Chapitre 4

Équations et inéquations

4.1 Inégalités

Proposition 4.1. *Soient A, A', B, B' quatre réels et λ un réel non nul.*

1. *Si l'on additionne ou l'on soustrait le même nombre aux deux membres d'une inégalité, on obtient une inégalité équivalente :*

$$A < B \iff A + A' < B + A'.$$

2. *Si on a deux inégalités, on peut les sommer membre à membre à conditions qu'elles soient dans le même sens :*

$$A < B \quad \text{et} \quad A' < B' \implies A + A' < B + B'.$$

3. *Lorsque l'on multiplie (ou divise) par un réel positif non nulles deux membres d'une inégalité, on obtient une inégalité équivalente de même sens ; sinon le sens de l'inégalité est changé :*

$$\lambda > 0 : \quad A < B \iff \lambda \times A < \lambda \times B;$$
$$\lambda < 0 : \quad A < B \iff \lambda \times A > \lambda \times B.$$

4. *Si on a deux inégalités dont toutes les quantités soient positives, on peut les multiplier membre à membre à conditions qu'elles soient dans le même sens :*

$$0 < A < B \quad \text{et} \quad 0 < A' < B' \implies A \times A' < B \times B'.$$

Remarques :

— Il n'est pas possible de sommer ou multiplier membre à membre des inégalités de sens différents.

— On ne peut pas soustraire membre à membre des inégalités . Par exemple, on a $2 < 3$ et $2 < 5$ mais

$$2 - 2 < 3 - 5 \iff 0 < -2$$

est une inégalité fausse.

— On ne peut pas diviser membre à membre des inégalités . Par exemple, on a $1 < 5$ et $1 < 10$ mais

$$\frac{1}{1} < \frac{5}{10} \iff 1 < 0,5$$

est une inégalité fausse.

— Dans le cas où une inégalité comporte deux nombres négatifs, on ne peut pas multiplier membre à membre par une autre inégalité. Par exemple, on a $-2 < -1$ et $1 < 10$ mais

$$-2 \times 1 < -1 \times 10 \iff -2 < -10$$

est une inégalité fausse.

— Une condition plus générale pour la multiplication membre à membre d'inégalités est : si $A < B$, $0 < B$ et $0 < A' < B'$ alors $A \times A' < B \times B'$.

Exemples :

1. $x < 2 \iff x + 1 < 2 + 1 \iff x + 1 < 3$.
2. $x < 1$ et $-y < -1 \implies x - y < 1 - 1 \iff x - y < 0$.
3. (a) $x < 0 \implies 2 \times x < 2 \times 0 \iff 2x < 0$.
   (b) $x < 0 \implies -2 \times x > -2 \times 0 \iff -2x > 0$.
4. $2 < x$ et $3 < y \implies 2 \times 3 < x \times y \iff 6 < xy$.

Proposition 4.2. *Soient A et B deux réels.*

1. $A \geqslant B \iff A - B \geqslant 0$ et $A \leqslant B \iff A - B \leqslant 0$.

2. Si $A \geqslant 0$ et $B > 0$, alors : $A \geqslant B \iff \dfrac{A}{B} \geqslant 1$ et $A \leqslant B \iff \dfrac{A}{B} \leqslant 1$.

Remarque : le *2.* de la propriété est faux si A et B ne sont pas tous les deux positifs. Par exemple, avec $A = -2$ et $B = -1$, on a bien $\dfrac{A}{B} = \dfrac{-2}{-1} = 2 \geqslant 1$. Pourtant, $A \leqslant B$.

Exemple : Déterminer quel réel est le plus grand entre $\dfrac{6}{7}$ et $\dfrac{7}{8}$ deux façons différentes.

1. Utilisons la comparaison par soustraction. On a

$$\frac{6}{7} - \frac{7}{8} = \frac{6 \times 8}{7 \times 8} - \frac{7 \times 7}{8 \times 7} = \frac{48}{56} - \frac{49}{56} = -\frac{1}{49} < 0.$$

Donc $\dfrac{6}{7} < \dfrac{7}{8}$.

2. Comme $\frac{6}{7}$ et $\frac{7}{8}$ sont strictement positifs, on peut utiliser la comparaison par quotient :

$$\frac{\frac{6}{7}}{\frac{7}{8}} = \frac{6 \times 8}{7 \times 7} = \frac{48}{49} < 1.$$

   Donc $\frac{6}{7} < \frac{7}{8}$.

Méthode : **Déterminer un encadrement** d'une quantité A consiste à déterminer deux réels m et M tels que $m \leqslant A \leqslant M$.

Exemple : la tension U aux bornes d'un composant d'un circuit électrique est donnée par la relation $U = RI$ où I est l'intensité du courant traversant le composant et R sa résistance. On sait que l'intensité du courant traversant le composant oscille entre 5 et 10 A et que sa résistance est de 3 Ω. Déterminer un encadrement de la tension aux bornes du composant. On a

$$\begin{aligned} & 5 \leqslant I \leqslant 10 \\ \Longrightarrow\ & 5 \times R \leqslant I \times R \leqslant 10 \times R \\ \Longrightarrow\ & 15 \leqslant U \leqslant 30. \end{aligned}$$

La tension aux bornes du composant est donc comprise entre 15 et 30 V.

Exercices : 4.1 à 4.4 ; 4.23 à 4.25.

4.2 Équations et inéquations

Définition 4.1.

1. *Une **équation**, resp. **inéquation**, est une égalité, resp. inégalité, entre deux expressions algébriques dépendant d'une même variable, généralement notée x (mais pas nécessairement).*
2. *Une **solution d'une équation**, resp. **inéquation**, est une valeur de l'inconnue x pour laquelle l'égalité, resp. l'inégalité, est vraie.*
3. ***Résoudre une équation ou inéquation**, c'est trouver **l'ensemble de ses solutions** (c'est à dire toutes ses solutions).*
4. *Deux équations ou inéquations sont **équivalentes** si elles ont le même ensemble de solutions. L'équivalence est symbolisé par $\Longleftrightarrow$.*

Exemple :

- $x^2 + 4 = 4x$ est une équation dont 2 est solution car $2^2 + 4 = 4 \times 2$. Nous n'avons pas pour autant résolu cette équation car nous ne savons pas *a priori* si elle admet d'autres solutions.
- $x + 4 \geqslant 1$ est inéquation dont 0 est solution car $0 + 4 = 4 \geqslant 1$. De même, 2 est aussi une solution car $2 + 4 = 6 \leqslant 1$. Il existe en fait une infinité de solution.

Exemple :

1. Résolvons l'équation $2x + 1 = 0$:

$$\begin{aligned} & 2x + 1 = 0 \\ \iff & 2x = -1 \quad \text{(on a ajouté} - 1 \text{ de chaque côté de l'égalité)} \\ \iff & x = -\frac{1}{2} \quad \text{(on a divisé par 2 de chaque côté).} \end{aligned}$$

   L'équation admet pour unique solution $-\dfrac{1}{2}$.

2. Résolvons l'inéquation $-2x + 2 \geqslant 0$.

$$\begin{aligned} & -2x + 2 \geqslant 0 \\ \iff & -2x \geqslant -2 \\ \iff & x \leqslant \frac{-2}{-2} \quad \text{(on divise par} - 2 \text{ de chaque côté : le sens change)} \\ \iff & x \leqslant 1. \end{aligned}$$

   L'inéquation admet pour solution tous les nombres inférieurs ou égaux à 1, i.e. l'intervalle $]-\infty\,; 1]$.

Exercices : 4.5 à 4.7 ; 4.26 à 4.28.

4.3 Équations produits et quotients

4.3.1 Équation produit nul

Proposition 4.3. ***[Règle du produit nul]*** *Un produit de facteur est nul si et seulement si l'un des facteurs, au moins, est nul.*

Exemple : Résolvons $(x + 3)(x - 7) = 0$. D'après la règle du produit nul, on a

$$\begin{aligned} & x + 3 = 0 \\ \iff & x = -3, \end{aligned} \qquad \text{ou} \qquad \begin{aligned} & x - 7 = 0 \\ \iff & x = 7. \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est donc $\{-3\,; 7\}$.

Méthode : Pour résoudre certaines équations, faisant notamment intervenir des identités remarquables, on peut se ramener à une équation de type produit nul grâce à des factorisations.

Exemple : Résolvons l'équation $(x-2)^2 = 25$. On se ramène à une équation de type produit nul :

$$\begin{aligned}
(x-2)^2 = 25 &\iff (x-2)^2 - 25 = 0 \\
&\iff (x-2)^2 - 5^2 = 0 \\
&\iff ([x-2]+5)([x-2]+5) = 0 \\
&\iff (x+3)(x-7) = 0.
\end{aligned}$$

Nous avons déjà révolu cette équation dans l'exemple précédent, l'ensemble des solutions est $\{-3\,;\,7\}$.

Exercices : 4.8 à 4.11 ; 4.29 à 4.32.

4.3.2 Équation quotient nul

Proposition 4.4. ***[Règle du quotient nul]*** *Une fraction est nulle si et seulement si le numérateur est nul.*

Remarque : Le dénominateur d'une fraction doit être non nul, on vérifiera donc que la valeur qui annule le numérateur n'annule pas aussi le dénominateur.

Exemple : Résolvons $\dfrac{2x+5}{x+1} = 0$. D'après la règle du quotient nul, le numérateur est nul :

$$\begin{aligned}
&2x+5 = 0 \\
\iff &2x = -5 \\
\iff &x = -\frac{5}{2}.
\end{aligned}$$

Enfin, $-\dfrac{5}{2} + 1 = -\dfrac{5}{2} + \dfrac{5}{5} = \dfrac{3}{5} \neq 0$, $-\dfrac{5}{2}$ n'annule donc pas le dénominateur. La solution est donc $-\dfrac{5}{2}$.

Méthode : Pour résoudre certaines équations faisant intervenir des quotients, on peut se ramener à une équation de type quotient nul grâce à une mise au même dénominateur.

Exemple : Résolvons l'équation $\dfrac{4x+7}{x+1} = 2$. On se ramène à une équation de type quotient nul :

$$\begin{aligned}
\frac{4x+7}{x+1} = 2 &\iff \frac{4x+7}{x+1} - 2 = 0 \\
&\iff \frac{4x+7}{x+1} - \frac{2(x+1)}{x+1} = 0 \\
&\iff \frac{4x+7-2(x+1)}{x+1} = 0 \\
&\iff \frac{4x+7-2x-2}{x+1} = 0 \\
&\iff \frac{2x+5}{x+1} = 0.
\end{aligned}$$

Nous avons déjà révolu cette équation dans l'exemple précédent, la solution est $-\dfrac{5}{2}$.

Exercices : 4.12 et 4.13 ; 4.33 et 4.34.

4.4 Inéquations produits et quotients

4.4.1 Inéquation produit

Méthode : Il est possible de résoudre une inéquation produit si le produit est comparé à 0 ($\leqslant 0$, < 0, $\geqslant 0$, > 0), autrement si l'on cherche le signe du produit. On utilise pour cela un **tableau de signe**. Il s'agit d'un outil permettant de représenter le signe (positif ou négatif) des facteurs d'un produit et d'en déduire le signe de ce dernier.

Exemple : Résolvons l'inéquation $(4x+1)(9-3x) \leqslant 0$. Cela revient à se demander quand est-ce que la quantité $(4x+1)(9-3x)$ est négative , donc à rechercher son signe. Pour cela, on commence par étudier le signe de ses facteurs :

$$\begin{aligned}
&4x+1 \geqslant 0 \\
\iff\ &4x \geqslant -1 \\
\iff\ &x \geqslant -\frac{1}{4}.
\end{aligned}
\qquad\qquad
\begin{aligned}
&9-3x \geqslant 0 \\
\iff\ &-3x \geqslant -9 \\
\iff\ &x \leqslant 3.
\end{aligned}$$

On peut maintenant utiliser ces résultats pour compléter le tableau de signes ci-dessous et en déduire le signe du produit.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{4}$		3		$+\infty$
$4x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$9-3x$		$+$		$+$	0	$-$	
$(4x+1)(9-3x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

On en déduit que la solution de l'inéquation est l'intervalle $\left]-\infty\,;-\dfrac{1}{4}\right] \cup [3\,;+\infty[$.

Méthode : Il est possible de se ramener à la méthode précédente grâce à une factorisation, notamment par des identités remarquables, pour résoudre des inéquations dont le second membre n'est pas nul.

Exemple : Commençons à résoudre l'inéquation $(9x+5)^2 > 100$. On se ramène à un second membre nul en factorisant.

$$\begin{aligned}
& (9x+5)^2 > 100 \\
\iff & (9x+5)^2 - 100 > 0 \\
\iff & (9x+5)^2 - 10^2 > 0 \\
\iff & ([9x+5]-10)([9x+5]+10) > 0 \\
\iff & (9x-5)(9x+15) > 0.
\end{aligned}$$

On s'est alors ramené à la méthode précédente, on peut résoudre cette inéquation à l'aide d'un tableau de signes.

Exercices : 4.14 et 4.15 ; 4.35 et 4.36.

4.4.2 Inéquation quotient

Méthode : Comme pour le produit, il est possible de résoudre une inéquation quotient si le quotient est comparé à 0 ($\leqslant 0$, < 0, $\geqslant 0$, > 0), autrement si l'on cherche le signe du quotient. On utilise à nouveau un **tableau de signe**, cette fois-ci pour représenter le signe (positif ou négatif) du numérateur et du dénominateur, puis pour en déduire le signe du quotient. Il y a une règle supplémentaire par rapport au produit : les valeurs qui annulent le dénominateur sont appelées **valeurs interdites** car on ne peut pas diviser par 0 ; elles sont symbolisées par des **doubles barres** $\|$ dans le tableau .

Exemple : résolvons l'inéquation $\dfrac{2x+4}{7-28x} \geqslant 0$. Cela revient à se demander quand est-ce que la quantité $\dfrac{2x+4}{7-28x}$ est positive , donc à rechercher son signe. Pour cela, on commence par étudier le signe de son numérateur et de son dénominateur :

$$\begin{aligned} & 2x+4 \geqslant 0 \\ \iff & 2x \geqslant -4 \\ \iff & x \geqslant -2. \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} & 7-28x \geqslant 0 \\ \iff & -28x \geqslant -7 \\ \iff & x \leqslant \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

On peut maintenant utiliser ces résultats pour compléter le tableau de signes ci-dessous et en déduire le signe du quotient.

x	$-\infty$		-2		$\frac{1}{4}$		$+\infty$
$2x + 4$		$-$	0	$+$		$+$	
$7 - 28x$		$+$		$+$	0	$-$	
$\dfrac{2x+4}{7-28x}$		$-$	0	$+$	$\|$	$-$	

On en déduit que la solution de l'inéquation est l'intervalle $\left[-2\,;\frac{1}{4}\right[$, $\frac{1}{4}$ étant exclu car il s'agit de la valeur interdite.

Méthode : Il est possible de se ramener à la méthode précédente grâce à une mise au même dénominateur pour résoudre des inéquations dont le second membre n'est pas nul.

Exemple : Commençons à résoudre l'inéquation $(9x+5)^2 > 100$. On se ramène à un second membre nul en factorisant.

$$\begin{aligned} & \frac{x+3}{2x-5} > 1 \\ \iff & \frac{x+3}{2x-5} - 1 > 0 \\ \iff & \frac{x+3}{2x-5} - \frac{2x-5}{2x-5} > 0 \\ \iff & \frac{x+3-(2x-5)}{2x-5} > 0 \\ \iff & \frac{x+3-2x+5}{2x-5} > 0 \\ \iff & \frac{-x+8}{2x-5} > 0. \end{aligned}$$

On s'est alors ramené à la méthode précédente, on peut résoudre cette inéquation à l'aide d'un tableau de signes.

Exercices : 4.16 et 4.17 ; 4.37 et 4.38.

4.5 Systèmes de deux équations linéaires à deux inconnues

4.5.1 Systèmes de deux équations linéaires à deux inconnues

Définition 4.2.

- *On appelle **système de deux équations linéaires à deux inconnues** tout ensemble d'équations de la forme*
$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2, \end{cases}$$
où a_1, a_2, b_1, $b_2 \in \mathbb{R}$.
- *Le couple $(x\,;y)$ est **solution du système** si et seulement si il est solution de chacune des équations qui le composent.*
- ***Résoudre** un système signifie trouver ses solutions.*

Remarque : Les équations d'un tel système sont en fait des équations de droites.

Exemples :

1. $$\begin{cases} 3x - 2y = 1, \\ x + y = 2, \end{cases}$$
est un système de deux équations linéaires à deux inconnues.

2. $$\begin{cases} 3x^2 - 2y = 1, \\ 2x + y = 2, \end{cases}$$
n'est pas un système de deux équations linéaires car il contient un x^2.

Exemples :

- Le couple $(1\,;1)$ est solution du système ci-dessus car
$$\begin{cases} 3 \times 1 - 2 \times 1 = 1, \\ 1 + 1 = 2. \end{cases}$$
- Le couple $(2\,;0)$ n'est pas solution du système même s'il vérifie l'une de ses deux équations car il ne vérifie pas l'autre :
$$\begin{cases} 3 \times 2 - 2 \times 0 = 6 \neq 1, \\ 2 + 0 = 2. \end{cases}$$

Exercices : 4.18 ; 4.39.

4.5.2 Résolution de systèmes de deux équations linéaires à deux inconnues

Propriété 4.1. *Un système de deux équations linéaires à deux inconnues admet soit une unique solution, soit une infinité de solutions, soit aucune solution.*

Exemple de résolution d'un système linéaire : Reprenons le système ci-dessus et donnons un nom à ses lignes :

$$\begin{cases} 3x - 2y = 1, \quad (L_1) \\ x + y = 2. \quad (L_2) \end{cases}$$

Pour trouver ses éventuelles solutions, on choisit une variable, ici x, et on fait en sorte qu'il y en ait la même quantité dans chacune en multipliant ou divisant une deux lignes par un réel, ici 3 :

$$\begin{cases} 3x - 2y = 1, \quad (L_1) \\ 3x + 3y = 6. \quad (L_2 \leftarrow 3L_2) \end{cases}$$

On conserve une des deux équations et on élimine ensuite la variable choisie de l'autre en soustrayant ou additionnant les lignes :

$$\begin{cases} 3x - 2y = 1, \quad (L_1) \\ 5y = 5. \quad (L_2 \leftarrow L_2 - L_1) \end{cases}$$

La ligne (L_2) est maintenant une équation à une inconnue, sa solution est $y = 1$. On remplace alors y par sa valeur dans (L_1) :

$$\begin{cases} 3x - 2 = 1, \quad (L_1) \\ y = 1. \quad (L_2) \end{cases}$$

La ligne (L_1) est à son tour devenu une inconnue, sa solution est $x = 1$. Le couple solution est donc $(1\,;1)$.

Remarques :

— Cette méthode est dite « d'élimination » car elle consiste à éliminer une variable pour se ramener à des équations à une inconnue.

— Un système a une infinité de solutions lorsque l'élimination conduit à une équation du type « $0 = 0$ ».

— Un système n'a pas de solution lorsque l'élimination conduit à une équation du type « $0 = 1$ ».

Exercices : 4.19 et 4.22 ; 4.40.

4.6 Capacités attendues

— Comparer deux quantités en utilisant leur différence, ou leur quotient dans le cas positif.
— Modéliser un problème par une équation, une inéquation ou un système d'équations.
— Résoudre une équation ou inéquation du premier degré, produit ou quotient.
— Résoudre un système de deux équations linéaires à deux inconnues.

4.7 Exercices

4.7.1 Progresser

Inégalités

Exercice 4.1. Dans chacun des cas ci-dessous, déterminer si l'on a $A < B$ ou l'inverse.

1. $A = \dfrac{13}{8}$ et $B = \dfrac{15}{9}$.
2. $A = \dfrac{36}{49}$ et $B = \dfrac{18}{21}$.

Exercice 4.2. [Auberge] Ciri et Geralt sont dans une auberge, ils constatent que :

— les prix des entrées sont entre 5 et 10 Orins ;
— les prix des plats sont 15 et 25 Orins ;
— les prix des desserts sont 6 et 8 Orins.

Donner un encadrement du prix que vont payer Ciri et Geralt si ils prennent tous deux un repas avec entrée, plat et dessert.

Exercice 4.3. On considère un triangle de base b et hauteur h. On sait que $b \in [3\,;6]$ et $h \in [5\,;8]$. Déterminer un encadrement de l'aire du triangle.

Exercice 4.4. [24 heures du Mans] Au 24h du Mans, une voiture a fait d'ensemble de la course avec une vitesse allant de 100 km/h à 350 km/h.

1. Donner un encadrement de la distance parcourue, en km, par la voiture pendant la course.
2. Sachant qu'un tour fait environ 13,6 km, en déduire un encadrement du nombre de tours faits par la voiture.

Équations et inéquations

Exercice 4.5. On appelle **schéma opératoire** le détail des opérations donné sous la forme d'un schéma fléché permettant de partir d'une variable et d'aboutir à une expression algébrique en respectant les priorités opératoires.

Exemples :

— Considérons l'expression $3x+2$. La variable est x et partant de celle-ci pour aboutir à $3x+3$, on effectue les opérations suivantes et réciproquement.

$$x \underset{./3}{\overset{\times 3}{\rightleftarrows}} 3x \underset{-2}{\overset{+2}{\rightleftarrows}} 3x+2$$

— Considérons l'expression $1-\dfrac{1}{2}y^2$. La variable est y et partant de celle-ci pour aboutir à $1-\dfrac{1}{2}y^2$, on effectue les opérations suivantes et réciproquement.

$$y \underset{\pm\sqrt{.}}{\overset{.^2}{\rightleftarrows}} y^2 \underset{\times(-2)}{\overset{\times\left(-\frac{1}{2}\right)}{\rightleftarrows}} -\frac{1}{2}y^2 \underset{-1}{\overset{+1}{\rightleftarrows}} 1-\frac{1}{2}y^2$$

Donner les schémas opératoires des expressions suivantes.

1. $2x+4$.
2. $5-9x$.
3. $\dfrac{1}{4}-\dfrac{3}{2}x$.
4. $\sqrt{2}(x-1)$.
5. $-2x^2+\sqrt{3}$.
6. $\dfrac{\sqrt{x}}{3}-1$.
7. $1-\dfrac{3}{8}(1-3x)^2$.
8. $1+\dfrac{5}{4}\sqrt{-2x+\dfrac{1}{4}}$.

Exercice 4.6. Résoudre les équations suivantes :

1. $x+5=14$;
2. $2z+3=12$;
3. $4-7r=15$;
4. $4x+6=8-x$.

Exercice 4.7. Résoudre les inéquations suivantes :

1. $x-5>4$;
2. $3z-2<12$;
3. $7-4r\leqslant 5$;
4. $2y+1>-3y+5$;
5. $\dfrac{1}{3}x-7\geqslant 0$;
6. $\dfrac{2}{5}a+4\leqslant\dfrac{1}{10}a$.

Équation produit nul

Exercice 4.8. Résoudre les équations suivantes :

1. $(2t+1)(4-t)=0$;
2. $s(5s+6)(3s-2)=0$;
3. $(x+2)(x^2-1)=0$.

Exercice 4.9. Résoudre les équations suivantes :

1. $9 - x^2 = 0$;
2. $(5x+3)^2 = 16$;
3. $t^2 - 6t = -9$.

Exercice 4.10.

1. Développer l'expression $A = (x+2)^2 - 9$.
2. Factoriser A.
3. En déduire les solutions de l'équation $x^2 + 4x - 5 = 0$.

Exercice 4.11.

1. Développer l'expression $A = (y-3)^2 - 49$.
2. Factoriser A.
3. En déduire les solutions de l'équation $y^2 - 6y - 40 = 0$.

Équation quotient nul

Exercice 4.12. Résoudre les équations suivantes :

1. $\dfrac{3r+1}{2r-1} = 0$;
2. $\dfrac{(3z+12)z}{z^2+1} = 0$;
3. $\dfrac{y+1}{y^2-1} = 0$.

Exercice 4.13. Résoudre les équations suivantes :

1. $\dfrac{x+4}{x-1} = 6$;
2. $\dfrac{8-x}{x+5} + \dfrac{x+3}{x} = 0$;
3. $\dfrac{x+4}{x-1} = \dfrac{x-6}{x+1}$.

Inéquation produit

Exercice 4.14. Résoudre les inéquations suivantes.

1. $(-2x+1)(6x+5) > 0$.
2. $(2-3x)(4x-1) \geqslant 0$.
3. $s(5s+6)(3s-2) \geqslant 0$.

Exercice 4.15. Résoudre les inéquations suivantes.

1. $t^2 - 6t + 9 \geqslant 0$.
2. $9 < x^2$.
3. $(y+2)^2 > 25$.

Inéquation quotient

Exercice 4.16. Résoudre les inéquations suivantes.

1. $\dfrac{x+2}{-x+6} > 0$.
2. $\dfrac{3x-4}{2x+3} \leqslant 0$.
3. $\dfrac{(x-4)(1-x)}{x+8} \geqslant 0$.
4. $\dfrac{v^2}{(v+1)(v-1)} \geqslant 0$.
5. $\dfrac{u^2-4u+4}{2u+4} \geqslant 0$.
6. $\dfrac{(3z+12)z}{z^2+2z+1} \leqslant 0$.

Exercice 4.17. Résoudre les inéquations suivantes :

1. $\dfrac{z+1}{z-1} \leqslant 1.$
2. $\dfrac{t}{t+1} \leqslant 2.$
3. $\dfrac{1-2u}{1+2u} \geqslant -1.$

Systèmes d'équations linéaires à deux inconnues

Exercice 4.18. Dans chaque cas, dire si oui ou non le couple $(-2\,;1)$ est solution du système ci-dessous.

1. $\begin{cases} 2x+3y=1, \\ x+2y=0. \end{cases}$
2. $\begin{cases} 3x-2y=1, \\ -2x+4y=8. \end{cases}$
3. $\begin{cases} 3x+y=-5, \\ -5x+7y=4. \end{cases}$

Résolution de systèmes d'équations linéaires à deux inconnues

Exercice 4.19. Résoudre les systèmes ci-dessous.

1. $\begin{cases} 2x+y=1, \\ x+2y=0. \end{cases}$
2. $\begin{cases} 3x-2y=1, \\ -2x+4y=8. \end{cases}$
3. $\begin{cases} 3x+y=-5, \\ -5x+7y=4. \end{cases}$
4. $\begin{cases} 3x-y=1, \\ x+2y=-6. \end{cases}$
5. $\begin{cases} -2x+5y=0, \\ 2x-5y=3. \end{cases}$
6. $\begin{cases} 2x-6y=8, \\ -x+3y=-4. \end{cases}$

Exercice 4.20. On considère le système (S) $\begin{cases} x^2+y^2=13, \\ 2x^2-y^2=-1. \end{cases}$

1. On pose $X=x^2$ et $Y=y^2$. Écrire le système dont $(X\,;Y)$ est solution et le résoudre.
2. En déduire tous les couples $(x\,;y)$ solutions de (S).

Exercice 4.21. [Prix et potions] Triss et Yennefer ont acheté des items magiques afin de préparer des élixirs. Triss a acheté 5 cristaux d'Albar et 2 plumes de Cocatrix pour 100 Orins ; Yennefer a acheté 2 cristaux d'Albar et 3 plumes de Cocatrix pour 95 Orins. Déterminer le coût d'un cristal d'Albar et d'une plume de Cocatrix.

Exercice 4.22. On souhaite déterminer les longueurs des côtés de l'angle droit d'un triangle ABC rectangle en B dont l'hypoténuse mesure 4 et l'aire vaut $3,84$. On pose $AB=x$ et $BC=y$.

1. Faire un dessin de la situation.
2. Exprimer l'aire de ABC en fonction de x et y. En déduire que $xy=7,68$.
3. Écrire l'égalité de Pythagore dans ce triangle à l'aide de x et y.
4. Montrer que $(x+y)^2=31,36$ et $(x-y)^2=0,64$.
5. En déduire un système linéaire de deux équations à deux inconnues x et y et le résoudre.

4.7.2 S'entraîner

Inégalités

Exercice 4.23. Dans chacun des cas ci-dessous, déterminer si l'on a $A < B$ ou l'inverse.

1. $A = \dfrac{90}{46}$ et $B = \dfrac{96}{47}$.
2. $A = \dfrac{121}{36}$ et $B = \dfrac{220}{72}$.

Exercice 4.24. [Pokémons] Bulbizarre, Carapuce et Salamèche s'apprêtent à lancer leurs attaques simultanément sur la Team Rocket. On sait que

— les attaques de Bulbizarre ont une puissance oscillant entre 40 et 60 ;

— les attaques de Carapuce ont une puissance oscillant entre 35 et 65 ;

— les attaques de Salamèche ont une puissance oscillant entre 40 et 70.

Donner un encadrement de la puissance de l'attaque combinée que va recevoir la Team Rocket de la part des trois pokémons.

Exercice 4.25. On considère un rectangle de longueur L et largeur l. On sait que $L \in [10\,;20]$ et $l \in [3\,;7]$. Déterminer un encadrement du périmètre et de l'aire du rectangle.

Équations et inéquations

Exercice 4.26. Donner les schémas opératoires des expressions suivantes. On pourra se reporter à l'exercice 4.5 si nécessaire.

1. $2x + 4$.
2. $2 - \dfrac{7}{9}\sqrt{x}$.
3. $\dfrac{1}{5} - \dfrac{2}{3}(1 - 3x)^2$.

Exercice 4.27. Résoudre les équations suivantes :

1. $x - 7 = 30$;
2. $4z - 3 = 21$;
3. $7 - 4r = 51$;
4. $6x + 4 = 1 - 8x$.

Exercice 4.28. Résoudre les inéquations suivantes :

1. $5 - 3r \leqslant 5$;
2. $-4y - 3 > y - 8$;
3. $\dfrac{1}{5}x - 8 \geqslant 0$;
4. $\dfrac{4}{7}a - 9 \leqslant \dfrac{3}{14}a$.

Équation produit nul

Exercice 4.29. Résoudre les équations suivantes :

1. $(y + 7)(3 - y) = 0$;
2. $z(z + 1)(5z + 3) = 0$.

Exercice 4.30. Résoudre les équations suivantes :

1. $(x+1)^2 = 81$;
2. $49 = (8x-3)^2$.

Exercice 4.31.

1. Développer l'expression $A = (z+4)^2 - 36$.
2. Factoriser A.
3. En déduire les solutions de l'équation $z^2 + 8z - 20 = 0$.

Exercice 4.32.

1. Développer l'expression $A = \left(t - \dfrac{3}{2}\right)^2 - \dfrac{25}{4}$.
2. Factoriser A.
3. En déduire les solutions de l'équation $t^2 - 3t - 4 = 0$.

Équation quotient nul

Exercice 4.33. Résoudre les équations suivantes :

1. $\dfrac{3a+5}{4a+1} = 0$;
2. $\dfrac{b+2}{b^2-4} = 0$;
3. $\dfrac{y^2-36}{y^2+1} = 0$.

Exercice 4.34. Résoudre les équations suivantes :

1. $\dfrac{3x+2}{2x-1} = -3$;
2. $\dfrac{3x+7}{x-2} = \dfrac{6x}{2x+3}$;
3. $\dfrac{2x-4}{x-5} = \dfrac{2x+3}{x}$;
4. $\dfrac{196}{8x+24} = \dfrac{4x^2}{8x+24}$.

Inéquation produit

Exercice 4.35. Résoudre les inéquations suivantes.

1. $(2x-1)(6x-4) > 0$.
2. $-3x(1-4x)(3x+1) \leqslant 0$.
3. $(7x+1)(2-8x)(9x-3) \geqslant 0$.

Exercice 4.36. Résoudre les inéquations suivantes.

1. $t^2 - 12t + 36 > 0$.
2. $(2y+3)^2 \leqslant 64$.
3. $1 \geqslant (1-10x)^2$.

Inéquation quotient

Exercice 4.37. Résoudre les inéquations suivantes.

1. $\dfrac{x+1}{2x+6} > 0$.
2. $\dfrac{3x(6-2x)}{2x-8} \leqslant 0$.
3. $\dfrac{x-4}{(x-7)(x+7)} \geqslant 0$.

Exercice 4.38. Résoudre les inéquations suivantes.

1. $\dfrac{x-1}{x} > -1.$
2. $\dfrac{1}{3x+2} < -2.$
3. $\dfrac{1-4x}{1+4x} \geqslant 3.$

Systèmes d'équations linéaires à deux inconnues

Exercice 4.39. Dans chaque cas, dire si oui ou non le couple $(-1\,;2)$ est solution du système ci-dessous.

1. $\begin{cases} 3x - y = -5, \\ -5x + 7y = 4. \end{cases}$
2. $\begin{cases} x + y = 1, \\ -2x + 4y = 8. \end{cases}$
3. $\begin{cases} 3x + 2y = 1, \\ 2x + y = 0. \end{cases}$

Résolution de systèmes d'équations linéaires à deux inconnues

Exercice 4.40. Résoudre les systèmes ci-dessous.

1. $\begin{cases} x + y = 1, \\ 5x + 2y = 4. \end{cases}$
2. $\begin{cases} 4x - 2y = 10, \\ -2x + y = -5. \end{cases}$
3. $\begin{cases} -3x + 5y = -5, \\ 21x - 35y = 4. \end{cases}$
4. $\begin{cases} 10x - 12y = 9, \\ x + 2y = -8. \end{cases}$
5. $\begin{cases} -2x + 5y = 7, \\ 16x - 40y = -56. \end{cases}$
6. $\begin{cases} 2x - 3y = 0, \\ -x + 3y = -4. \end{cases}$

4.8 Le Flashback !

Flashback 4.1. Soient $ABCD$ un carré, E, F, G, H les milieux respectifs de $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[DA]$ et I le milieu des diagonales de $ABCD$. Déterminer à quel vecteur sont égales les sommes suivantes :

1. Montrer que :
   (a) $\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{HI}\,;$
   (b) $\overrightarrow{ID} = \overrightarrow{FG}.$
2. Déterminer à quel vecteur sont égales les sommes suivantes :
   (a) $\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{IA}\,;$
   (b) $\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}\,;$
   (c) $\overrightarrow{EG} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{IG} + \overrightarrow{CG}\,;$
   (d) $2\overrightarrow{HI} - \overrightarrow{FI}\,;$
   (e) $\dfrac{1}{2}\overrightarrow{DB} - \overrightarrow{HA}\,;$
   (f) $3\overrightarrow{GC} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{FH} - \overrightarrow{DA}.$