Mathématiques

Dérivabilité et convexité

Sujet 1 30/09/2025

Note : / 20 Durée : 1 h 15 min

— La calculatrice n'est pas autorisée.
— Le sujet est à rendre avec la copie.

Exercice 1 [/ 5]

Déterminer l'ensemble de dérivabilité de f définie par $f(x) = \dfrac{x}{-x^2+3x-2}$.

Solution:

— On a $f = \dfrac{u}{v}$ avec $u(x) = x$ et $v(x) = -x^2+3x-2$.
— u est dérivable sur $D'_u = \mathbb{R}$.
— v est dérivable sur $D'_v = \mathbb{R}$.
— f est donc dérivable si et seulement si $v(x) \neq 0$, i.e. $-x^2+3x-2 \neq 0$. On va donc chercher à déterminer les éventuelles racines de ce polynôme de degré deux en commençant par calculer son discriminant :

$$\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \times (-1) \times (-2) = 9 - 8 = 1.$$

$\Delta > 0$ donc le polynôme admet deux racines :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3-1}{-2} = 2 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3+1}{-2} = 1.$$

— On en déduit que f est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{1\,;\,2\}$.

Exercice 2 [/ 6]

Soit f définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$. On admet que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. Étudier la convexité / concavité de f et déterminer les éventuels points d'inflexion de $\mathscr{C}_f$.

Solution: On va utiliser la propriété f est convexe (concave) si et seulement si $f'' \geqslant 0$ ($\leqslant 0$). Dérivons f deux fois. Elle est de la forme $f = v \circ u$ avec

$$\begin{cases} v(x) = \mathrm{e}^x \\ v'(x) = \mathrm{e}^x, \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u(x) = -x^2 \\ u'(x) = -2x. \end{cases}$$

On a donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = (v \circ u)'(x) = u'(x) \times v'(u(x)) = -2x\mathrm{e}^{-x^2} = -2xf(x).$$

Dérivons à présent f'. Elle est de la forme $f' = w \times f$ avec $w(x) = -2x$, on a donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f''(x) &= w'(x)f(x) + w(x)f'(x) \\ &= -2\mathrm{e}^{-x^2} + (-2x) \times (-2x)\mathrm{e}^{-x^2} \\ &= \mathrm{e}^{-x^2}(4x^2 - 2) \\ &= \mathrm{e}^{-x^2}(2x - \sqrt{2})(2x + \sqrt{2}). \end{aligned}$$

Comme, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{-x^2} > 0$, $f''(x)$ est du signe de $(2x - \sqrt{2})(2x + \sqrt{2})$.

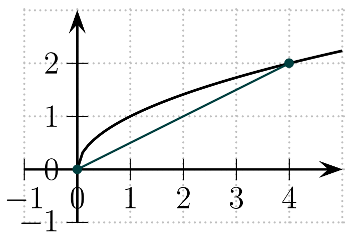
x	$-\infty$		$-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$		$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
$2x - \sqrt{2}$		$-$		$-$	0	$+$	
$2x + \sqrt{2}$		$-$	0	$+$		$+$	
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On en déduit que f est convexe sur $\left]-\infty\,; -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right] \cup \left[\dfrac{\sqrt{2}}{2}\,; +\infty\right[$ et concave sur $\left[-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\,; \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$.

Elle admet deux points d'inflexion aux points d'abscisse $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ car f'' s'y annule en changeant de signe.

Exercice 3 [/ 4]

On considère la fonction racine carrée $f(x) = \sqrt{x}$ définie sur $[0\,; +\infty[$ dont on a la courbe $\mathscr{C}_f$ ci-dessous.



1. [/ 1] Déterminer graphiquement la convexité / concavité de f sur $[0\,; +\infty[$. Justifier.

Solution: Graphiquement, la courbe de f est au dessus de ses cordes, elle est donc concave sur $[0\,; +\infty[$.

2. [/ 1] Déterminer l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ en 4.

Solution:

f est dérivable sur $]0\,; +\infty[$, donc en 4. L'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ en 4 est donc :

$$y = f'(4)(x - 4) + f(4).$$

On a, pour tout $x \in]0\,; +\infty[$, $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. On en déduit que l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ en 4 est, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,

$$y = \frac{1}{4}(x - 4) + 2,$$

ou encore

$$y = \frac{1}{4}x + 1.$$

3. **[/ 1]** Justifier que pour tout $x \in [0\,;+\infty[$, on a $\sqrt{x} \leqslant \frac{1}{4}x + 1$.

Solution: f étant concave, $\mathscr{C}_f$ est en dessous de ses tangentes, en particulier, elle est en dessous de sa tangente en 4, donc, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,

$$f(x) \leqslant \frac{1}{4}x + 1, \quad \text{ou encore} \quad \sqrt{x} \leqslant \frac{1}{4}x + 1.$$

4. **[/ 1]** En déduire que $\mathrm{e}^{\frac{1}{2}} \leqslant \frac{\mathrm{e}}{4} + 1$.

Solution: On applique l'inégalité précédente avec $\mathrm{e} \in \mathbb{R}_+$, on a alors

$$\sqrt{\mathrm{e}} \leqslant \frac{1}{4}\mathrm{e} + 1 \iff \mathrm{e}^{\frac{1}{2}} \leqslant \frac{\mathrm{e}}{4} + 1.$$

Exercice 4 [/ 5]

Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $4^n - 1 - 3n$ est un multiple de 9.

Solution: On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n : $\exists c_n \in \mathbb{Z}$ / $4^n - 1 - 3n = 9c_n$.
Initialisation : pour $n = 0$, on a $4^0 - 1 - 3 \times 0 = 0 = 9 \times 0$, donc P_0 est vraie avec $c_0 = 0$.

Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}$ fixé quelconque.

Hypothèse de récurrence : On suppose P_k vraie : $\exists c_k \in \mathbb{Z}$ / $4^k - 1 - 3k = 9c_k$.
Objectif : Montrons que P_{k+1} est vraie : $\exists c_{k+1} \in \mathbb{Z}$ / $4^{k+1} - 1 - 3(k+1) = 9c_{k+1}$.

On a :

$$\begin{aligned}
4^{k+1} - 1 - 3(k+1) &= 4^k \times 4 - 1 - 3k - 3 \\
&= (9c_k + 1 + 3k) \times 4 - 1 - 3k - 3 \qquad \text{(H.R.)} \\
&= 9 \times (4c_k) + 4 + 12k - 4 - 3k \\
&= 9 \times (4c_k) + 9k \\
&= 9 \times (4c_k + k).
\end{aligned}$$

On pose $c_{k+1} = 4c_k + k$; comme $c_k \in \mathbb{Z}$ et $k \in \mathbb{Z}$, on a $c_{k+1} \in \mathbb{Z}$. On en déduit que P_{k+1} est vraie, la propriété est héréditaire.
Conclusion : par principe de récurrence, on a montré que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $4^n - 1 - 3n$ est un multiple de 9.

Non noté : Si vous avez fini l'évaluation, vous pouvez colorier Salamèche.