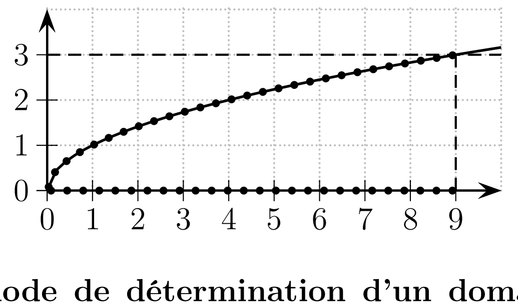


Représentation graphique : la fonction racine admet pour représentation graphique la courbe ci-contre.

Exemples : Résolvons une inéquation et déterminons un encadrement graphiquement.

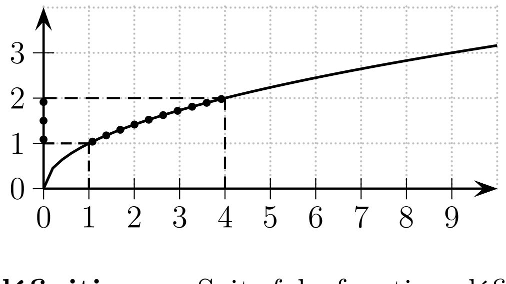
1. $\sqrt{x}<3$ a pour solution :

$$x\in[0\,;9[\,.$$



2. Si $x\in[1\,;4]$, alors

$$1\leqslant\sqrt{x}\leqslant 2.$$



Méthode de détermination d'un domaine de définition : Soit f la fonction définie par $f(x)=\sqrt{(1-4x)(9-3x)}$. Déterminons son ensemble de définition. $f(x)$ est défini si et seulement si $(4x+1)(9-3x)\geqslant 0$.

$$\begin{aligned}&1-4x\geqslant 0\\ \iff\ &-4x\geqslant -1\\ \iff\ &x\leqslant\frac{1}{4}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&9-3x\geqslant 0\\ \iff\ &-3x\geqslant -9\\ \iff\ &x\leqslant 3.\end{aligned}$$

On peut maintenant utiliser ces résultats pour compléter le tableau de signes ci-dessous et en déduire le signe du produit.

x	$-\infty$		$\frac{1}{4}$		3		$+\infty$
$4x + 1$		$+$	0	$-$		$-$	
$9 - 3x$		$+$		$+$	0	$-$	
$(4x+1)(9-3x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On en déduit que f est définie sur l'intervalle $\left]-\infty\,;\dfrac{1}{4}\right] \cup [3\,;+\infty[$.

Exercices : 15.1 à 15.3 ; 15.22.

15.1.2 Propriétés

Proposition 15.1. *La fonction racine carrée est :*

1. *positive sur* $[0\,;+\infty[$ *;*
2. *strictement croissante sur* $[0\,;+\infty[$.

Démonstration. Soient x_1 et x_2 dans $\mathbb{R}_+$ tels que $x_1 < x_2$. On veut montrer que $f(x_1) < f(x_2)$, pour cela, on va étudier le signe de $f(x_2) - f(x_1)$. On a – puisque $\sqrt{x_2} + \sqrt{x_1}$ est non nul –,

$$f(x_2) - f(x_1) = \sqrt{x_2} - \sqrt{x_1} = \frac{(\sqrt{x_2} - \sqrt{x_1})(\sqrt{x_2} + \sqrt{x_1})}{\sqrt{x_2} + \sqrt{x_1}} = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{x_2} + \sqrt{x_1}}.$$

Comme $\sqrt{x_2} + \sqrt{x_1} > 0$ et $x_2 - x_1 > 0$, on en déduit que $f(x_2) - f(x_1) > 0$, donc que $f(x_1) < f(x_2)$. Autrement dit, f est croissante . □

Méthode de détermination de variations : Soit f définie par $f(x) = \sqrt{1 + x^2}$ sur $\mathbb{R}$. Étudions les variations de f sur $\mathbb{R}_-$. Soient x_1, $x_2 \in \mathbb{R}_-$ tels que $x_1 < x_2$. On a

$$\begin{aligned}
& x_1 < x_2 \leqslant 0 \\
\Longrightarrow\ & x_1^2 > x_2^2 \geqslant 0 \\
& \text{(ineg. changéé car fct carré décroissante sur } \mathbb{R}_-) \\
\Longrightarrow\ & 1 + x_1^2 > 1 + x_2^2 \geqslant 1 \\
\Longrightarrow\ & \sqrt{1 + x_1^2} > \sqrt{1 + x_2^2} \\
& \text{(ineg. conservée car fct racine décroissante sur } \mathbb{R}_+) \\
\Longrightarrow\ & f(x_1) > f(x_2).
\end{aligned}$$

On a donc $x_1 < x_2 \implies f(x_1) > f(x_2)$, f change les inégalités sur $\mathbb{R}_-$, elle y est donc décroissante.

Proposition 15.2. *Soient x_1, $x_2 \in \mathbb{R}_+$, on a :*

1. $\sqrt{x_1 x_2} = \sqrt{x_1}\sqrt{x_2}$;
2. $\sqrt{\dfrac{x_1}{x_2}} = \dfrac{\sqrt{x_1}}{\sqrt{x_2}}$;
3. $\sqrt{x_1 + x_2} \leqslant \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}$;
4. *si $x_1 < x_2$, alors $\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2} < \sqrt{x_1 - x_2}$.*

Démonstration. Soient x_1, $x_2 \in \mathbb{R}_+$.

1. On a $\sqrt{x_1 x_2}^2 = x_1 x_2$. Or x_1, $x_2 \in \mathbb{R}_+$, donc $x_1 = \sqrt{x_1}^2$ et $x_2 = \sqrt{x_2}^2$, donc
$$\sqrt{x_1 x_2}^2 = x_1 x_2 = \sqrt{x_1}^2\sqrt{x_2}^2 = (\sqrt{x_1}\sqrt{x_2})^2.$$
Comme $\sqrt{x_1}$, $\sqrt{x_2}$, $\sqrt{x_1 x_2} \in \mathbb{R}_+$, on en déduit que
$$\sqrt{x_1 x_2} = \sqrt{x_1}\sqrt{x_2}.$$
2. De même façon, on a
$$\sqrt{\frac{x_1}{x_2}}^2 = \frac{x_1}{x_2} = \frac{\sqrt{x_1}^2}{\sqrt{x_2}^2} = \left(\frac{\sqrt{x_1}}{\sqrt{x_2}}\right)^2.$$
À nouveau, comme $\sqrt{x_1}$, $\sqrt{x_2}$, $\sqrt{x_1 x_2} \in \mathbb{R}_+$, on en déduit que
$$\sqrt{\frac{x_1}{x_2}} = \frac{\sqrt{x_1}}{\sqrt{x_2}}.$$
3. On a $\sqrt{x_1 + x_2}^2 = x_1 + x_2$ et
$$(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2})^2 = \sqrt{x_1}^2 + 2\sqrt{x_1}\sqrt{x_2} + \sqrt{x_2}^2 = x_1 + 2\sqrt{x_1}\sqrt{x_2} + x_2.$$
Or $x_1 + x_2 \leqslant x_1 + 2\sqrt{x_1}\sqrt{x_2} + x_2$ car $\sqrt{x_1}\sqrt{x_2} \geqslant 0$, donc
$$\sqrt{x_1 + x_2}^2 \leqslant (\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2})^2.$$
Comme la fonction racine est croissante sur $\mathbb{R}_+$, on en déduit que
$$\sqrt{x_1 + x_2} \leqslant \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}.$$
4.
$$\begin{aligned} &\sqrt{x_1} = \sqrt{(x_1 - x_2) + x_2} \\ \Longrightarrow\ &\sqrt{x_1} \leqslant \sqrt{x_1 - x_2} + \sqrt{x_2} \quad \text{(d'après \textit{3.})} \\ \Longrightarrow\ &\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2} \leqslant \sqrt{x_1 - x_2}. \end{aligned}$$

□

Remarque : Ces propriétés avaient déjà été vues dans le chapitre de calcul littéral, il s'agissait ici de les démontrer.

Méthode d'encadrement : Soit f définie par $f(x) = \sqrt{2x-1}$ sur $\left[\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$. Déterminons un encadrement de f sur $[-1\,;4]$. Soit $x \in \left[\frac{17}{32}\,;\frac{5}{8}\right]$. On a

$$\begin{aligned}
& \frac{17}{32} \leqslant x \leqslant \frac{5}{8} \\
\Longrightarrow\ & 2 \times \frac{17}{32} \leqslant 2x \leqslant 2 \times \frac{5}{8} \\
\Longrightarrow\ & \frac{17}{16} - 1 \leqslant 2x - 1 \leqslant \frac{5}{4} - 1 \\
\Longrightarrow\ & \frac{17}{16} - \frac{16}{16} \leqslant 2x - 1 \leqslant \frac{5}{4} - \frac{4}{4} \\
\Longrightarrow\ & \frac{1}{16} \leqslant 2x - 1 \leqslant \frac{1}{4} \\
\Longrightarrow\ & \sqrt{\frac{1}{16}} \leqslant \sqrt{2x-1} \leqslant \sqrt{\frac{1}{4}} \\
\Longrightarrow\ & \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{16}} \leqslant f(x) \leqslant \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{4}} \\
\Longrightarrow\ & \frac{1}{4} \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Exercices : 15.4 à 15.7 ; 15.23 et 15.24.

15.1.3 Résolution algébrique d'équations et d'inéquations

Proposition 15.3. *Soient x, $a \in \mathbb{R}_+$.*

1. $\sqrt{x} = a \iff x = a^2$.

2. $\sqrt{x} < a \iff x < a^2$.

Démonstration. Conséquence de la stricte croissance de la fonction carré sur $\mathbb{R}_+$. □

Exemples :

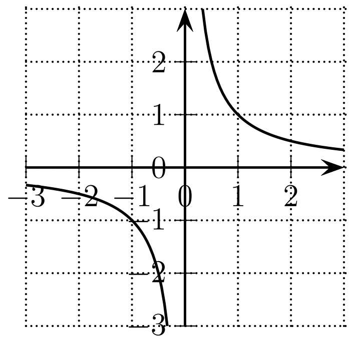
1. $\sqrt{x} = 9 \iff x = 9^2 \iff x = 81$.
2. $5 < \sqrt{x} < 6 \iff 5^2 < \sqrt{x} < 6^2 \iff 25 < x < 36$.

Exercices : 15.8 et 15.9 ; 15.25.

15.2 Fonction inverse

15.2.1 Définition

Définition 15.2. *La fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$ est appelée* ***fonction inverse*** *.*

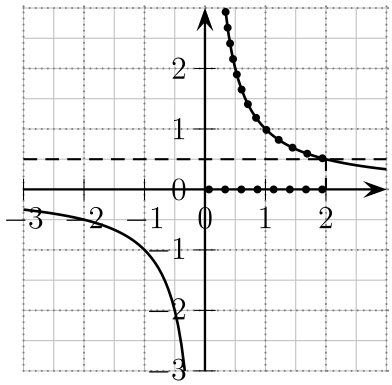


Représentation graphique : la fonction racine admet pour représentation graphique l'**hyperbole** ci-contre.

Exemples : Résolvons les inéquations suivantes graphiquement.

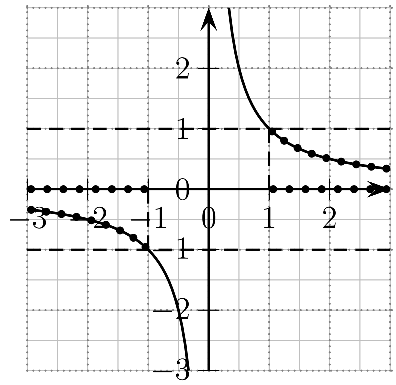
1. $\dfrac{1}{x} \geqslant \dfrac{1}{2}$ a pour solution :

$$x \in \left]0\,;2\right].$$



2. $-1 \leqslant \dfrac{1}{x} \leqslant 1$ a pour solution :

$$x \in \left]-\infty\,;-1\right] \cup \left[1\,;+\infty\right[.$$



Méthode de détermination d'un domaine de définition : Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{1}{(4x+1)(9-3x)}$. Déterminons son ensemble de définition. $f(x)$ est défini si et seulement si $(4x+1)(9-3x) \neq 0$. D'après la règle du produit nul, $(4x+1)(9-3x) = 0$ si et seulement si $4x+1 = 0$ ou $9-3x = 0$.

$$\begin{aligned} & 1 - 4x = 0 \\ \iff & -4x = -1 \\ \iff & x = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 9 - 3x = 0 \\ \iff & -3x = -9 \\ \iff & x = 3. \end{aligned}$$

Donc f est définie sur $\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{1}{4}\,;3\right\}$.

Exercices : 15.10 à 15.12 ; 15.26.

15.2.2 Propriétés

Proposition 15.4. *La fonction inverse est :*

1. *négative sur* $]-\infty\,;0[$ *et positive sur* $]0\,;+\infty[$ *;*
2. *strictement décroissante sur* $]-\infty\,;0[$ *et* $]0\,;+\infty[$ *.*

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\frac{1}{x}$		$-$	$\Vert$	$+$	
$\frac{1}{x}$	0	$\searrow$	$-\infty \;\Vert\; +\infty$	$\searrow$	0

Remarque : la fonction inverse n'est pas décroissante sur $\mathbb{R}^*$, en effet on a $-1 < 1$ et pourtant $f(-1) < f(1)$.

Démonstration. Soient x_1 et x_2 dans $]0\,;+\infty[$ tels que $x_1 < x_2$ (le cas $]-\infty\,;0[$ est laissé en exercice. On va étudier le signe de $f(x_2) - f(x_1)$, on a,

$$f(x_2) - f(x_1) = \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = \frac{x_1 - x_2}{x_1 x_2}.$$

Comme $x_1 x_2 > 0$ et $x_1 - x_2 < 0$, on en déduit que $f(x_2) - f(x_1) < 0$, donc que $f(x_1) > f(x_2)$. Autrement dit, f est décroissante . □

Remarque : les méthodes d'encadrement et de détermination des variations d'une fonction vues pour la fonction racine s'appliquent aussi pour la fonction inverse sur les intervalles où elle est strictement décroissante.

Exercices : 15.13 à 15.17 ; 15.27 et 15.28.

15.2.3 Résolution algébrique d'équations et d'inéquations

Corollaire 15.1. *Soient* X, $a \in \mathbb{R}^*$. *On a :* $\dfrac{1}{X} = a \iff X = \dfrac{1}{a}$.

Exemple : On a

$$\frac{1}{3x-1} = 2 \iff 3x - 1 = \frac{1}{2} \iff 3x = \frac{3}{2} \iff x = \frac{1}{2}.$$

Méthode de résolution d'inéquations : Elle consiste à se ramener à un tableau de signes.
Résolvons l'inéquation $\dfrac{1}{3x-2} \leqslant 2$. On a

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3x-2} \leqslant 2 &\iff \frac{1}{3x-2} - 2 \leqslant 0 \\
&\iff \frac{1}{3x-2} - \frac{2(3x-2)}{3x-2} \leqslant 0 \\
&\iff \frac{1}{3x-2} - \frac{6x-4}{3x-2} \leqslant 0 \\
&\iff \frac{1-6x+4}{3x-2} \leqslant 0 \\
&\iff \frac{5-6x}{3x-2} \leqslant 0.
\end{aligned}$$

x	$-\infty$		$\frac{2}{3}$		$\frac{5}{6}$		$+\infty$
$5-6x$		$+$		$+$	0	$-$	
$3x-2$		$-$	0	$+$		$+$	
$\dfrac{5-6x}{3x-2}$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

On en déduit que la solution de l'inéquation est $\left]-\infty\,;\dfrac{2}{3}\right[\cap \left[\dfrac{5}{6}\,;+\infty\right[$.

Exercices : 15.18 et 15.19 ; 15.29.

15.3 Positions relatives

Définition 15.3. ***[Rappels]*** *Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{R}$. On note $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les courbes représentatives de f et g. On dira que $\mathscr{C}_f$ est au dessus de $\mathscr{C}_g$ – respectivement en dessous – sur un sous-intervalle J de I si pour tout $x \in J$, on a $f(x) \geqslant g(x)$ – respectivement $f(x) \leqslant g(x)$.*

On pose f et g définies sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = x$ et $g(x) = \sqrt{x}$. Étudions les positions relatives de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

$\mathscr{C}_f$ est au dessus – resp. en dessous – de $\mathscr{C}_g$ si et seulement si $f \geqslant g$ – resp. $f \leqslant g$ –, si et seulement si $f - g \geqslant 0$ – resp. $f - g \leqslant 0$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,

$$f(x) - g(x) = x - \sqrt{x} = \sqrt{x}^2 - \sqrt{x} = \sqrt{x}(\sqrt{x} - 1).$$

On a

x	0		1		$+\infty$
$\sqrt{x}$		$+$		$+$	
$\sqrt{x}-1$		$-$	0	$+$	
$f-g$		$-$	0	$+$	

Donc $\mathscr{C}_f$ est au dessus de $\mathscr{C}_g$ sur $]1\,;+\infty]$ et en dessous sur $[0\,;1]$.

Exercices : 15.20 et 15.21 ; 15.30.

15.4 Capacités attendues

- Résoudre des équations et inéquations, graphiquement et algébriquement, faisant intervenir les fonctions racine et inverse.
- Déterminer l'ensemble de définition d'une fonction faisant intervenir les fonctions racine et inverse.
- Déterminer des encadrements et des variations de fonctions faisant intervenir les fonctions racine et inverse.
- Déterminer leurs positions relatives de courbes de fonctions faisant intervenir les fonctions racine et inverse.

15.5 Exercices

15.5.1 Progresser

Fonction racine carrée

Exercice 15.1. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses. Justifier si elles sont fausses.

1. L'image de 9 par la fonction racine carré est 3.
2. L'image de -9 par la fonction racine carré est -3.
3. Un antécédent de 4 par la fonction racine carré est 16.
4. Un antécédent de 5 par la fonction racine carré est -25.

Exercice 15.2. Résoudre graphiquement inéquations suivantes.

1. $\sqrt{x} \leqslant 4$.
2. $\sqrt{x} > 11$.
3. $8 \leqslant \sqrt{x} \leqslant 9$.

Exercice 15.3. Déterminer les ensembles de définitions des fonctions suivantes.

1. $f(x) = \sqrt{2-4x}$.
2. $f(x) = \sqrt{-x}$.
3. $f(x) = \sqrt{(5x+1)(2-7x)}$.
4. $f(x) = \sqrt{1-x^2}$.

Propriétés de la fonction racine carrée

Exercice 15.4.

1. Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = \sqrt{x} - 3$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$.
2. Montrer que la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+$ par $g(x) = -5\sqrt{x}+1$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 15.5. Déterminer un encadrement de $\sqrt{x}$ dans chacun des cas suivants.

1. $1 \leqslant x \leqslant 4$.
2. $0 \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{4}$.
3. $\dfrac{25}{36} \leqslant x \leqslant \dfrac{49}{16}$.

Exercice 15.6.

1. Étudier les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1 - \sqrt{x^2+1}$ sur $\mathbb{R}_-$.
2. Étudier les variations de la fonction g définie sur $]-\infty\,;1]$ par $g(x) = 4\sqrt{1-x^3}$.

Exercice 15.7. Soit $x \in]6\,;7[$, déterminer un encadrement à 0,1 près de

1. $3\sqrt{x}+1$;
2. $\sqrt{4x+1}$;
3. $\sqrt{x^2-1} - 1$.

Résolution algébrique d'équations et d'inéquations à l'aide de la fonction racine carrée

Exercice 15.8. Résoudre algébriquement les équations et inéquations suivantes.

1. $\sqrt{3x-2} = 5$.
2. $2\sqrt{x} - 5 = -1$.
3. $\sqrt{x} > 0,5$.
4. $2,2 \leqslant 2\sqrt{x}+1 \leqslant 2,6$.
5. $\sqrt{9x-7} < 2$.
6. $\sqrt{x^2-2x+4} \geqslant 2$.

Exercice 15.9. [Évolutions] On considère un disque de rayon r et de surface S.

1. Exprimer r en fonction de S.
2. On considère un disque de surface $S_1 = 1$. Comment doit évoluer le rayon du disque pour que son aire triple ?
3. Même question pour une diminution de moitié de l'aire du disque.

Fonction inverse

Exercice 15.10. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses. Justifier si elles sont fausses.

1. L'image de 3 par la fonction inverse est $-\dfrac{1}{3}$.
2. L'image de $-\dfrac{1}{4}$ par la fonction inverse est -4.
3. Un antécédent de $\dfrac{1}{2}$ par la fonction inverse est 2.
4. Un antécédent de $-\dfrac{6}{5}$ par la fonction inverse est $-\dfrac{5}{6}$.

Exercice 15.11. Résoudre graphiquement inéquations suivantes.

1. $\dfrac{1}{x} \geqslant \dfrac{1}{6}$.
2. $\dfrac{1}{x} \geqslant -5$.
3. $-2 < \dfrac{1}{x} < 2$.
4. $-0,5 < \dfrac{1}{x} < 0,1$.

Exercice 15.12. Déterminer les ensembles de définitions des fonctions suivantes.

1. $f(x) = \dfrac{1}{3x-2}$.
2. $f(x) = \dfrac{7x}{1-4x}$.
3. $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.
4. $f(x) = \dfrac{1}{(x+2)(x-3)}$.
5. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{4x+2}}$.
6. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Propriétés de la fonction inverse

Exercice 15.13. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

1. La fonction inverse est décroissante sur $[9\,;+\infty[$.
2. La fonction inverse est décroissante sur $\mathbb{R}^*$.
3. La fonction inverse est décroissante sur $]-9\,;0[\cup]0\,;9[$.

Exercice 15.14.

1. Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{1}{x} - 3$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Montrer que la fonction g définie sur $\mathbb{R}^*$ par $g(x) = -\dfrac{5}{x} + 1$ est croissante sur $\mathbb{R}_-^*$.

Exercice 15.15. Soit $x \in \mathbb{R}^*$. Déterminer un encadrement de $\dfrac{1}{x}$ dans chacun des cas suivants.

1. $1 \leqslant x \leqslant 4$.
2. $-2 \leqslant x \leqslant -1$.
3. $-\dfrac{1}{2} \leqslant x \leqslant -\dfrac{1}{3}$.
4. $\dfrac{1}{4} \leqslant x \leqslant \dfrac{3}{4}$.

Exercice 15.16.

1. Étudier les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ par $f(x) = 1 - \dfrac{1}{x^3+1}$ sur l'intervalle $]-1\,;+\infty[$.
2. Étudier les variations de g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

Exercice 15.17. Soit $x \in \left[\dfrac{1}{2}\,;2\right]$, déterminer un encadrement de

1. $\dfrac{2}{x} + 3$.
2. $-\dfrac{1}{x+1}$.
3. $1 - \dfrac{2}{x^2+1}$.

Résolution algébrique d'équations et d'inéquations à l'aide de la fonction inverse

Exercice 15.18. Résoudre algébriquement les équations et inéquations suivantes.

1. $\dfrac{1}{x+3} = 8.$
2. $-\dfrac{1}{2x+1} = 7.$
3. $\dfrac{1}{x+2} = -\dfrac{1}{3}.$
4. $\dfrac{2}{4x-1} \leqslant 4.$
5. $\dfrac{-3}{9x+1} > \dfrac{1}{2}.$
6. $\dfrac{2}{4x-1} \geqslant -\dfrac{4}{3}.$

Exercice 15.19. On considère le système (S) $\begin{cases} \dfrac{3}{x} + \dfrac{2}{y} = 4, \\ \dfrac{9}{x} - \dfrac{5}{y} = 1. \end{cases}$

1. On pose $X = \dfrac{1}{x}$ et $Y = \dfrac{1}{y}$. Écrire le système dont $(X\,;Y)$ est solution et le résoudre.
2. En déduire tous les couples $(x\,;y)$ solutions de (S).

Positions relatives

Exercice 15.20. Soient les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x$ et $g(x) = \dfrac{1}{x}$. Étudier les positions relatives de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

Exercice 15.21. Soient les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = 6\sqrt{x}$ et $g(x) = -2\sqrt{x}+3$. Étudier les positions relatives de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

15.5.2 S'entraîner

Fonction racine carrée

Exercice 15.22. Déterminer les ensembles de définitions des fonctions suivantes.

1. $f(x) = \sqrt{2-x}.$
2. $f(x) = \sqrt{(6x-3)(15+3x)}.$
3. $f(x) = \sqrt{4-x^2}.$

Propriétés de la fonction racine carrée

Exercice 15.23. Montrer que la fonction f définie sur :

1. $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = -4\sqrt{x}+3$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+$;
2. $[-1\,;1]$ par $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ est croissante sur $[-1\,;0]$ et décroissante sur $[0\,;1]$.

Exercice 15.24. Soit $x \in \,]6\,;7[$, déterminer un encadrement de

1. $\sqrt{x} - 4.$
2. $-2\sqrt{x} + 4.$
3. $1 + \sqrt{x^2+5}.$

Résolution algébrique d'équations et d'inéquations à l'aide de la fonction racine carrée

Exercice 15.25. Résoudre algébriquement les équations et inéquations suivantes.

1. $\sqrt{7x+5}=1$.
2. $0,2 \leqslant 3\sqrt{x}-11 \leqslant 0,5$.
3. $\sqrt{x^2+3x+9} \leqslant 3$.

Fonction inverse

Exercice 15.26. Déterminer les ensembles de définitions des fonctions suivantes.

1. $f(x)=\dfrac{4x+1}{(6x-7)(9x+18)}$.
2. $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.
3. $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x(x+5)}}$.

Propriétés de la fonction inverse

Exercice 15.27. Montrer que la fonction f définie sur :

1. $\mathbb{R}^*$ par $f(x)=-\dfrac{5}{x}+1$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$;
2. $]-1\,;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$ est décroissante sur $]-1\,;+\infty[$.

Exercice 15.28. Soit $x \in \left[-5\,;-\dfrac{1}{5}\right]$, déterminer un encadrement de

1. $\dfrac{1}{x}-1$.
2. $-\dfrac{5}{x}+2$.
3. $1-\dfrac{2}{x^3+1}$.

Résolution algébrique d'équations et d'inéquations à l'aide de la fonction inverse

Exercice 15.29. Résoudre algébriquement les équations et inéquations suivantes.

1. $\dfrac{2}{8x-24} > -1$.
2. $\dfrac{-2}{5x+100} \leqslant \dfrac{4}{5}$.

Positions relatives

Exercice 15.30. Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}^*$ par $f(t)=\dfrac{2}{t}$ et $g(t)=-\dfrac{3}{t}-5$. Étudier les positions relatives de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

15.5.3 Le Flashback !

Exercice 15.31. Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Démontrer que $72n+36$ est un multiple de 9.
2. Démontrer que $(12n-3)^2(2n+4)$ est un multiple de 18.

Exercice 15.32. Écrire sous forme de fraction irréductible les fractions suivantes.

1. $\dfrac{78}{42}$.
2. $\dfrac{24}{72}$.
3. $\dfrac{190}{38}$.