Chapitre 14

Arithmétique

14.1 Diviseurs et multiples

Définition 14.1. *Soient a, $b \in \mathbb{Z}$. On dit que a **divise** b si et seulement si il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $b = ka$. On dit aussi dans ce cas que b est un **multiple** de a ; a est un **diviseur** de b ; b est **divisible** par a.*

Exemples :

1. 3 est un diviseur de 27 : $27 = 3 \times 9$;
2. 36 est multiple de 9 : $36 = 4 \times 9$.

Méthode : Soit $n \in \mathbb{N}$. Démontrons que $5n + 35$ est un multiple de 5. On a

$$5n + 35 = 5 \times n + 5 \times 7 = 5(n + 7).$$

Donc $5n + 35$ est divisible par 5.

Proposition 14.1. *Soient a, $b \in \mathbb{Z}$.*

1. *Si a divise b, alors $-a$ aussi.*
2. *Si a est un diviseur de b, alors tout diviseur de a est aussi un diviseur de b.*

Exemples :

1. 4 divise 12 donc -4 aussi : $12 = (-4) \times (-3)$.
2. 6 divise 42, 3 divise 6 donc 3 divise 42 : $42 = 3 \times 14$.

Démonstration. Soient a, $b \in \mathbb{Z}$, avec a diviseur de b, il existe donc $k \in \mathbb{Z}$ tel que $b = ka$.

1. On a
$$b = ka = (-k) \times (-a) = K \times (-a).$$
avec $K = -k \in \mathbb{Z}$.

2. Soit c un diviseur de a, montrons que c divise aussi b. Par définition, il existe $k' \in \mathbb{Z}$ tel que $a = k' \times c$. Ainsi

$$b = k \times a = k \times k' \times c = K \times c,$$

avec $K = k \times k' \in \mathbb{Z}$.. Donc c divise b.

□

Proposition 14.2. *Soient a, b, $c \in \mathbb{Z}$ tels que a et b soient des multiples de c. Alors $a + b$ est un multiple de c .*

Exemple : 121 et 99 sont deux multiples de 11 ($121 = 11^2$ et $99 = 9 \times 11$), donc $121 + 99 = 220$ est aussi un multiple de 11 .

Démonstration. Soient a, b, $c \in \mathbb{Z}$ tels que a et b soient des multiples de c. Ils existent donc k, $k' \in \mathbb{Z}$ tels que $a = k \times c$ et $b = k' \times c$. On a donc

$$a + b = k \times c + k' \times c = (k + k') \times c = K \times c,$$

avec $K = k + k'$. Donc $a + b = K \times c$, i.e. $a + b$ est un multiple de c . □

Exercice : 14.1 à 14.8 ; 14.17 à 14.19.

14.2 Nombres pairs et impairs

Définition 14.2. *Soit $a \in \mathbb{Z}$.*

— *a est **pair** s'il est divisible par 2 : il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a = 2k$.*

— *a est **impair** s'il n'est pas divisible par 2 : il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a = 2k + 1$.*

Exemples :

Nombres pairs : 0, 2, 4, 6...

Nombres impairs : 1, 3, 5, 7...

Remarques :

— Un entier est soit pair, soit impair.

— Si l'on prend deux entiers consécutifs, l'un d'eux est pair et l'autre impair.

Proposition 14.3.

1. *Le produit de deux nombres pairs est pair ; de deux nombres impairs est impair .*
2. *En particulier, le carré d'un nombre pair est pair et le carré d'un nombre impair est impair .*
3. *Le produit d'un nombre pair et d'un nombre quelconque est pair .*
4. *La somme de deux nombres de même parité est paire .*

Démonstration.

1. **Deux nombres pairs :** Soient a et b deux nombres pairs, ils existent k, $k' \in \mathbb{Z}$ tels que $a = 2k$ et $b = 2k'$. On a donc

$$ab = 2k \times 2k' = 4kk' = 2(2kk) = 2K,$$

avec $K = 2kk' \in \mathbb{Z}$. Donc ab est pair .

Deux nombres impairs : Soient a et b deux nombres impairs, ils existent k, $k' \in \mathbb{Z}$ tels que $a = 2k + 1$ et $b = 2k' + 1$. On a donc

$$ab = (2k + 1)(2k' + 1) = 4kk' + 2k + 2k' + 1 = 2(2kk' + k + k') + 1 = 2K + 1,$$

avec $K = 2kk' + k + k' \in \mathbb{Z}$. Donc ab est impair .

2. Cas particulier de *1.* où les deux nombres sont égaux.
3. Soit a un nombre pair et $b \in \mathbb{Z}$ quelconque. Il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a = 2k$. On a

$$ab = 2kb = 2K \quad \text{avec} \quad K = bk.$$

Donc ab est pair .

4. Exercice.

□

Méthode : Démontrons que le produit de deux entiers consécutifs est pair. Soit $n \in \mathbb{N}$, n et $n + 1$ sont deux entiers consécutifs, l'un d'eux est pair ; supposons que n est pair. Il existe donc $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2k$. On a alors

$$n \times (n + 1) = 2k(n + 1) = 2K \quad \text{avec} \quad K = k(n + 1).$$

$n(n + 1)$ est donc pair, cqfd.

Exercice : 14.9 à 14.12 ; 14.20.

14.3 Nombres premiers

Définition 14.3. *Un entier naturel est* ***premier*** *s'il possède exactement deux diviseurs distincts : 1 et lui-même.*

Exemples : 2, 3, 5, 7 , 11 et 13 sont des nombres premiers .

Proposition 14.4. *Aucun nombre pair n'est premier à l'exception de 2.*

Démonstration. Exercice. □

Proposition 14.5. ***[Admise]*** *Tout nombre entier est soit premier soit décomposable en produit de facteurs premiers.*

Exemple : 150 n'est pas premier puisqu'il est divisible par 2. Il se décompose en

$$150 = 10 \times 15 = 2 \times 5 \times 3 \times 5 = 2 \times 3 \times 5^2.$$

Méthode : La décomposition en produit de facteurs premiers permet d'écrire des fractions sous **forme irréductible**. Mettons sous forme irréductible $\frac{1020}{150}$. On sait déjà que $150 = 2 \times 3 \times 5^2$; on a de plus

$$1020 = 10 \times 102 = 2 \times 5 \times 2 \times 3 \times 17 = 2^2 \times 3 \times 5 \times 17.$$

On a donc

$$\frac{1020}{150} = \frac{2^2 \times 3 \times 5 \times 17}{2 \times 3 \times 5^2} = \frac{2 \times 17}{5} = \frac{34}{5}.$$

Application : Démontrons par l'absurde que $\frac{1}{3}$ n'est pas décimal. Supposons que $\frac{1}{3}$ est décimal, donc qu'ils existent $a \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$ tels que $\frac{1}{3} = \frac{a}{10^n}$. On en déduit que $10^n = 3a$, donc que 3 divise 10^n. Or $10^n = (2 \times 5)^n = 2^n \times 5^n$ avec 2 et 5 qui sont premiers. 3, qui est premier, n'apparaît pas dans cette décomposition en produit de facteurs premiers, il ne peut donc pas diviser 10^n. On a une absurdité, on en conclut que $\frac{1}{3}$ n'est pas décimal.

Application : Démontrons par l'absurde que $\sqrt{2}$ est irrationnel. Supposons que $\sqrt{2}$ est rationnel : ils existent $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{Z}^*$ tels que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$. On peut supposer que la fraction $\frac{p}{q}$ est irréductible ; sinon, on pourrait la réduire jusqu'à ce qu'elle le devienne. On a alors

$$\begin{aligned} \sqrt{2} = \frac{p}{q} &\implies \sqrt{2}^2 = \left(\frac{p}{q}\right)^2 \\ &\implies 2 = \frac{p^2}{q^2} \\ &\implies 2q^2 = p^2. \end{aligned}$$

On en déduit que p^2 est pair et donc que p est pair (sinon p^2 serait impair). Donc il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $p = 2k$. D'où

$$2q^2 = (2k)^2 \iff 2q^2 = 4k^2 \iff q^2 = 2k^2.$$

Comme pour p, on en déduit que q est pair. p et q étant pairs tous les deux, on peut simplifier la fraction $\frac{p}{q}$ par 2 ; elle n'est donc pas irréductible, ce qui est absurde car contraire à l'hypothèse initiale. $\sqrt{2}$ n'est donc pas rationnel.

Exercice : 14.13 à 14.16 ; 14.21 et 14.22.

14.4 Capacités attendues

— Modéliser et résoudre des problèmes mobilisant les notions de multiple, de diviseur, de nombre pair, de nombre impair, de nombre premier.
— Présenter les résultats fractionnaires sous forme irréductible.

14.5 Exercices

14.5.1 Progresser

Diviseurs et multiples

Exercice 14.1.
1. Donner tous les diviseurs de 18.
2. Donner tous les diviseurs de 20.
3. Donner tous les multiples de 20 jusqu'à 100.
4. Donner tous les multiples de 18 jusqu'à 100.

Exercice 14.2. Sachant que 144 et 168 sont deux multiples de 12, donner trois autres multiples de 12.

Exercice 14.3. Soit $n \in \mathbb{N}$, montrer que les nombres suivants sont des multiples de 3.

1. $A = 12n + 18$.
2. $B = (15n + 6) - (6n + 21)$.
3. $C = (3n + 6)(6n - 1)$.
4. $D = n(n + 1)(n + 2)$.

Exercice 14.4.
1. Donner deux multiples de 11 plus grand que 100.
2. À partir des ces deux multiples, donner trois autres multiples de 11.

Exercice 14.5. Soit $n \in \mathbb{N}$.
1. Développer $(2n + 3)(5n + 1)$.
2. En déduire que $2n + 3$ et $5n + 1$ sont des diviseurs de $10n^2 + 17n + 3$.

Exercice 14.6. Soit $n \in \mathbb{N}$.
1. Démontrer que $28n + 42$ est un multiple de 7.
2. En déduire que $(28n + 42)^2$ est un multiple de 7.
3. Démontrer que $(28n + 42)^2 - 5(28n + 42) + 56$ est un multiple de 7.

Exercice 14.7. [Algorithme]
1. (a) Quel est le reste de la division euclidienne de 16 par 5 ?
   (b) Quel est le reste de la division euclidienne de 15 par 5 ?
   (c) En déduire un critère pour déterminer si un nombre m est multiple d'un nombre d.
2. Écrire un algorithme déterminant si un nombre m est multiple d'un nombre d.

Exercice 14.8. [Algorithme] Écrire un algorithme déterminant le plus grand multiple de a inférieur à b où a et b sont deux entiers naturels.

Nombres pairs et impairs

Exercice 14.9.

1. Donner tous les entiers pairs entre 0 et 10 compris.
2. Donner tous les entiers impairs entre 10 et 20.
3. Donner tous les entiers pairs entre 55 et 66 compris.

Exercice 14.10. Sans effectuer les calculs suivants, dire si les résultats seront pairs ou impairs, justifier.

1. $151 + 903$;
2. $337 + 804$;
3. $730 + 438$;
4. 422×591 ;
5. 527×839 ;
6. 977×192 ;
7. $1094 \times 5049 + 9308$;
8. $7308 \times 2103 + 4209$.

Exercice 14.11. [Démonstration] Démontrer que le carré d'un nombre pair est pair, impair est impair, sans utiliser la propriété du cours.

Exercice 14.12. [Démonstration]

1. Démontrer que la somme de deux entiers pairs est paire.
2. Démontrer que la somme de deux entiers impairs est paire.

Nombres premiers

Exercice 14.13. Donner tous les nombres premiers compris entre 10 et 30.

Exercice 14.14. Donner les décompositions en produit de facteurs premiers de : 63, 71, 94, 144.

Exercice 14.15. Écrire sous forme de fraction irréductible les fractions suivantes.

1. $\dfrac{45}{72}$.
2. $\dfrac{33}{84}$.
3. $\dfrac{147}{28}$.
4. $\dfrac{990}{1430}$.

Exercice 14.16. La conjecture de Goldbach affirme que « tout nombre pair supérieur ou égal à 4 est la somme de deux nombres premiers ».

1. Vérifier cette conjecture pour tous les nombres pairs de $[10\,;20]$.
2. Trouver tous les nombres premiers p_1 et p_2 tels que $100 = p_1 + p_2$.

14.5.2 S'entraîner

Diviseurs et multiples

Exercice 14.17. Donner tous les diviseurs de 28, 52, 69, 96.

Exercice 14.18. Sachant que 169 et 195 sont deux multiples de 13, donner trois autres multiples de 13.

Exercice 14.19. Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que $42n + 36$ est un multiple de 6.
2. Montrer que $121n + 99$ est un multiple de 11.
3. Montrer que $(28n + 82) - (14n + 42)$ est un multiple de 14.
4. Montrer que $(81n + 27)(50n + 45)$ est un multiple de 9.

Nombres pairs et impairs

Exercice 14.20. Sans effectuer les calculs suivants, dire si les résultats seront pairs ou impairs, justifier.

1. $115 + 309$;
2. $373 + 408$;
3. $936 + 452$;
4. 242×951 ;
5. 257×389 ;
6. 798×921 ;
7. $9104 \times 4095 + 3903$;
8. $8037 \times 3210 + 9406$.

Nombres premiers

Exercice 14.21. Donner les décompositions en produit de facteurs premiers de : 58, 84, 95, 195.

Exercice 14.22. Écrire sous forme de fraction irréductible les fractions suivantes.

1. $\dfrac{72}{45}$.
2. $\dfrac{96}{15}$.
3. $\dfrac{150}{195}$.
4. $\dfrac{63}{42}$.
5. $\dfrac{121}{56}$.
6. $\dfrac{51}{85}$.

14.5.3 Le Flashback !

Flashback 14.1. Donner un encadrement de $-\dfrac{1}{2}(x+1)^3$ sur $[-1\,;3]$.

Flashback 14.2. Déterminer les variations de la fonction f définie par $f(x) = -\dfrac{1}{2}(x+2)^2 + 4$ sur $[-2\,;\infty[$.

Flashback 14.3. Déterminer les positions relatives des courbes des fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2$ et $g(x) = 4x^3$.