Chapitre 11

Fonctions affines

11.1 Fonctions affines

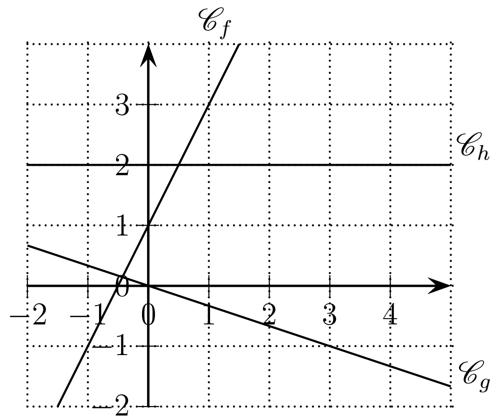
Définition 11.1. *Une **fonction affine** est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par*

$$f(x) = mx + p,$$

avec m, $p \in \mathbb{R}$.

- *Si $m = 0$, alors f est une **fonction constante** : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = p$.*
- *Si $p = 0$, alors f est une **fonction linéaire** : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = mx$.*

Proposition 11.1. *Dans un repère $\left(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\right)$, la représentation graphique d'une fonction affine est une droite d'équation $y = mx + p$.*



Exemples : Les fonctions affines ci-dessous ont pour représentation les droites ci-contre.

1. $f(x) = 2x + 1$;
2. $g(x) = -\dfrac{1}{3}x$;
3. $h(x) = 2$.

Proposition 11.2. *Soit f une fonction affine : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = mx + p$. Quelques soient x_1, $x_2 \in \mathbb{R}$ tels que $x_1 \neq x_2$, on a*

$$m = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Démonstration. Identique à celle vue dans le chapitre sur les équations de droites. □

Méthode : Soit f une fonction affine vérifiant $f(3) = -2$ et $f(7) = 3$. Déterminons l'expression de f. f est affine donc ils existent m, $p \in \mathbb{R}$ tels que $f(x) = mx + p$. On a

$$m = \frac{f(7) - f(3)}{7 - 3} = \frac{3 - (-2)}{4} = \frac{5}{4}.$$

Il reste à déterminer p. Or, comme $f(3) = -2$, on a

$$\frac{5}{4} \times 3 + p = -2.$$

On en déduit que $p = -\frac{23}{4}$ et donc $f(x) = \frac{5}{4}x - \frac{23}{4}$.

Remarque : Si f est affine et $f(x) = mx + p$, alors on a $f(0) = p$.

Exercices : 11.1 à 11.7 ; 11.13 à 11.15.

11.2 Variations et signes d'une fonction affine

11.2.1 Variations d'une fonction affine

Proposition 11.3. *Soit f une fonction affine s'écrivant $f(x) = mx + p$.*

— *Si $m > 0$ alors f est croissante sur $\mathbb{R}$.*
— *Si $m < 0$ alors f est décroissante sur $\mathbb{R}$.*

Exemples :

1. f définie par $f(x) = 3x + 1$ est croissante sur $\mathbb{R}$ car $m = 3 > 0$.
2. f définie par $f(x) = -\frac{1}{2}x - \frac{2}{3}$ est décroissante sur $\mathbb{R}$ car $m = -\frac{1}{2} < 0$.

Démonstration. Soit f une fonction affine s'écrivant $f(x) = mx + p$. Soient x_1, $x_2 \in \mathbb{R}$ tels que $x_1 < x_2$.

Cas $m > 0$: On a

$$\begin{aligned} & x_1 < x_2 \\ \Longrightarrow\ & mx_1 < mx_2 \quad \text{(inégalité conservée car } m > 0) \\ \Longrightarrow\ & mx_1 + p < mx_2 + p \\ \Longrightarrow\ & f(x_1) < f(x_2). \end{aligned}$$

f conserve les inégalités sur $\mathbb{R}$, elle y est donc croissante.

Cas $m < 0$: Exercice.

□

11.2.2 Signes d'une fonction affine

Proposition 11.4. *Soit f une fonction affine telle que $m \neq 0$. Elle admet pour tableau de signe.*

x	$-\infty$		$-\frac{p}{m}$		$+\infty$
$f(x)$		*signe de -m*	0	*signe de m*	

Démonstration. Soit f une fonction affine s'écrivant $f(x) = mx + p$ avec $m \neq 0$.
Cas $m > 0$ **:** On a

$$\begin{aligned} & mx + p \geqslant 0 \\ \iff \ & mx \geqslant -p \\ \iff \ & x \geqslant -\frac{p}{m} \quad \text{(inégalité conservée car } m > 0\text{).} \end{aligned}$$

On obtient alors le tableau de signe

x	$-\infty$		$-\dfrac{p}{m}$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

Cas $m < 0$ **:** Exercice.

$\square$

Exemple : $f(x) = -3x + 2$ admet pour tableau de signes :

x	$-\infty$		$\dfrac{2}{3}$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	

Exercices : 11.8 à 11.12 ; 11.16 et 11.17.

11.3 Capacités attendues

— Calculer l'image ou l'antécédent d'un réel par une fonction affine.
— Passer du graphe d'une fonction affine à son expression algébrique et inversement.
— Déterminer les variations et le signe d'une fonction affine.
— Résoudre des problèmes faisant intervenir des fonctions affines.

11.4 Exercices

11.4.1 Progresser

Fonctions affines

Exercice 11.1. Parmi les fonctions suivantes, lesquelles sont affines ? Le cas échéant, préciser si elles sont constantes, linéaires ou simplement affines.

1. $f_1(x) = 3x + 4$.
2. $f_2(x) = 3x$.
3. $f_3(x) = 3\sqrt{x} + 4$.
4. $f_4(x) = 4$.

Exercice 11.2. Dans chaque cas, déterminer l'expression de f fonction affine.

1. $f(1) = 3$ et $f(4) = -3$.
2. $f(0) = -2$ et $f(3) = 6$.
3. $f(8) = 1$ et $f(9) = 0$.

Exercice 11.3. Parmi les fonctions suivantes, lesquelles ont une représentation graphique passant par $P\,(-3\,;4)$?

1. $f_1(x) = 4x - 9$.
2. $f_2(x) = -3x - 5$.

Exercice 11.4. Tracer les droites représentatives des fonctions affines suivantes.

1. $f_1(x) = 4x - 9$.
2. $f_2(x) = -3x - 5$.
3. $f_3(x) = 2$.
4. $f_4(x) = \frac{1}{2}x$.

Exercice 11.5. Soit f une fonction affine dont la droite représentative passe par les points A et B. Dans chacun des cas suivants, déterminer l'expression de f.

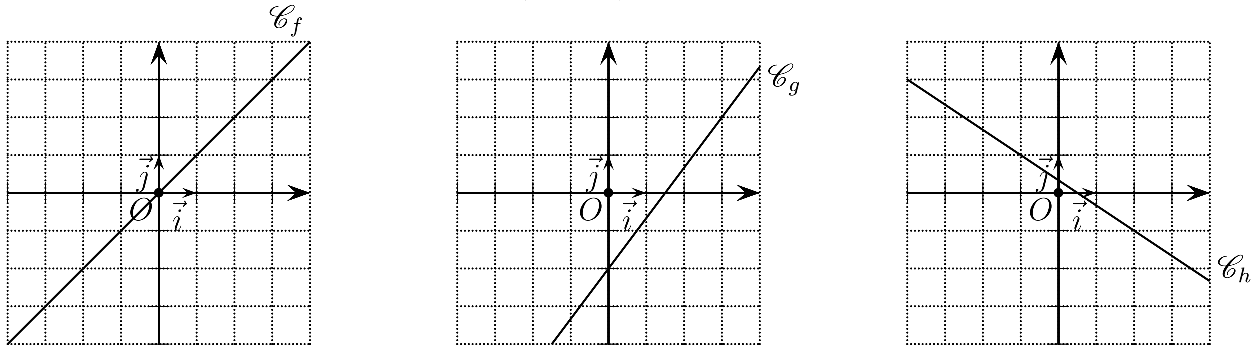
1. $A\left(\frac{1}{8}\,;\frac{2}{7}\right)$ et $B\left(\frac{3}{8}\,;\frac{3}{14}\right)$.
2. $A\left(\sqrt{5}\,;-\sqrt{2}\right)$ et $B\left(1-\sqrt{5}\,;-\sqrt{2}\right)$.

Exercice 11.6. [Voitures] Le but de cet exercice est de comparer les émissions cumulées en équivalent CO_2 d'une voiture thermique et d'une voiture électrique. Ce comparatif est à l'usage et ne tient donc pas de la fin de vie de la voiture. Il ne tient pas compte non plus des autres formes de pollutions, les données correspondent à ce que l'on peut avoir en France mais sont approximatives.

Émission éq. CO_2	Fabrication (en tonnes)	Usage (en g/km)
Voiture thermique	4	200
Voiture électrique	10	5

1. Donner deux fonctions f_T et f_E donnant les émissions cumulées en équivalent CO_2 d'une voiture thermique et d'une voiture électrique en fonction du nombre x de milliers de kilomètre parcourus.
2. Est-ce qu'une voiture électrique finit par émettre moins qu'une thermique ? Si oui, déterminer au bout de combien de milliers de kilomètres.

Exercice 11.7. Déterminer l'expression de chacune des fonctions affines dont on a la droite représentative ci-dessous dans le repère $\left(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\right)$.



Variations et signes d'une fonction affine

Exercice 11.8. Pour chacune des fonctions suivantes, donner ses variations et son tableau de signes. Justifier.

1. $f_1(x) = 4x - 9$.
2. $f_2(x) = -3x - 5$.
3. $f_3(x) = -\dfrac{1}{2}x$.
4. $f_4(x) = \dfrac{2}{3}x - \dfrac{3}{4}$.

Exercice 11.9. Donner les tableaux de variations et de signes des fonctions de l'exercice 11.7.

Exercice 11.10. [Potions magiques] La ville de Novigrad abrite 6 000 habitants et la sorcière Triss Merigold compte y vendre des potions. Grâce à sa magie, elle a pu fabriquer 1 000 fioles de potions qu'elle a vendu deux écus à l'unité. Toutefois, elle s'est rendu compte que si elle faisait baisser le prix d'une d'un certain pourcentage x, elle attirerait plus de clients et augmenterait ses bénéfices. Le but est d'étudier son chiffre d'affaire afin de déterminer quel pourcentage de réduction donne les meilleurs résultats. Après étude, on sait que l'expression du chiffre d'affaire de Triss Merigold est donné, pour tout $x \in [0\,;100]$, par :

$$C(x) = 2\,000 + 80x - x^2.$$

1. Résoudre l'inéquation $C(x) > 2\,000$ et interpréter le résultat.
2. (a) Démontrer que pour tout $x \in [0\,;100]$, $C(x) = -(x-40)^2 + 3\,600$.
   (b) En déduire que pour tout $x \in [0\,;100]$, $C(x) \leqslant 3\,600$.
   (c) Résoudre l'équation $C(x) \leqslant 3\,600$ et interpréter le résultat.

Exercice 11.11. [Démonstration] Soit f une fonction affine : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = mx+p$. Démontrer que f est décroissante si $m < 0$.

Exercice 11.12. [Démonstration] Soit f une fonction affine : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = mx+p$. Donner le tableau de signe de f si $m < 0$.

11.4.2 S'entraîner

Fonctions affines

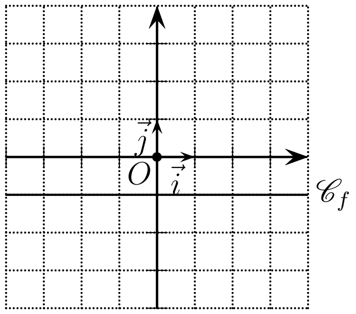
Exercice 11.13. Dans chaque cas, déterminer l'expression de f fonction affine vérifiant les conditions ci - dessous.

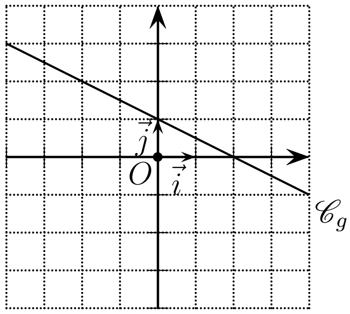
1. $f(-3) = 1$ et $f(0) = 9$.
2. $f(5) = -2$ et $f(7) = 0$.

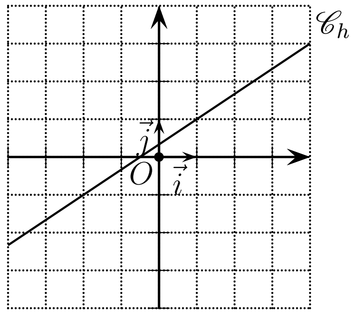
Exercice 11.14. Tracer dans un repère les droites représentatives des fonctions affines suivantes.

1. $f_1(x) = -\frac{7}{3}x - 3$.
2. $f_2(x) = \frac{8}{5}$.
3. $f_3(x) = -\frac{3}{4}x$.

Exercice 11.15. Déterminer l'expression de chacune des fonctions affines dont on a la droite représentative ci - dessous.







Variations et signes d'une fonction affine

Exercice 11.16. Pour chacune des fonctions suivantes, donner ses variations et son tableau de signes. Justifier.

1. $f_1(x) = -\frac{7}{3}x - 3$.
2. $f_2(x) = \frac{8}{5}$.
3. $f_3(x) = \sqrt{5}x$.
4. $f_4(x) = -\frac{3}{4}x + \frac{1}{2}$.

Exercice 11.17. Donner les tableaux de variations et de signes des fonctions de l'exercice 11.15.

11.4.3 Le Flashback !

Flashback 11.1. Déterminer dans chaque cas si les droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ sont parallèles ou sécantes. Le cas échéant, déterminer les coordonnées de leur point d'intersection.

1. $\mathscr{D}_1 \ : \ 2x + y - 1 = 0$ et $\mathscr{D}_2 \ : \ -4x - 2y - 5 = 0$
2. $\mathscr{D}_1 \ : \ 2x + y - 1 = 0$ et $\mathscr{D}_2 \ : \ 3x - 2y - 5 = 0$