Nom : **Prénom :** **T$^{\text{le}}$:**

Spécialité mathématiques

Limites de suites

Sujet 1 22/11/2025

Note : / 15 Durée : 1 h

— La calculatrice n'est pas autorisée.
— Le sujet est à rendre avec la copie.

Exercice 1 [/ 8]

Déterminer, en justifiant, les limites des suites suivantes.

1. [/ 2] $u_n = \dfrac{2n^3 - 3n^2 + 1}{3n^3 - 6n}$.

Solution: On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{2n^3 - 3n^2 + 1}{3n^3 - 6n} = \frac{n^3\left(2 - \frac{3}{n} + \frac{1}{n^3}\right)}{n^3\left(3 - \frac{6}{n^2}\right)} = \frac{2 - \frac{3}{n} + \frac{1}{n^3}}{3 - \frac{6}{n^2}}.$$

Par ailleurs, $\lim\limits_{n\to+\infty} 2 - \dfrac{3}{n} + \dfrac{1}{n^3} = 2$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 3 - \dfrac{6}{n^2} = 3$, donc, par produit et quotient,

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{2}{3}.$$

2. [/ 2] $v_n = \dfrac{2 - \cos(n)}{n+1}$.

Solution: On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} & -1 \leqslant \cos(n) \leqslant 1 \\ \Longrightarrow\ & 1 \geqslant -\cos(n) \geqslant -1 \\ \Longrightarrow\ & 3 \geqslant 2 - \cos(n) \geqslant 1 \\ \Longrightarrow\ & \frac{3}{n+1} \geqslant \frac{2-\cos(n)}{n+1} \geqslant \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0$, par théorème des gendarmes, on en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = 0.$$

3. **[/ 2]** $w_n = \sqrt{n} - 2\sin(n)$.

Solution: On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} & -1 \leqslant \sin(n) \leqslant 1 \\ \Longrightarrow\ & -2 \leqslant \sin(n) \leqslant 2 \\ \Longrightarrow\ & \sqrt{n} - 2 \leqslant \sqrt{n} - 2\sin(n) \leqslant \sqrt{n} + 2 \end{aligned}$$

Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{n} - 2 = +\infty$, par théorème de comparaison, on en déduit que

$$\lim_{n \to +\infty} w_n = +\infty.$$

4. **[/ 1]** $x_n = \left(\frac{3}{5}\right)^n$.

Solution: Comme $-1 < \frac{3}{5} < 1$, on a

$$\lim_{n \to +\infty} y_n = 0.$$

5. **[/ 1]** $y_n = 2\left(-\frac{5}{3}\right)^n$.

Solution: Comme $\frac{5}{3} < -1$, on a (y_n) n'a pas de limite.

Exercice 2 [/ 7]

Kang et Kodos souhaiteraient envahir Springfield afin de soumettre sa population. Afin d'éviter les révoltes, ils font subir un lavage de cerveau aux habitants dans leur sommeil. Pour savoir combien de temps va leur prendre leur conquête, ils modélisent la proportion d'habitants échappant à leur influence jour après jour à l'aide de la suite (t_n) où est n est le nombre de jours de lavage de cerveau. Le premier jour, ils endoctrinent 10% des habitants, on a donc $t_1 = 0,9$. À partir de là, ils estiment que la suite (t_n) est modélisée par $t_{n+1} = t_n - 0,1(t_n)^2$.

1. **[/ 1]** Étudier les variations de la fonction f définie sur $[0\,;1]$ par $f(x) = x - 0,1x^2$.

Solution: f est un polynôme du second degré. On a

$$\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{1}{-0,2} = 5 \quad \text{et} \quad \beta = f(\alpha) = 2,5.$$

Comme $a = -0,1 < 0$, on a le tableau de variations :

x	$-\infty$	5	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$ ↗	2.5	↘ $-\infty$

On en déduit que f est croissante sur $[0\,;1] \subset]-\infty\,;5]$.

2. [/ 3] Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant t_{n+1} \leqslant t_n \leqslant 1$.

Solution: On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la propriété $P_n : 0 \leqslant t_{n+1} \leqslant t_n \leqslant 1$.

Initialisation : pour $n = 1$, on a $t_1 = 0,9$, P_1 est donc vérifiée.
Hérédité : soit $k \in \mathbb{N}^*$ fixé.

Hypothèse de récurrence : On suppose P_k vraie : $0 \leqslant t_{k+1} \leqslant t_k \leqslant 1$.
Objectif : Montrons P_{k+1} vraie : $0 \leqslant t_{k+2} \leqslant t_{k+1} \leqslant 1$.

Par hypothèse de récurrence, on a

$$\begin{aligned} & 0 \leqslant t_{k+1} \leqslant t_k \leqslant 1 \\ \Longrightarrow\ & f(0) \leqslant f(t_{k+1}) \leqslant f(t_k) \leqslant f(1) \quad (f \text{ croissante sur } [0\,;1]\text{, inégalités convervées}) \\ \Longrightarrow\ & 0 \leqslant t_{k+2} \leqslant t_{k+1} \leqslant 0,9 \quad (t_{n+1} = f(t_n)) \\ \Longrightarrow\ & 0 \leqslant t_{k+2} \leqslant t_{k+1} \leqslant 0,9 \leqslant 1. \end{aligned}$$

Donc $P_k \implies P_{k+1}$.
Conclusion : par principe de récurrence, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant t_{n+1} \leqslant t_n \leqslant 1$.

3. [/ 2] Montrer que (t_n) est convergente et déterminer sa limite.

Solution: D'après la question précédente, (t_n) est décroissante : $t_{n+1} \leqslant t_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$; et minorée : $0 \leqslant t_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Par théorème de convergence monotone, (t_n) converge vers une limite ℓ.
On a $t_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ et $t_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$, donc par passage à la limite dans l'expression $t_{n+1} = t_n - 0,1(t_n)^2$, on obtient

$$\begin{aligned} & \ell = \ell - 0,1\ell^2 \\ \Longleftrightarrow\ & 0 = -0,1\ell^2 \\ \Longleftrightarrow\ & \ell = 0. \end{aligned}$$

On a donc $t_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

4. [/ 1] Kang et Kodos, estiment qu'il faut que moins de $0,1\%$ de la population échappe à leur contrôle mental pour dominer Springfield. Compléter, sur la copie, l'algorithme ci-dessous leur permettant de savoir au bout de combien de jours ils auront le contrôle de la ville.

Algorithme 1 : Contrôle de Springfield

```
n ← 1
t ← 0,9
Tant que t ⩾ 0,001 :
    n ← n + 1
    t ← t − 0,1t²
Renvoyer : n
```

Non noté : Si vous avez fini l'évaluation, vous pouvez colorier Tiplouf.