Chapitre 7

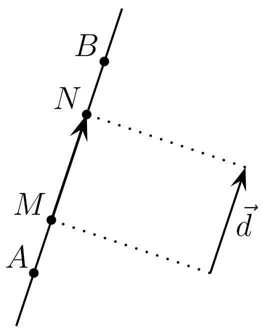
Droites du plan

7.1 Droites du plan

7.1.1 Droites du plan et vecteur directeur d'une droite

Définition 7.1. *Soient A et B deux points du plan.*

- *La **droite** (AB) est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ soient colinéaires, autrement dit tels qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que*
$$\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{AB}.$$
- *$\vec{d}$ est un **vecteur directeur** de (AB) si et seulement si il existe deux points M et N de (AB) tels que $\vec{d} = \overrightarrow{MN}$.*



Proposition 7.1. *Soit $\mathscr{D}$ une droite de vecteur directeur $\vec{d}$. $\vec{u}$ est un vecteur directeur de $\mathscr{D}$ si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{d}$ sont colinéaires.*

Démonstration. Soit $\mathscr{D}$ une droite de vecteur directeur $\vec{d}$. Comme $\vec{d}$ est un vecteur directeur de $\mathscr{D}$, il existe A, $B \in \mathscr{D}$ tels que $\vec{d} = \overrightarrow{AB}$. On a par ailleurs $\mathscr{D} = (AB)$.

$\Longrightarrow$ **:** Soit $\vec{u}$ un vecteur directeur de $\mathscr{D} = (AB)$. Il existe $M \in (AB)$ tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AM}$. Comme $M \in (AB)$, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{AB}$; $\vec{u} = \overrightarrow{AM}$ est donc colinéaire à $\vec{d} = \overrightarrow{AB}$.

$\Longleftarrow$ **:** Soit $\vec{u}$ un vecteur colinéaire à $\vec{d}$: il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{u} = \lambda\vec{d}$. Soit M l'image de la translation de A par $\vec{u}$, autrement dit le point du plan tel que $\vec{u} = \overrightarrow{AM}$. On a alors $\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{AB}$. Par définition, on a alors $M \in (AB)$. Comme $\vec{u} = \overrightarrow{AM}$ avec A, $M \in (AB)$, $\vec{u}$ est un vecteur directeur de (AB), autrement dit de $\mathscr{D}$.

$\square$

Exemple : Soient $A\,(-1\,;2)$ et $B\,(5\,;14)$ deux points d'un repère du plan $\left(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\right)$. Déterminons si $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ sont des vecteurs directeurs de (AB). $\overrightarrow{AB}$ est vecteur directeur de (AB) et a pour coordonnées :

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B - x_A\\y_B - y_A\end{pmatrix} \Longrightarrow \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}5-(-1)\\14-2\end{pmatrix} \Longrightarrow \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}6\\12\end{pmatrix}.$$

1. $\vec{u}$ est un vecteur directeur de (AB) si et seulement si il est colinéaire à $\overrightarrow{AB}$, si et seulement si leur déterminant est nul.

$$\begin{aligned}\det\left(\overrightarrow{AB}\,;\vec{u}\right) &= x_{\overrightarrow{AB}}y_{\vec{u}} - x_{\vec{u}}y_{\overrightarrow{AB}}\\ &= 6\times 4 - 3\times 12\\ &= -12\\ &\neq 0.\end{aligned}$$

   On en déduit que $\vec{u}$ n'est pas un vecteur directeur de (AB).

2. De même, $\vec{v}$ est un vecteur directeur de (AB) si et seulement si il est colinéaire à $\overrightarrow{AB}$, si et seulement si leur déterminant est nul.

$$\begin{aligned}\det\left(\overrightarrow{AB}\,;\vec{v}\right) &= x_{\overrightarrow{AB}}y_{\vec{v}} - x_{\vec{v}}y_{\overrightarrow{AB}}\\ &= 6\times 2 - 1\times 12\\ &= 0.\end{aligned}$$

   On en déduit que $\vec{v}$ est un vecteur directeur de (AB).

Exercices : 7.1 et 7.2 ; 7.24 et 7.25.

7.1.2 Alignement de points

Proposition 7.2. *Trois points A, B et C sont* ***alignés*** *si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.*

Remarque : Il est possible de prendre n'importe quelle autre combinaison de vecteurs formés à partir de ces trois points, par exemple $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$.

Démonstration. Soient A, B et C trois points du plan. A, B et C sont alignés si et seulement si $C \in (AB)$, si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires. □

Exemple : Soient $A\,(-1\,;2)$, $B\,(5\,;14)$ et $C\,(0\,;3)$ trois points d'un repère du plan $\left(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\right)$. Déterminons s'ils sont alignés. A, B et C sont alignés si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires, si et seulement si leur déterminant est nul. D'après l'exemple précédent, on a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}6\\12\end{pmatrix}$. De même, on a

$$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}x_C - x_A\\ y_C - y_A\end{pmatrix} \implies \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}0-(-1)\\ 3-2\end{pmatrix} \implies \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned}\det\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}\right) &= x_{\overrightarrow{AB}}y_{\overrightarrow{AC}} - x_{\overrightarrow{AC}}y_{\overrightarrow{AB}}\\ &= 6\times 1 - 1\times 12\\ &= -6.\\ &\neq 0.\end{aligned}$$

On en déduit que A, B et C ne sont pas alignés.

Exercices : 7.3 à 7.7 ; 7.26.

7.2 Équations cartésiennes de droite

7.2.1 Équations cartésiennes de droite

Théorème 7.1. *Soient $\left(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\right)$ un repère et $\mathscr{D}$ une droite du plan. Alors il existe trois nombres réels a, b et c (avec $a \neq 0$ ou $b \neq 0$) tels que $\mathscr{D}$ soit l'ensemble des points $M\,(x\,;y)$ vérifiant*

$$ax + by + c = 0.$$

On appelle cette forme d'équation de $\mathscr{D}$ une ***équation cartésienne*** *.*

Exemples : $3x - y + 1 = 0$, $2y + 5 = 0$ et $x - 1 = 0$ sont des équations cartésiennes où les triplets $(a\,;b\,;c)$ sont respectivement égaux à $(3\,;-1\,;1)$, $(0\,;2\,;5)$ et $(1\,;0\,;-1)$.

Démonstration. Soient $\left(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\right)$ un repère, $A(x_A\,;y_A)$ et $B(x_B\,;y_B)$ deux points distincts de $\mathscr{D}$ et $M(x\,;y)$ un point de $\mathscr{D}$.

$$\begin{aligned}
M \in \mathscr{D} &\iff M \in (AB)\\
&\iff \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \end{pmatrix} \text{ sont colinéaires}\\
&\iff \det\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AB}\right) = 0\\
&\iff (x_B - x_A)(y - y_A) - (y_B - y_A)(x - x_A) = 0\\
&\iff (x_B - x_A)y - (x_B - x_A)y_A - (y_B - y_A)x + (y_B - y_A)x_A = 0\\
&\iff (y_A - y_B)x + (x_B - x_A)y + y_A(x_A - x_B) + x_A(y_B - y_A) = 0\\
&\iff ax + by + c = 0,
\end{aligned}$$

en ayant noté :

$$\begin{cases} a &= y_A - y_B \\ b &= x_B - x_A \\ c &= y_A(x_A - x_B) + x_A(y_B - y_A) = x_A y_B - x_B y_A. \end{cases}$$

On a bien $a \neq 0$ ou $b \neq 0$ car les points A et B sont distincts. □

Remarque : Le triplet $(a\,;b\,;c)$ n'est pas unique.

Méthode : Soit $\mathscr{D}$ une droite du plan d'équation cartésienne $x - 2y + 1 = 0$.

1. Déterminons si $A\,(0\,;4)$ appartient à $\mathscr{D}$ ou non. Pour cela, on vérifie si les coordonnées de A sont solutions de l'équation cartésienne :

$$x_A - 2y_A + 1 = 0 - 2 \times 4 + 1 = -7 \neq 0.$$

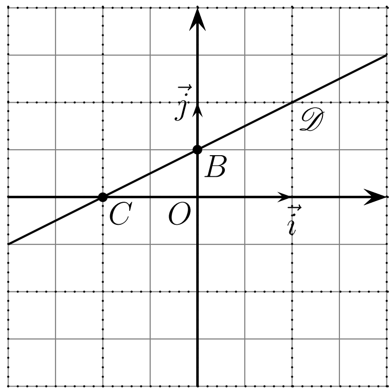
   Donc $A \notin \mathscr{D}$.

2. Déterminons les coordonnées d'un point B appartenant à $\mathscr{D}$. Pour cela, on choisit une des deux coordonnées et on cherche l'autre de façon à vérifier l'équation cartésienne. Prenons par exemple $x_B = 0$. On a alors

$$\begin{aligned} B \in \mathscr{D} &\iff x_B - 2y_B + 1 = 0 \\ &\iff 0 - 2y_B + 1 = 0 \\ &\iff -2y_B = -1 \\ &\iff y_B = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Donc $B\left(0\,;\frac{1}{2}\right) \in \mathscr{D}$.

3. Traçons la droite $\mathscr{D}$ dans le repère ci-dessous. On sait déjà que $B\left(0\,;\frac{1}{2}\right) \in \mathscr{D}$. On peut déterminer les coordonnées d'un second point C appartenant à $\mathscr{D}$ avec la même méthode. On pourra alors placer B et C dans le repère puis tracer la droite (BC), i.e. $\mathscr{D}$.
Prenons cette fois-ci $y_C = 0$. On a alors



$$\begin{aligned} C \in \mathscr{D} &\iff x_C - 2y_C + 1 = 0 \\ &\iff x_C - 2 \times 0 + 1 = 0 \\ &\iff x_C + 1 = 0 \\ &\iff x_C = -1. \end{aligned}$$

Donc $C\,(-1\,;0) \in \mathscr{D}$.

Exercices : 7.8 à 7.10 ; 7.27.

7.2.2 De l'équation cartésienne au vecteur directeur

Proposition 7.3. *Soient $\left(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\right)$ un repère et $\mathscr{D}$ une droite du plan. Si $ax + by + c = 0$ est une équation cartésienne de $\mathscr{D}$, alors le vecteur du plan $\vec{d}\begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de $\mathscr{D}$.*

Remarque : le vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ est aussi un vecteur directeur de $\mathscr{D}$, en effet il est colinéaire à $\vec{d}\begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$ puisque $\vec{v} = -\vec{d}$.

Démonstration. Soient $\left(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\right)$ un repère, $A(x_A\,;y_A)$ et $B(x_B\,;y_B)$ deux points distincts de la droite $\mathscr{D}$ dans ce repère. Par hypothèse, on a :

$$\begin{cases} ax_A + by_A + c = 0 \\ ax_B + by_B + c = 0 \end{cases}$$

Montrons que $\vec{d}\begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$ sont colinéaires :

$$\begin{aligned}
\det\left(\vec{d}\,;\overrightarrow{AB}\right) &= b(y_B - y_A) - (-a)(x_B - x_A) \\
&= by_B - by_A + ax_B - ax_A \\
&= ax_B + by_B - (ax_A + by_A) \\
&= -c - (-c) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

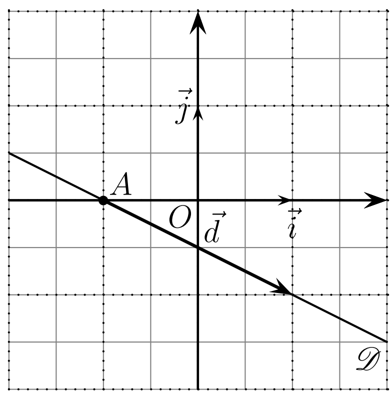
Par définition, $\overrightarrow{AB}$ dirige la droite $\mathscr{D}$ et $\vec{d}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AB}$. On en déduit que $\vec{d}$ est un vecteur directeur de $\mathscr{D}$. □

Exemple : Soit $\mathscr{D}$ la droite d'équation $3x - 4y + 2 = 0$. Déterminons un vecteur directeur de $\mathscr{D}$. On a $a = 3$ et $b = -4$, d'après la propriété ci-dessus, $\vec{d}\begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix} \Longrightarrow \vec{d}\begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de $\mathscr{D}$.

Méthode : Traçons la droite $\mathscr{D}$ d'équation cartésienne $x + 2y + 1 = 0$ dans le repère ci-contre à l'aide d'un point et d'un vecteur directeur directeur. D'après la propriété précédente, $\vec{d}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de $\mathscr{D}$.

Cherchons les coordonnées d'un point A appartenant à $\mathscr{D}$ tel que $y_A = 0$.

$$\begin{aligned}
A \in \mathscr{D} &\iff x_A + 2y_A + 1 = 0 \\
&\iff x_A + 2 \times 0 + 1 = 0 \\
&\iff x_A + 1 = 0 \\
&\iff x_A = -1.
\end{aligned}$$



Donc $A\,(-1\,;0) \in \mathscr{D}$. Il suffit à présent de placer A puis construire $\vec{d}$ à partir de A pour obtenir $\mathscr{D}$.

Exercices : 7.11 à 7.13 ; 7.28 à 7.30.

7.2.3 Du vecteur directeur à l'équation cartésienne

Proposition 7.4. *Soient $\left(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\right)$ un repère et $\mathscr{D}$ une droite du plan, α et β deux nombres réels tels que $\alpha \neq 0$ ou $\beta \neq 0$. Si $\vec{d}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de $\mathscr{D}$, alors il existe un réel c tel que $\beta x - \alpha y + c = 0$ soit une équation cartésienne de $\mathscr{D}$.*

Démonstration. Soient $\left(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\right)$ un repère et $\mathscr{D}$ une droite du plan, α et β deux nombres réels tels que $\alpha \neq 0$ ou $\beta \neq 0$, $\vec{d}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ un vecteur directeur de $\mathscr{D}$.

Soient $A\left(x_A\,;y_A\right)$ et $M\left(x\,;y\right)$ deux points de $\mathscr{D}$. Si A et M sont distincts, alors $\overrightarrow{AM}$ dirige $\mathscr{D}$. Sinon, $\overrightarrow{AM}$ est le vecteur nul. Dans les deux cas, les vecteurs $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-x_A\\y-y_A\end{pmatrix}$ et $\vec{d}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}$ sont colinéaires et leur déterminant est nul, d'où :

$$\det\left(\overrightarrow{AM}\,;\vec{d}\right)=0 \iff \beta(x-x_A)-\alpha(y-y_A)=0 \iff \beta x-\alpha y+\alpha y_A-\beta x_A=0.$$

Ainsi les coordonnées de M vérifient l'équation $\beta x-\alpha y+c=0$ en notant $c=\alpha y_A-\beta x_A$. $\square$

Méthodes : Soit $\mathscr{D}$ la droite passant par $A\left(3\,;4\right)$ et de vecteur directeur $\vec{d}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$. Déterminons une équation cartésienne de $\mathscr{D}$ de deux façons différentes.

1. $\vec{d}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de $\mathscr{D}$ donc il existe un réel c tel que $\mathscr{D}$ ait pour équation cartésienne
$$1x-2y+c=0.$$
Or
$$\begin{aligned}A\in\mathscr{D} &\iff x_A-2y_A+c=0\\&\iff 3-2\times4+c=0\\&\iff c=5.\end{aligned}$$
$\mathscr{D}$ a donc pour équation cartésienne $x-2y+5=0$.
2. Soit $M\left(x\,;y\right)$ un point de $\mathscr{D}$. Comme $A\in\mathscr{D}$, $\overrightarrow{AM}$ est un vecteur directeur de $\mathscr{D}$, $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-3\\y-4\end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ sont donc colinéaires et leur déterminant est nul, d'où :
$$\begin{aligned}\det\left(\overrightarrow{AM}\,;\vec{d}\right)=0 &\iff 1(x-3)-2(y-4)=0\\&\iff x-2y+5=0.\end{aligned}$$

Exercices : 7.14 et 7.15 ; 7.31 et 7.32.

7.3 Équation réduite de droite

7.3.1 Équation réduite de droite

Proposition 7.5. ***[Admise]*** *Soient $\left(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\right)$ un repère et $\mathscr{D}$ une droite du plan.*

1. *Si $\mathscr{D}$ est parallèle à l'axe des ordonnées, alors il existe un réel x_0 tel que $\mathscr{D}$ soit l'ensemble des points $M\left(x\,;y\right)$ de même abscisse x_0 : $x=x_0$ est une équation de $\mathscr{D}$.*
2. *Si $\mathscr{D}$ n'est parallèle pas à l'axe des ordonnées, alors il existe deux réels m et p tels que $\mathscr{D}$ soit l'ensemble des points $M\left(x\,;y\right)$ vérifiant l'équation*
$$y=mx+p.$$
   - *Le réel m est appelé* ***coefficient directeur*** *.*
   - *Le réel p est appelé* ***ordonnée à l'origine*** *.*

Exemples :

— $y = 2x + 5$ et $x = -2$ sont des équations réduites de droites.

— $y = x^2$ et $y = x + \sqrt{x}$ ne sont pas des équations réduites de droites.

Méthodes : Soit $\left(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\right)$ un repère du plan, $\mathscr{D}$ une droite d'équation $y = 3x - 1$ et $A\,(5\,;10)$ et $B\,(2\,;5)$ deux points dans ce repère.

1. Déterminons si A et B appartiennent à $\mathscr{D}$, pour cela, il suffit de vérifier si es coordonnées de A et B sont solutions de l'équation réduite.

   (a)

   $$\begin{aligned} A \in \mathscr{D} &\iff y_A = 3x_A - 1 \\ &\iff 10 = 3 \times 5 - 1 \\ &\iff 10 = 14. \end{aligned}$$

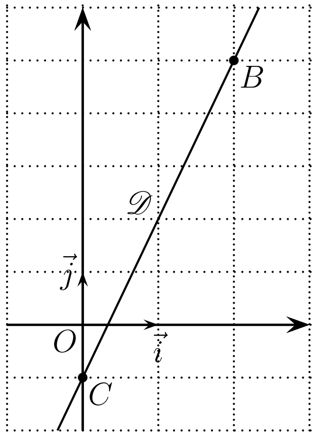
   Donc $A \notin \mathscr{D}$.

   (b)

   $$\begin{aligned} B \in \mathscr{D} &\iff y_B = 3x_B - 1 \\ &\iff 5 = 3 \times 2 - 1 \\ &\iff 5 = 5. \end{aligned}$$

   Donc $B \in \mathscr{D}$.

2. Traçons la droite $\mathscr{D}$ dans le repère ci-dessous.
   On sait que $B \in \mathscr{D}$. Cherchons les coordonnées d'un point C appartenant à $\mathscr{D}$. Le plus simple est de choisir une valeur pour x_C et de calculer y_C à l'aide l'équation réduite. Prenons $x_C = 0$.

   $$\begin{aligned} C \in \mathscr{D} &\iff y_C = 3x_C - 1 \\ &\iff y_C = 3 \times 0 - 1 \\ &\iff y_C = -1. \end{aligned}$$

   Donc $C\,(0\,;-1) \in \mathscr{D}$.

Exercices : 7.16 à 7.20 ; 7.33.

7.3.2 Coefficient directeur et ordonnée à l'origine

Proposition 7.6. *Soient $A\,(x_A\,;y_A)$ et $B\,(x_B\,;y_B)$ deux points d'un repère tels que $x_A \neq x_B$. Alors le coefficient directeur de la droite (AB) est*

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}.$$

Démonstration. Soient $A\,(x_A\,;y_A)$ et $B\,(x_B\,;y_B)$ deux points d'un repère tels que $x_A \neq x_B$. Soit m le coefficient directeur de la droite (AB) et p son ordonnée à l'origine ; (AB) a donc pour équation $y = mx + p$. Comme $A\,(x_A\,;y_A)$ et $B\,(x_B\,;y_B)$, on a

$$y_A = mx_A + p \quad \text{et} \quad y_B = mx_B + p.$$

On a alors

$$y_B - y_A = mx_B + p - (mx_A + p) = m(x_B - x_A).$$

Comme $x_A \neq x_B$, on a $x_B - x_A \neq 0$ et donc $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$. □

Méthodes :

1. On a $A\,(-4\,;-3)$ et $B\,(-4\,;-1)$. Déterminons l'équation réduite de (AB). A et B ont la même abscisse, (AB) est donc parallèle à l'axe des ordonnées et a pour équation réduite $x = -4$.
2. On a $A\,(-4\,;-3)$ et $B\,(5\,;-1)$. Déterminons l'équation réduite de (AB). A et B n'ont pas la même abscisse, (AB) n'est donc pas parallèles à l'axe des ordonnées : il existe deux réels m et p tels que (AB) ait pour équation réduite $y = mx + p$. On a

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-1 - (-3)}{5 - (-4)} = \frac{2}{9}.$$

Il reste à déterminer p. Comme $A \in (AB)$, on a

$$\begin{aligned} y_A = mx_A + p &\iff -3 = \frac{2}{9} \times (-4) + p \\ &\iff -3 = -\frac{8}{9} + p \\ &\iff p = -3 + \frac{8}{9} \\ &\iff p = -\frac{9}{9} + \frac{8}{9} \\ &\iff p = -\frac{1}{9}. \end{aligned}$$

(AB) a donc pour équation réduite $y = \dfrac{2}{9}x - \dfrac{1}{9}$.

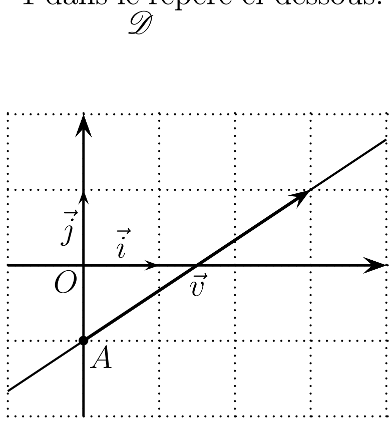
Corollaire 7.1. *Soient $A\,(x_A\,;y_A)$ et $B\,(x_B\,;y_B)$ deux points d'un repère tels que $x_A \neq x_B$. Alors $\vec{d}\begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite (AB).*

Démonstration. Soient $A\,(x_A\,;y_A)$ et $B\,(x_B\,;y_B)$ deux points d'un repère tels que $x_A \neq x_B$. D'après la propriété précédente, $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$. Par ailleurs, $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B - x_A\\y_B - y_A\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (AB). $\vec{d}\begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (AB) si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{d}$ sont colinéaires, si et seulement si leur déterminant est nul.

$$\begin{aligned}
\det\left(\overrightarrow{AB}\,;\vec{d}\right) &= x_{\overrightarrow{AB}}y_{\vec{d}} - x_{\vec{d}}y_{\overrightarrow{AB}}\\
&= (x_B - x_A) \times m - 1 \times (y_B - y_A)\\
&= (x_B - x_A) \times \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} - (y_B - y_A)\\
&= (y_B - y_A) - (y_B - y_A)\\
&= 0.
\end{aligned}$$

On en déduit que $\vec{d}$ est un vecteur directeur de la droite (AB). □

Méthode : Construisons la droite $\mathscr{D}$ d'équation réduite $y = \frac{2}{3}x - 1$ dans le repère ci-dessous.
Cherchons les coordonnées d'un point A appartenant à $\mathscr{D}$.
On choisit une valeur pour x_A et on calcule y_A à l'aide l'équation réduite. Prenons $x_A = 0$.



$$\begin{aligned}
C \in \mathscr{D} &\iff y_A = \frac{2}{3}x_C - 1\\
&\iff y_A = \frac{2}{3} \times 0 - 1\\
&\iff y_A = -1.
\end{aligned}$$

Donc $A\,(0\,;-1) \in \mathscr{D}$.

Par ailleurs, on sait que $\vec{d}\begin{pmatrix}1\\2/3\end{pmatrix}$ est vecteur directeur de $\mathscr{D}$ et donc $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ aussi puisque $\vec{v} = 3\vec{d}$. On peut donc se ramener à la méthode vue pour les équations cartésiennes.

Exercices : 7.21 et 7.22 ; 7.34 et 7.35.

7.3.3 Lecture graphique d'équation réduite

Corollaire 7.2. *Soit $\left(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\right)$ un repère du plan. Si $\vec{d}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur d'une droite $\mathscr{D}$ d'équation réduite $y = mx + p$, alors $m = \frac{\beta}{\alpha}$.*

Démonstration. Soit $\left(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\right)$ un repère du plan. Soit $\vec{d}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}$ un vecteur directeur d'une droite $\mathscr{D}$ d'équation réduite $y = mx + p$. Comme $\vec{d}$ est un vecteur directeur $\mathscr{D}$, il existe A, $B \in \mathscr{D}$ tels que $\vec{d} = \overrightarrow{AB}$. Comme $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B - x_A\\y_B - y_A\end{pmatrix}$ que $\vec{d} = \overrightarrow{AB}$, on en déduit que

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{\beta}{\alpha}.$$

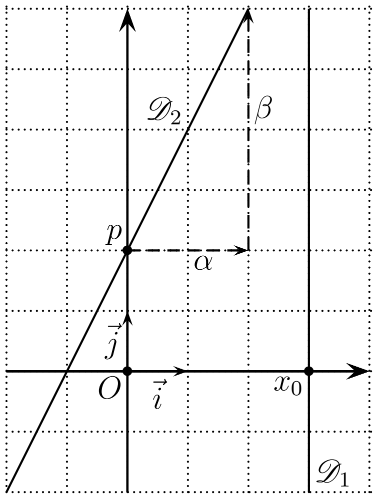
□

Méthodes : On a deux cas.

$\mathscr{D}_1$ **parallèle à l'axe des ordonnées :** On lit l'équation $x = x_0$ en prenant l'abscisse x_0 de n'importe quel point de la droite $\mathscr{D}_1$.

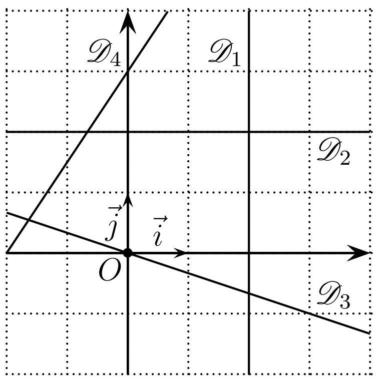
$\mathscr{D}_2$ **non parallèle à l'axe des ordonnées :**

- La droite $\mathscr{D}_2$ passe par le point $(0\,;p)$.
- On obtient m en lisant les coordonnées d'un vecteur directeur $\vec{d}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$ de $\mathscr{D}_2$ et en effectuant la division $m = \dfrac{\beta}{\alpha}$.



Exemples :

Droite	x_0	$x = x_0$	m	p	$y = mx + p$
$\mathscr{D}_1$	2	$x = 2$			
$\mathscr{D}_2$			0	4	$y = 4$
$\mathscr{D}_3$			$\dfrac{1}{3}$	0	$y = \dfrac{1}{3}x$
$\mathscr{D}_4$			$\dfrac{3}{2}$	3	$y = \dfrac{3}{2}x + 3$



Exercices : 7.23 ; 7.36.

7.4 Capacités attendues

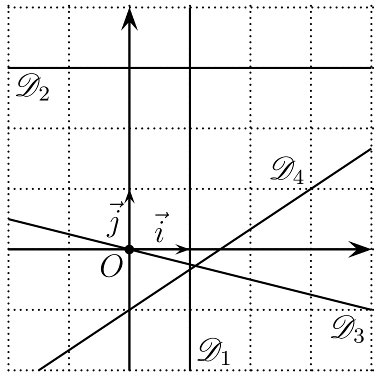
- Déterminer une équation de droite à partir de deux points, un point et un vecteur directeur ou un point et la pente.
- Déterminer la pente ou un vecteur directeur d'une droite donnée par une équation ou une représentation graphique.
- Tracer une droite connaissant son équation cartésienne ou réduite.
- Établir que trois points sont alignés ou non.

7.5 Exercices

7.5.1 Progresser

Droites du plan et vecteur directeur d'une droite

Exercice 7.1. Donner pour chacune des droites suivantes les coordonnées de deux vecteurs directeurs $\vec{d}$ et $\vec{d'}$ dans le repère $\left(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\right)$.



Droite	$\mathscr{D}_1$	$\mathscr{D}_2$	$\mathscr{D}_3$	$\mathscr{D}_4$
$\vec{d}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$				
$\vec{d'}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$				

Exercice 7.2. Dans chaque cas, déterminer si $\vec{u}$ est un vecteur directeur de la droite (AB).

1. $A\,(1\,;0)$ et $B\,(0\,;1)$; $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$.
2. $A\,(2\,;3)$ et $B\,(-3\,;4)$; $\vec{u}\begin{pmatrix}5\\-1\end{pmatrix}$.

Alignement de points

Exercice 7.3. Dans chacun des cas suivants, déterminer si les points A, B et C sont alignés.

1. $A\,(2\,;13)$, $B\,(-2\,;-7)$ et $C\,(11\,;58)$.
2. $A\,(9\,;20)$, $B\,(2\,;-1)$ et $C\,(25\,;71)$.

Exercice 7.4. Dans chacun des cas suivants, déterminer la coordonnée manquante de G pour qu'il appartienne à la droite (EF).

1. $E\,(3\,;-2)$, $F\,(5\,;4)$ et $G\,(x_G\,;-6)$.
2. $E\,(-1\,;0)$, $F\,(4\,;7)$ et $G\,(-2\,;y_G)$.

Exercice 7.5. [Algorithme] Écrire un algorithme ou dessiner un logigramme déterminant si trois points sont alignés connaissant leurs coordonnées.

Exercice 7.6. Dans chacun des cas suivants, déterminer si A, B et C forment un repère du plan.

1. A, B et C ne sont pas alignés.
2. ABC est un triangle équilatéral.
3. $ABDC$ est un carré.
4. A, B et C sont sur une même droite.

Exercice 7.7. On considère les points $A\,(0\,;6)$, $B\,(10\,;4)$, $C\,(0\,;6)$ et $D\,(2\,;0)$.

1. Calculer les coordonnées des points E et F définis par :

$$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{DF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}.$$

2. Montrer que D, E et F sont alignés.

Équations cartésiennes de droite

Exercice 7.8. Parmi les équations suivantes, quelles sont celles qui peuvent être des équations cartésiennes de droites ? Justifier.

1. $-4x+3y-2=0$.
2. $-3(1+x)+y=0$.
3. $xy=5$.
4. $\dfrac{1}{x}-y+5=0$
5. $\sqrt{x+y-3}=0$.

Exercice 7.9. Dans chaque cas, statuer – en justifiant – de l'appartenance du point A à la droite $\mathscr{D}$.

1. $\mathscr{D}\ :\ x+4y-20=0$ et $A\,(-4\,;9)$.
2. $\mathscr{D}\ :\ -\dfrac{2}{3}x+2y-\dfrac{2}{3}=0$ et $A\left(1\,;\dfrac{2}{3}\right)$.

Exercice 7.10. Dans chaque cas, calculer la coordonnée manquante du point A pour qu'il appartienne à la droite d'équation donnée.

1. $A\,(-5\,;y_A)$ et $\mathscr{D}:3x-2y+1=0$.
2. $A\left(x_A\,;\dfrac{1}{2}\right)$ et $\mathscr{D}:7x+y-1=0$.

De l'équation cartésienne au vecteur directeur

Exercice 7.11. Déterminer deux vecteurs directeurs des droites d'équations ci-dessous.

1. $3x+y-1=0$.
2. $-2x+7y+3=0$.
3. $x-4y=0$.
4. $9y+7=0$.

Exercice 7.12. Dans chaque cas, tracer dans un repère la droite $\mathscr{D}$ passant par le point A de vecteur directeur $\vec{d}$.

1. $A_1\,(3\,;1)$ et $\vec{d_1}\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$.
2. $A_2\,(-2\,;0)$ et $\vec{d_2}\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}$.
3. $A_3\,(5\,;-1)$ et $\vec{d_3}\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$.
4. $A_4\,(-1\,;1)$ et $\vec{d_4}\begin{pmatrix}-3\\0\end{pmatrix}$.

Exercice 7.13. Dans chaque cas, déterminer si le vecteur $\vec{v}$ est un vecteur directeur de la droite $\mathscr{D}$.

1. $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ et $\mathscr{D}:-3y+1=0$.
2. $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\2/5\end{pmatrix}$ et $\mathscr{D}:-2x+5y+2=0$.

Du vecteur directeur à l'équation cartésienne

Exercice 7.14. Dans chaque cas, donner une équation cartésienne de la droite $\mathscr{D}$ passant par le point A de vecteur directeur $\vec{d}$.

1. $A\,(3\,;1)$ et $\vec{d}\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$.
2. $A\,(5\,;-1)$ et $\vec{d}\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$.

Exercice 7.15. Déterminer les équations cartésiennes des droites de l'exercice 7.1.

Équations réduites de droites

Exercice 7.16. Parmi les équations suivantes, quelles sont celles qui sont des équations réduites de droites ? Justifier.

1. $y = -4x + 2$.
2. $x = 4$.
3. $y = 2\sqrt{x} + 1$.
4. $y = x^2$.
5. $y = \sqrt{2}x + 1$
6. $x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Exercice 7.17. Dans chaque cas, statuer – en justifiant – de l'appartenance du point A à la droite $\mathscr{D}$.

1. $\mathscr{D}\ :\ y = 3x - 1$ et $A\,(2\,;9)$.
2. $\mathscr{D}\ :\ y = -4x - 2$ et $A\,(1\,;-6)$.
3. $\mathscr{D}\ :\ x = -1$ et $A\,(-1\,;5)$.
4. $\mathscr{D}\ :\ x = 7$ et $A\,(0\,;3)$.

Exercice 7.18. Tracer la droite $\mathscr{D}$ dans un repère dans chacun des cas suivants à l'aide de deux points de $\mathscr{D}$.

1. $\mathscr{D} : y = \dfrac{1}{4}x + \dfrac{1}{2}$;
2. $\mathscr{D} : y = \dfrac{5}{7}x - \dfrac{1}{7}$.

Exercice 7.19. Dans chaque cas, calculer la coordonnée manquante du point A pour qu'il appartienne à la droite d'équation donnée.

1. $A\,(-5\,;y_A)$ et $\mathscr{D} : y = 7x$.
2. $A\left(x_A\,;\dfrac{1}{2}\right)$ et $\mathscr{D} : y = \dfrac{1}{2}x + 1$.
3. $A\,(x_A\,;-1)$ et $\mathscr{D} : x = 8$.
4. $A\,(1\,;y_A)$ et $\mathscr{D} : x = \dfrac{1}{2}$.

Exercice 7.20. Donner l'équation réduite des droites d'équations cartésiennes ci-dessous.

1. $-2x + 3y + 1 = 0$.
2. $7x + 5y - 2 = 0$.
3. $\dfrac{5}{2}x + \dfrac{1}{4}y = 0$.

Coefficient directeur et ordonnée à l'origine

Exercice 7.21. Dans chacun des cas suivants, déterminer l'équation réduite de (AB).

1. $A\,(1\,;2)$ et $B\,(3\,;4)$.
2. $A\,(0\,;0)$ et $B\,(-4\,;-2)$.
3. $A\,(1\,;2)$ et $B\,(1\,;4)$.
4. $A\,(-3\,;-1)$ et $B\,(-3\,;9)$.
5. $A\left(-\sqrt{3}\,;-2\sqrt{2}\right)$ et $B\left(2\sqrt{2}\,;\sqrt{3}\right)$.
6. $A\left(\dfrac{2}{3}\,;-\dfrac{1}{2}\right)$ et $B\left(-\dfrac{1}{3}\,;\dfrac{3}{2}\right)$.

Exercice 7.22. Tracer la droite $\mathscr{D}$ dans un repère dans chacun des cas suivants à l'aide d'un point et d'un vecteur directeur de $\mathscr{D}$.

1. $\mathscr{D} : y = \dfrac{1}{3}x + 1$;
2. $\mathscr{D} : y = \dfrac{3}{2}x - 2$.

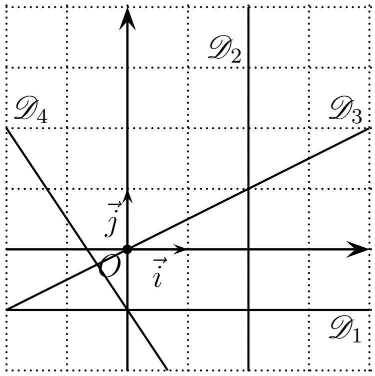
Lecture graphique d'équation réduite

Exercice 7.23. Déterminer les équations réduites de l'exercice 7.1.

7.5.2 S'entraîner

Droites du plan et vecteur directeur d'une droite

Exercice 7.24. Donner pour chacune des droites suivantes les coordonnées de deux vecteurs directeurs $\vec{d}$ et $\vec{d'}$ dans le repère $\left(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\right)$.



Droite	$\mathscr{D}_1$	$\mathscr{D}_2$	$\mathscr{D}_3$	$\mathscr{D}_4$
$\vec{d}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$				
$\vec{d'}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$				

Exercice 7.25. Dans chaque cas, déterminer si $\vec{u}$ est un vecteur directeur de la droite (AB).

1. $A\,(-2\,;5)$ et $B\,(6\,;9)$; $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}$.
2. $A\,(0\,;-4)$ et $B\,(10\,;-9)$; $\vec{u}\begin{pmatrix}-5\\-3\end{pmatrix}$.

Alignement de points

Exercice 7.26. Dans chacun des cas suivants, déterminer la coordonnée manquante G pour qu'il appartienne à la droite (EF).

1. $E\,(8\,;-2)$, $F\,(1\,;4)$ et $G\,(x_G\,;0)$.
2. $E\,(-1\,;5)$, $F\,(6\,;7)$ et $G\,(0\,;y_G)$.

Équations cartésiennes de droite

Exercice 7.27. Dans chaque cas, calculer la coordonnée manquante du point A pour qu'il appartienne à la droite d'équation donnée.

1. $A\,(x_A\,;-5)$ et $\mathscr{D} : 3x - 2y + 1 = 0$.
2. $A\left(\dfrac{1}{2}\,;y_A\right)$ et $\mathscr{D} : 7x + y - 1 = 0$.

De l'équation cartésienne au vecteur directeur

Exercice 7.28. Déterminer deux vecteurs directeurs des droites d'équations ci-dessous.

1. $-x - y - 1 = 0$.
2. $-4x + 6y + 3 = 0$.
3. $x - y = 0$.
4. $9x + 7 = 0$.

Exercice 7.29. Dans chaque cas, tracer la droite $\mathscr{D}$ passant par le point A de vecteur directeur $\vec{d}$.

1. $A_1\,(3\,;1)$ et $\vec{d_1}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$.
2. $A_2\,(-2\,;0)$ et $\vec{d_2}\begin{pmatrix}-4\\2\end{pmatrix}$.

Exercice 7.30. Dans chaque cas, déterminer si le vecteur $\vec{v}$ est un vecteur directeur de la droite $\mathscr{D}$.

1. $\vec{v}\begin{pmatrix}8\\12\end{pmatrix}$ et $\mathscr{D} : 3x - 2y + 1 = 0$.
2. $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\1/7\end{pmatrix}$ et $\mathscr{D} : 7x + y - 1 = 0$.

Du vecteur directeur à l'équation cartésienne

Exercice 7.31. Dans chaque cas, donner une équation cartésienne de la droite $\mathscr{D}$ passant par le point A de vecteur directeur $\vec{d}$.

1. $A\,(-2\,;0)$ et $\vec{d}\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}$.
2. $A\,(-1\,;1)$ et $\vec{d}\begin{pmatrix}-3\\0\end{pmatrix}$.

Exercice 7.32. Déterminer les équations cartésiennes des droites de l'exercice **??**.

Équations réduites de droites

Exercice 7.33. Dans chaque cas, calculer la coordonnée manquante du point A pour qu'il appartienne à la droite d'équation donnée.

1. $A\,(-5\,;y_A)$ et $\mathscr{D} : y = -x + 4$.
2. $A\left(x_A\,;\dfrac{1}{2}\right)$ et $\mathscr{D} : y = \dfrac{1}{4}x - 2$.
3. $A\,(x_A\,;-1)$ et $\mathscr{D} : x = -5$.
4. $A\left(\dfrac{1}{2}\,;y_A\right)$ et $\mathscr{D} : x = \dfrac{1}{2}$.

Coefficient directeur et ordonnée à l'origine

Exercice 7.34. Dans chacun des cas suivants, déterminer l'équation réduite de (AB).

1. $A\,(5\,;4)$ et $B\,(0\,;-2)$.
2. $A\,(-2\,;1)$ et $B\,(-2\,;0)$.
3. $A\left(-\sqrt{5}\,;-2\sqrt{7}\right)$ et $B\left(2\sqrt{7}\,;\sqrt{5}\right)$.
4. $A\left(\dfrac{2}{5}\,;-\dfrac{1}{5}\right)$ et $B\left(-\dfrac{1}{5}\,;\dfrac{3}{2}\right)$.

Exercice 7.35. Tracer la droite $\mathscr{D}$ dans un repère dans chacun des cas suivants à l'aide d'un point et d'un vecteur directeur de $\mathscr{D}$.

1. $\mathscr{D} : y = -3x + 4$;
2. $\mathscr{D} : y = 0,25x$.

Lecture graphique d'équation réduite

Exercice 7.36. Déterminer les équations réduites de l'exercice 7.24.

7.5.3 Le Flashback !

Flashback 7.1. Résoudre les équations suivantes :

1. $(4t + 5)(6 - t) = 0$;
2. $\dfrac{(2u-1)u}{u^2+1} = 0$;

Flashback 7.2. Résoudre les inéquations suivantes :

1. $\frac{1}{2}z + 1 < 1 - \frac{1}{4}z$;
2. $s(s+7)(9s-2) < 0$;
3. $k(k^2 + 2k + 1) \leqslant 0$;
4. $(4 - t^2)(t^2 - 36) < 0$;
5. $(y+2)^2 - 25 \geqslant 0$;
6. $t^2 - 6t + 9 \leqslant 0$;
7. $\frac{z}{z^2+1} < 0$;
8. $\frac{(3z+12)(1-6z)}{z^2+1} \geqslant 0.$

Flashback 7.3. Résoudre le système $\begin{cases} 3x + 5y = 9, \\ 9x - 7y = -1. \end{cases}$