

# Mathématiques

## Dérivabilité et convexité

Sujet 1

30/09/2025

Note : / 20

Durée : 1 h 15 min

- La calculatrice n'est pas autorisée.
- Le sujet est à rendre avec la copie.

**Exercice 1** [ / 5]

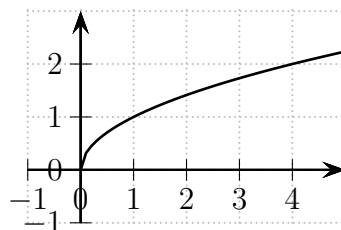
Déterminer l'ensemble de dérivabilité de  $f$  définie par  $f(x) = \frac{x}{-x^2 + 3x - 2}$ .

**Exercice 2** [ / 6]

Soit  $f$  définie pour tout  $x \in \mathbb{R}$  par  $f(x) = e^{-x^2}$ . On admet que  $f$  est deux fois dérivable sur  $\mathbb{R}$ . Étudier la convexité / concavité de  $f$  et déterminer les éventuels points d'inflexion de  $\mathcal{C}_f$ .

**Exercice 3** [ / 4]

On considère la fonction racine carrée  $f(x) = \sqrt{x}$  définie sur  $[0; +\infty[$  dont on a la courbe  $\mathcal{C}_f$  ci-dessous.



1. [ / 1] Déterminer graphiquement la convexité / concavité de  $f$  sur  $[0; +\infty[$ . Justifier.
2. [ / 1] Déterminer l'équation de la tangente à  $\mathcal{C}_f$  en 4.
3. [ / 1] Justifier que pour tout  $x \in [0; +\infty[$ , on a  $\sqrt{x} \leq \frac{1}{4}x + 1$ .
4. [ / 1] En déduire que  $e^{\frac{1}{2}} \leq \frac{e}{4} + 1$ .

**Exercice 4** [ / 5]

Démontrer par récurrence que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $4^n - 1 - 3n$  est un multiple de 9.

**Non noté :** Si vous avez fini l'évaluation, vous pouvez colorier Salamèche.

