Chapitre 3

Géométrie dans l'espace

3.1 Vecteurs de l'espace

On étend à l'espace la notion de vecteur vue en géométrie plane.

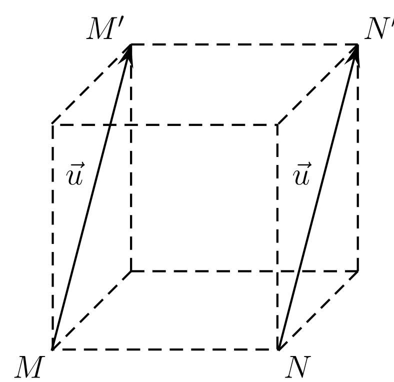
Définition 3.1. *Soient M et M' sont deux points distincts de l'espace. La translation qui transforme M en M' est appelée translation de vecteur $\overrightarrow{MM'}$. Le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ a pour :*

— *direction celle de la droite (MM') ;*

— *sens celui de M vers M' ;*

— *pour norme la longueur MM', on note $\left\|\overrightarrow{MM'}\right\|$ la norme de ce vecteur.*

Remarques :



— Le vecteur $\overrightarrow{MM}$ est appelé **vecteur nul** ; on le note $\overrightarrow{0}$.

— Lorsque la translation qui transforme M en M' transforme aussi N en N', on dit que les vecteurs $\overrightarrow{MM'}$ et $\overrightarrow{NN'}$ sont égaux. Dans ce cas, ces deux vecteurs sont les représentants d'un même vecteur $\vec{u}$:

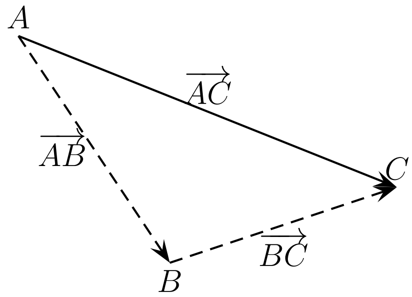
$$\vec{u} = \overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{NN'}.$$

— $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{NN'}$ si et seulement si le quadrilatère $MM'N'N$ est un parallélogramme.

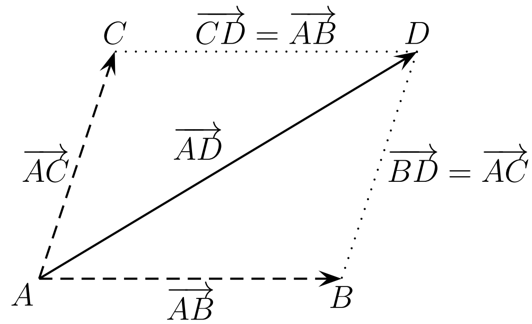
Proposition 3.1. *Soient A, B et C trois points de l'espace. On a alors :*

Relation de Chasles : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

Règle du parallélogramme : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$ *où D est l'unique point du plan tel que $ABDC$ soit un parallélogramme.*



Relation de Chasles



Règle du parallélogramme

Définition 3.2.

1. *Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul de l'espace et λ un nombre réel non nul. Le vecteur $\lambda\vec{u}$ est caractérisé par :*
   — *$\lambda\vec{u}$ et $\vec{u}$ ont la même direction ;*
   — *$\|\lambda\vec{u}\| = |\lambda| \times \|\vec{u}\|$;*
   — *si $\lambda > 0$, $\lambda\vec{u}$ et $\vec{u}$ ont le même sens ; si $\lambda < 0$, $\lambda\vec{u}$ et $\vec{u}$ sont de sens opposés.*
2. *Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont* ***colinéaires*** *si il existe un réel λ tel que $\vec{v} = \lambda\vec{u}$ (ou $\vec{u} = \lambda\vec{v}$).*

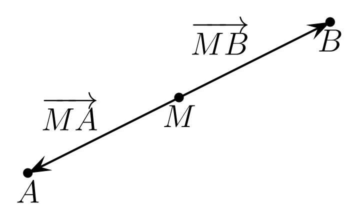
Proposition 3.2. *Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et tous réels λ et λ' :*

1. $\lambda(\vec{u} + \vec{v}) = \lambda\vec{u} + \lambda\vec{v}$;
2. $(\lambda + \lambda')\vec{u} = \lambda\vec{u} + \lambda'\vec{u}$;
3. $\lambda(\lambda'\vec{u}) = (\lambda\lambda')\vec{u}$.

Définition 3.3. *Soient A et B deux points du plan. M est le milieu du segment $[AB]$ si et seulement si $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$.*

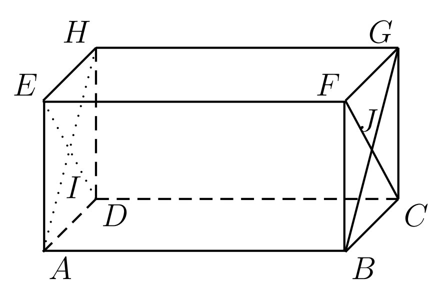
Proposition 3.3. *Soient A et B deux points du plan. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *M est le milieu du segment $[AB]$;*
2. $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AM}$;
3. $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.



Exemple : $ABCDEFGH$ est un parallélépipède rectangle. I et J sont les milieux respectifs des faces $ADHE$ et $BCGF$.

1. L'image du point I par la translation du vecteur $\overrightarrow{FJ}$ est le point D.
2. $\overrightarrow{FC} - \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{EC}$.



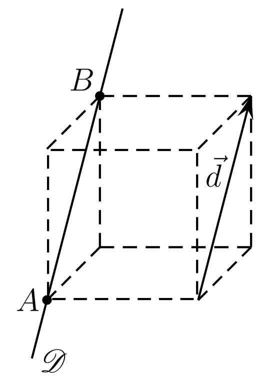
Exercices : 3.1 à 3.4 ; 3.27 à 3.29.

3.2 Droites de l'espace

Définition 3.4. *Soient A et B deux points de l'espace. La **droite** (AB) est l'ensemble des points M tels qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que*

$$\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{AB}.$$

$\left(A\,;\overrightarrow{AB}\right)$ *est un **repère** de cette droite ; $\overrightarrow{AB}$ en est un **vecteur directeur**.*



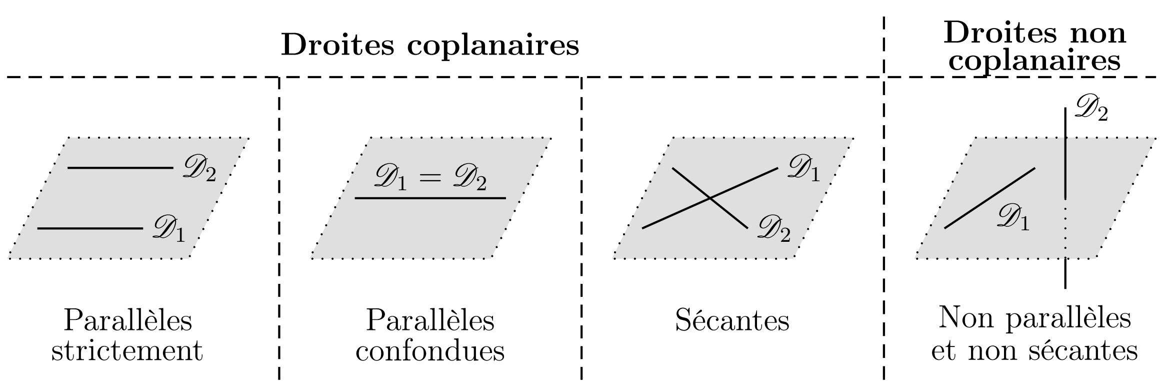
Remarque : Si $\vec{d}$ est un vecteur directeur d'une droite $\mathscr{D}$, alors tout vecteur colinéaire à $\vec{d}$ dirige également $\mathscr{D}$.

Proposition 3.4. *Trois points A, B et C sont **alignés** si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.*

Méthode : Pour déterminer si trois points A, B et M sont alignés (ou non), autrement dit si $M \in (AB)$ (ou non), il faut déterminer si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont colinéaires (ou non).

Définition 3.5. *Soient $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ deux droites de vecteurs directeurs respectifs $\vec{d_1}$ et $\vec{d_2}$.*

1. *Si $\vec{d_1}$ et $\vec{d_2}$ sont colinéaires alors $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ sont parallèles, confondues ou non, et appartiennent à un même plan : elles sont coplanaires.*
2. *Si $\vec{d_1}$ et $\vec{d_2}$ ne sont pas colinéaires alors :*
   - *si $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ sont coplanaires alors elles sont sécantes ;*
   - *si $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ ne sont pas coplanaires alors elles ne sont ni sécantes, ni parallèles.*



Méthode : Pour déterminer si deux droites sont parallèles, il faut déterminer si leurs vecteurs directeurs sont colinéaires.

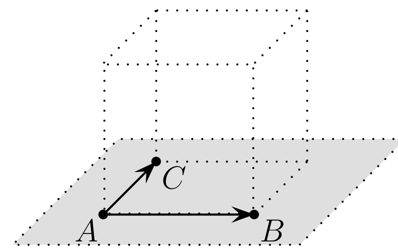
Exercices : 3.5 à 3.7.

3.3 Plans de l'espace

Définition 3.6. *Soient A, B et C trois points non alignés de l'espace. Le* ***plan*** *(ABC) est l'ensemble des points M tels qu'il existe $(\lambda\,;\mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que*

$$\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{AC}.$$

$\left(A\,;\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}\right)$ est un ***repère*** *de ce plan ; il est dirigé par la* ***base*** *$\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}\right)$.*



Remarques :

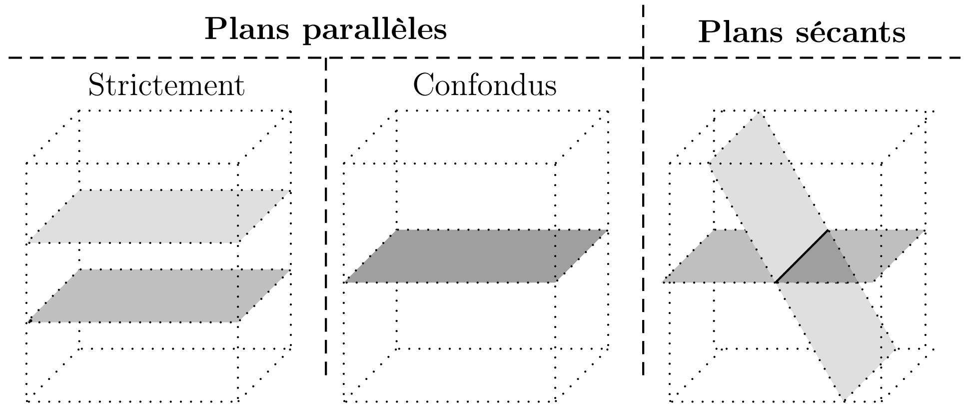
- On dit aussi que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont des **vecteurs directeurs** du plan (ABC), ou encore qu'ils **engendrent** le plan (ABC).
- On dit qu'un vecteur $\vec{v}$ appartient à la direction du plan (ABC) s'il existe $(\lambda\,;\mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\vec{v} = \lambda\overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{AC}$. Ce qui revient à dire qu'il existe deux points M et N du plan (ABC) tels que $\vec{v} = \overrightarrow{MN}$.
- On dit que des points sont **coplanaires** s'ils appartiennent à un même plan. Trois points (ou moins) sont toujours coplanaires.
- Par abus de langage, on dit que A, B et C forment un repère du plan si $\left(A\,;\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}\right)$ en est un.

Méthodes :

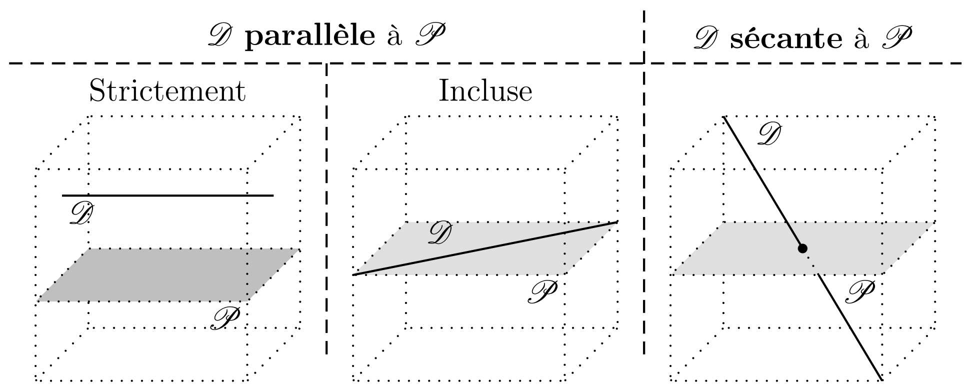
- Pour montrer que deux vecteurs forment une base d'un plan, il suffit de montrer qu'ils sont non colinéaires.
- Pour montrer que trois points A, B et C forment un repère du plan, il suffit de montrer que $\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}\right)$ forment une base du plan.
- Pour montrer qu'un point M appartient à un plan (ABC), il faut montrer qu'il existe $(\lambda\,;\mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{AC}$.
- Pour montrer que quatre points A, B, C et M sont coplanaires, il suffit de montrer que M appartient au plan (ABC).

Proposition 3.5. *Deux plans peuvent être :*

- *strictement parallèles ;*
- *confondus ;*
- *sécants, leur intersection est une droite.*



Proposition 3.6. *Un plan et une droite peuvent être :*
- — *strictement parallèles ;*
- — *la droite peut être incluse dans le plan ;*
- — *sécants, leur intersection est un point.*



Théorème 3.1. ***[Admis]***

1. *Une droite $\mathscr{D}$ est parallèle à un plan $\mathscr{P}$ si, et seulement si, il existe une droite $\mathscr{D}'$ du plan $\mathscr{P}$ parallèle à $\mathscr{D}$.*
2. *Deux plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont parallèles si, et seulement si, il existe deux droites sécantes de $\mathscr{P}_1$ parallèles à deux droites sécantes de $\mathscr{P}_2$.*
3. *Soient $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ deux plans strictement parallèles. Tout plan sécant à $\mathscr{P}_1$ est aussi sécant à $\mathscr{P}_2$ et les droites d'intersections obtenues sont parallèles.*

Méthodes :

1. Pour montrer qu'une droite $\mathscr{D}$ de vecteur directeur $\vec{d}$ est parallèle à un plan $\mathscr{P}$, on peut montrer que $\vec{d}$ appartient à la direction de $\mathscr{P}$.
2. Pour montrer que deux plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$, de bases respectives $(\vec{u}_1 ; \vec{v}_1)$ et $(\vec{u}_2 ; \vec{v}_2)$, on peut montrer que $\vec{u}_2$ et $\vec{v}_2$ sont dans la direction de $\mathscr{P}_1$.

Exercices : 3.8 à 3.14 ; 3.30 à 3.32.

3.4 Vecteurs coplanaires et linéairement indépendants

Définition 3.7. *Soient trois vecteurs du plan $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ tels que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne soient pas colinéaires. Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sont* ***coplanaires*** *si, et seulement si, il existe deux réels λ et μ tels que*

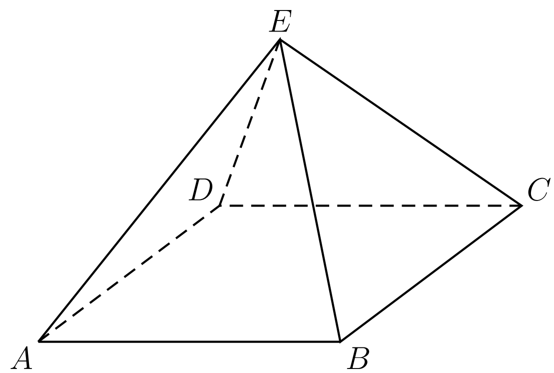
$$\vec{w} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}.$$

On dit alors que $\vec{w}$ est une ***combinaison linéaire*** *des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.*

Remarque : Deux vecteurs sont toujours coplanaires.

Exemple : Soit $ABCDE$ une pyramide de sommet E dont la base est le parallélogramme $ABCD$. Soient les vecteurs :

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB},\ \vec{v} = 2\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE} \quad \text{et} \quad \vec{w} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE}.$$



Montrons que $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires.
Il faut exprimer un vecteur en fonction des deux autres. Par exemple ici, nous allons exprimer $\vec{w}$ en fonction de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

— On remarque que $\vec{w} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AE}$ par la relation de Chasles.

— De plus, $ABCD$ est un parallélogramme donc $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$, d'où

$$\vec{w} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE} = \vec{u} + \vec{v}.$$

— Puisque $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$ on a bien trouvé deux réels λ et μ (ici tous deux égaux à 1) tels que $\vec{w} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$, ainsi les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires.

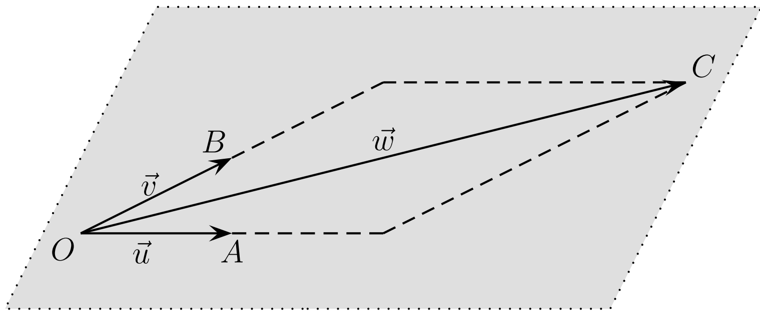
Proposition 3.7. *Soient quatre points de l'espace O, A, B, C définissant trois vecteurs $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{OC}$. Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement si les points O, A, B, C le sont aussi.*

Démonstration. On considère quatre points O, A, B et C tels que $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{OC}$.

$\Longrightarrow$ **:** On suppose que les trois vecteurs sont coplanaires. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires donc on en déduit que les points O, A et B ne sont pas alignés et forment donc un repère $(O\,;A\,;B)$ du plan où sont $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$. Comme les trois vecteurs sont coplanaires, les quatre points O, A, B, C le sont aussi et donc il existe deux réels λ et μ tels que les coordonnées du point C dans le repère $(O\,;A\,;B)$ soient $C\,(\lambda\,;\mu)$, c'est-à-dire : $\vec{w} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$.

$\Longleftarrow$ **:** On suppose qu'il existe deux réels λ et μ tels que $\vec{w} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$. De nouveau on considère le repère $(O\,;A\,;B)$ et dans ce repère on déduit de l'égalité précédente que les coordonnées du point C sont $C\,(\lambda\,;\mu)$ et que donc C appartient au plan de repère $(O\,;A\,;B)$, c'est-à-dire que O, A, B, C sont coplanaires et donc les trois vecteurs sont également coplanaires.

□



Définition 3.8. *Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace et a, b, c trois réels. Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont dit* ***linéairement indépendants*** *si et seulement si*

$$a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = \vec{0} \implies a = b = c = 0.$$

Exemple : Soient $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ trois vecteurs non coplanaires. Soient E, F et G trois points tels que :

$$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}, \quad \overrightarrow{AF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{FG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}.$$

Déterminons si (AE) et (FG) sont coplanaires. (AE) et (FG) sont coplanaires si et seulement si A, E, F et G le sont également, si et seulement si il existe deux réels λ et μ tels que $\overrightarrow{AE} = \lambda\overrightarrow{AF} + \mu\overrightarrow{AG}$. On a

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{AE} = \lambda\overrightarrow{AF} + \mu\overrightarrow{AG} \\
\iff &\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = \lambda\overrightarrow{AF} + \mu\left(\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FG}\right) \\
\iff &\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = (\lambda + \mu)\overrightarrow{AF} + \mu\overrightarrow{FG} \\
\iff &\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = \left(\frac{1}{2}\lambda + \mu\right)\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\mu\overrightarrow{AC} + \frac{1}{4}\mu\overrightarrow{AD} \\
\iff &\left(\frac{1}{2}\lambda + \mu - 1\right)\overrightarrow{AB} + \left(\frac{1}{3}\mu - 1\right)\overrightarrow{AC} + \left(\frac{1}{4}\mu - 1\right)\overrightarrow{AD} = \vec{0}.
\end{aligned}$$

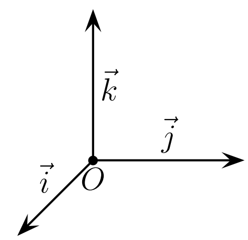
Comme $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont trois vecteurs non coplanaires, ils sont linéairement indépendants et donc :

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\lambda + \mu = 0 \\ \frac{1}{3}\mu - 1 = 0 \\ \frac{1}{4}\mu - 1 = 0 \end{cases}$$

Les deux dernières équations sont incompatibles, on en déduit que A, E, F et G ne sont pas coplanaires, et donc que les droites (AE) et (FG) ne le sont pas non plus.

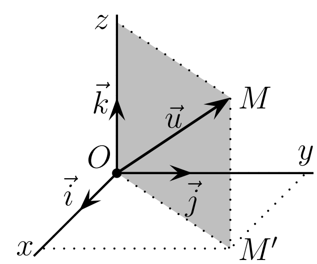
Exercices : 3.15 à 3.17 ; 3.33 et 3.34.

3.5 Bases et repères de l'espace



Définition 3.9.

- *Une* ***base de l'espace*** *est la donnée d'un triplet* $\left(\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k}\right)$ *de vecteurs linéairement indépendants.*
- *Un* ***repère de l'espace*** *est la donnée d'un point* O*, l'origine du repère, et d'une base* $\left(\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k}\right)$*. On le note* $\left(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k}\right)$*.*



Proposition 3.8. *Soit* $\left(\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k}\right)$ *une base de l'espace. Pour tout vecteur* $\vec{u}$ *de l'espace il existe un unique triplet* $(x\,;y\,;z)$ *de réels tel que* $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ *;* $(x\,;y\,;z)$ *est le triplet de* ***coordonnées*** *du vecteur* $\vec{u}$ *dans la base* $\left(\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k}\right)$*.*

Démonstration. Soient $\left(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k}\right)$ un repère de l'espace, $\vec{u}$ un vecteur et quatre points A, B, C, M tels que $\vec{i} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{j} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{k} = \overrightarrow{OC}$ et $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$.

Existence : Soit M' le projeté de M sur le plan de repère $\left(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\right)$ parallèlement à la droite (OC). On a donc $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM'} + \overrightarrow{M'M}$. Or, par construction de M', $\overrightarrow{M'M}$ est colinéaire à $\overrightarrow{OC} = \vec{k}$ donc il existe $z \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{M'M} = z\vec{k}$. De plus, toujours par construction, $\overrightarrow{OM'}$, $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont coplanaires et donc il existe x, y deux réels tels que $\overrightarrow{OM'} = x\vec{i} + y\vec{j}$. Ainsi $\vec{u} = \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

Unicité : Supposons qu'il existe deux triplets $(x\,;y\,;z)$ et $(x'\,;y'\,;z')$ tels que

$$\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}.$$

On a donc

$$(x' - x)\vec{i} + (y' - y)\vec{j} + (z' - z)\vec{k} = \vec{0}.$$

Comme les vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont linéairement indépendants (ils forment une base), on en déduit que

$$x - x' = y - y' = z - z' = 0.$$

Ou encore $x = x'$, $y = y'$ et $z = z'$. Le triplet $(x\,;y\,;z)$ est donc unique.

$\square$

Proposition 3.9. *Soit $\left(\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k}\right)$ une base de l'espace. Soient a un réel, $\vec{u}\begin{pmatrix}x_{\vec{u}}\\y_{\vec{u}}\\z_{\vec{u}}\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x_{\vec{v}}\\y_{\vec{v}}\\z_{\vec{v}}\end{pmatrix}$ deux vecteurs. Alors les vecteurs $a\vec{u}$ et $\vec{u}+\vec{v}$ ont pour coordonnées :*

1. $[a\vec{u}]\begin{pmatrix}ax_{\vec{u}}\\ay_{\vec{u}}\\az_{\vec{u}}\end{pmatrix}$ *;*

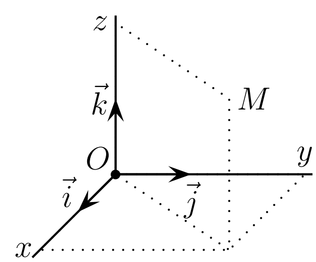
2. $[\vec{u}+\vec{v}]\begin{pmatrix}x_{\vec{u}}+x_{\vec{v}}\\y_{\vec{u}}+y_{\vec{v}}\\z_{\vec{u}}+z_{\vec{v}}\end{pmatrix}$.

Démonstration.

1. $a\vec{u} = a(x_{\vec{u}}\vec{i}+y_{\vec{u}}\vec{j}+z_{\vec{u}}\vec{k}) = (ax_{\vec{u}})\vec{i}+(ay_{\vec{u}})\vec{j}+(az_{\vec{u}})\vec{k}$.
2. Exercice.

□

Définition 3.10. *Soit un repère de l'espace $\left(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k}\right)$. Pour tout point M de l'espace, il existe un unique triplet de réels $(x\,;y\,;z)$ tel que : $\overrightarrow{OM} = x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$. x, y et z sont les* ***coordonnées*** *de M dans le repère $\left(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k}\right)$. x est l'****abscisse*** *de M, y son* ***ordonnée****, et z et sa* ***cote****.*



Proposition 3.10. *Soient $A\,(x_A\,;y_A\,;z_A)$, $B\,(x_B\,;y_B\,;z_B)$ deux points. Alors :*

1. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées : $\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\\z_B-z_A\end{pmatrix}$.

2. Les coordonnées du milieu de $[AB]$ sont $\left(\dfrac{x_A+x_B}{2}\,;\dfrac{y_A+y_B}{2}\,;\dfrac{z_A+z_B}{2}\right)$.

Démonstration.

1. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB} = -x_A\vec{i}-y_A\vec{j}-z_A\vec{k}+x_B\vec{i}+y_B\vec{j}+z_B\vec{k} = (x_B-x_A)\vec{i}+(y_B-y_A)\vec{j}+(z_B-z_A)\vec{k}$.
2. Soit I le milieu de $[AB]$, alors $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ et donc $\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$. On a alors :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OI} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AO}\\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AO}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{AO}\\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}\\ &= \frac{1}{2}(x_A\vec{i}+y_A\vec{j}+z_A\vec{k}+x_B\vec{i}+y_B\vec{j}+z_B\vec{k})\\ &= \frac{x_A+x_B}{2}\vec{i}+\frac{y_A+y_B}{2}\vec{j}+\frac{z_A+z_B}{2}\vec{k}.\end{aligned}$$

□

Exercices : 3.18 à 3.26 ; 3.35 à 3.38.

3.6 Capacités attendues

— Représenter des combinaisons linéaires de vecteurs donnés.

— Exploiter une figure pour exprimer un vecteur comme combinaison linéaire de vecteurs.

— Décrire la position relative de deux droites, d'une droite et d'un plan, de deux plans.

— Lire sur une figure si deux vecteurs d'un plan, trois vecteurs de l'espace, forment une base.

— Lire sur une figure la décomposition d'un vecteur dans une base.

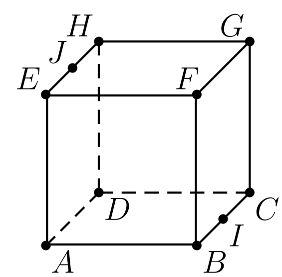
— Étudier géométriquement des problèmes simples de configurations dans l'espace (alignement, colinéarité, parallélisme, coplanarité).

3.7 Exercices

3.7.1 Progresser

Vecteurs de l'espace

Exercice 3.1. On considère le cube $ABCDEFGH$ représenté ci-contre. On note I et J les milieux respectifs des segments $[BC]$ et $[EH]$.

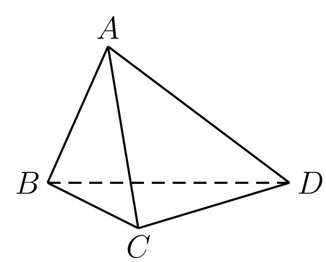


1. Quelle est l'image de I par la translation de vecteur $\overrightarrow{HJ}$?
2. A quel vecteur est égal $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CF}$?
3. Compléter l'égalité : $\overrightarrow{GB} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{H\ldots}$.

Exercice 3.2. Soient $ABCDEFGH$ un cube. Exprimer

1. $\overrightarrow{AC}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$;
2. $\overrightarrow{CF}$ en fonction de $\overrightarrow{HE}$ et $\overrightarrow{HD}$;
3. $\overrightarrow{AG}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$.

Exercice 3.3. $ABCD$ est un tétraèdre. Soient I, J, K et L les milieux respectifs des arêtes $[AB]$, $[CD]$, $[AD]$ et $[BC]$.



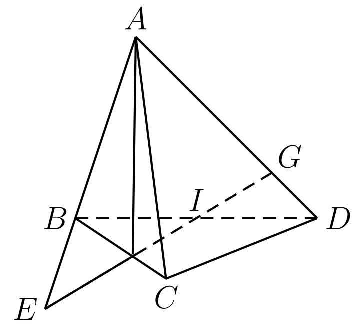
1. Reproduire la figure et y placer les points I, J, K et L.
2. Démontrer que $2\overrightarrow{IL} = \overrightarrow{AC}$ et que $2\overrightarrow{KJ} = \overrightarrow{AC}$.
3. Que peut-on déduire pour le quadrilatère $ILJK$?

Exercice 3.4. [Maîtrise de Chasles] Soient A, B, C, D quatre points de l'espace. On note I, J, K les milieux respectifs de $[AB]$, $[CD]$ et $[IJ]$. Démontrer que pour tout point M de l'espace, $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MK}$.

Droites de l'espace

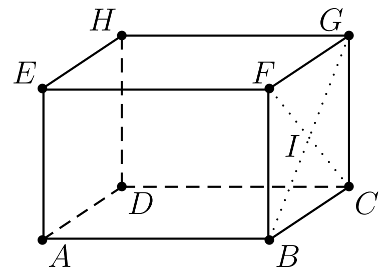
Exercice 3.5. $ABCD$ est un tétraèdre de l'espace. I est le milieu de l'arête $[BD]$, G et E sont les points tels que

$$\overrightarrow{AG} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AD} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AE} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}.$$



1. Exprimer $\overrightarrow{GE}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.
2. Exprimer $\overrightarrow{GI}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.
3. En déduire que les points I, G et E sont alignés.

Exercice 3.6. $ABCDEFGH$ est un parallélépipède rectangle (ou pavé droit). Soit I le centre de la face $BCGF$. Parmi les propositions de droites suivantes, indiquer graphiquement si elles sont coplanaires ou non, puis parallèles ou sécantes.



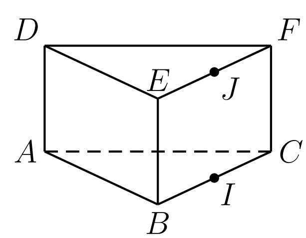
1. (AE) et (CG).
2. (AF) et (DG).
3. (FB) et (HG).
4. (HD) et (EH).
5. (BI) et (HG).
6. (IC) et (DB).

Exercice 3.7. $ABCDEFGH$ est un cube. Soient I le centre de la face $BCGF$, K le milieu de $[HG]$ et J le point tel que $\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BA}$.

1. Faire une figure, puis exprimer chacun des vecteurs $\overrightarrow{AK}$ et $\overrightarrow{IJ}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$.
2. En déduire que les droites (AK) et (IJ) sont parallèles.

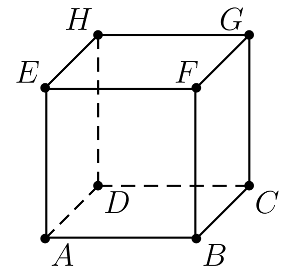
Plans de l'espace

Exercice 3.8. $ABCDEF$ est le prisme droit représenté ci-contre. I et J sont les milieux des arêtes $[BC]$ et $[EF]$. M est le point tel que $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{JC}$. Démontrer que le point M appartient au plan (AEI) de repère $\left(A\,;\overrightarrow{AE}\,;\overrightarrow{AI}\right)$.



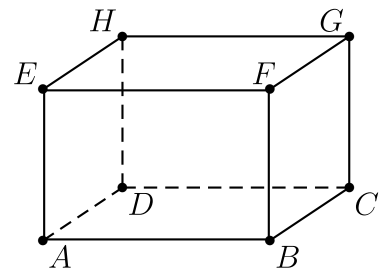
Exercice 3.9. On considère le cube $ABCDEFGH$.

1. Répondre par vrai ou faux en justifiant :
   (a) $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ forment une base du plan (ABC).
   (b) $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{HG}$ engendrent le plan (EFG).
   (c) Le vecteur $\overrightarrow{AE}$ appartient à la direction du plan (ABC).
   (d) Deux droites de l'espace sont soit sécantes, soit parallèles.
2. Donner une base du plan (HEC).



Exercice 3.10. On considère le cube $ABCDEFGH$ représenté ci-contre. Répondre graphiquement aux questions suivantes.

1. La droite (DC) est-elle sécante au plan (ABC) ? Incluse dans (ABC) ? Strictement parallèle à (ABC) ?
2. Même question avec la droite (AB) et le plan (ADF).
3. Même question avec la droite (HC) et le plan (ABF).



Exercice 3.11. $ABCDEFGH$ est un parallélépipède rectangle (ou pavé droit). Pour chacun des couples de plans qui suivent, déterminer graphiquement si ils sont sécants, confondus ou strictement parallèles. Si ils sont sécants, préciser leur droite d'intersection.

1. (ABC) et (FGH) ;
2. (ABF) et (AEG) ;
3. (EFG) et (EHF) ;
4. (ADE) et (BFH).

Exercice 3.12. Soit $ABCDS$ une pyramide régulière de sommet S et dont la base $ABCD$ est un carré de centre O. Déterminer graphiquement l'intersection des plans suivants.

1. (SBO) et (SAC).
2. (ABS) et (SCB).
3. (SAB) et (SDC).

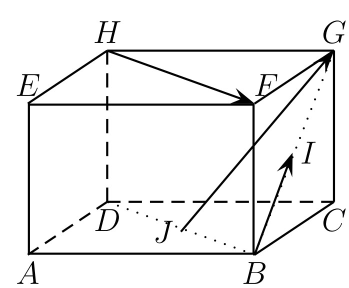
Exercice 3.13. $ABCD$ est un tétraèdre, et I et J sont deux points tels que $\overrightarrow{AI} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AJ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$.

1. Faire une figure et montrer que $\overrightarrow{JI} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$.
2. Que peut-on en déduire pour la droite (IJ) et le plan (BCD) ? Justifier.

Exercice 3.14. $SABCD$ est une pyramide de base le parallélogramme $ABCD$.

1. Faire une figure et justifier que la droite (AB) est parallèle au plan (SDC).
2. Justifier que (SAB) et (SDC) sont deux plans sécants.
3. (a) Construire la droite $\mathscr{D}$ passant par S de vecteur directeur $\overrightarrow{AB}$.
   (b) Expliquer pourquoi la droite $\mathscr{D}$ est incluse dans le plan (SAB).
   (c) Montrer que $\mathscr{D}$ est la droite d'intersection entre les plans (SAB) et (SDC)

Vecteurs coplanaires et linéairement indépendants



Exercice 3.15. Soit $ABCDEFGH$ est les parallélépipède rectangle représenté ci-contre. Soit I le milieu de $[BG]$ et J le milieu de $[DB]$. En exprimant $\overrightarrow{JG}$ en fonction de $\overrightarrow{BI}$ et $\overrightarrow{HF}$ démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{HF}$, $\overrightarrow{JG}$, et $\overrightarrow{BI}$ sont coplanaires.

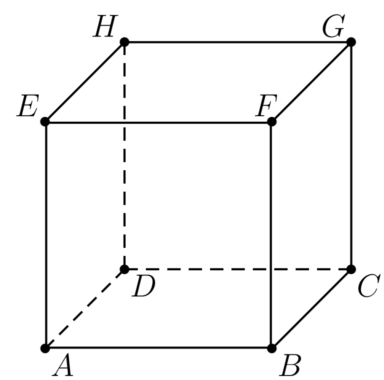
Exercice 3.16. Soit $ABCDEFGH$ un pavé droit. On note I le centre du rectangle $ABCD$. Soient $\vec{u} = 3\overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BE}$ et $\vec{w} = 3\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IE}$. Montrer que les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires.

Exercice 3.17. $ABCDEFGH$ est un parallélépipède rectangle, et I, J et K sont les milieux respectifs des arêtes $[AD]$, $[BC]$ et $[FG]$.

1. Démontrer que $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{IG}$.
2. En déduire l'expression de $\overrightarrow{AK}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IH}$.
3. En déduire que la droite (AK) est parallèle au plan (IJH).

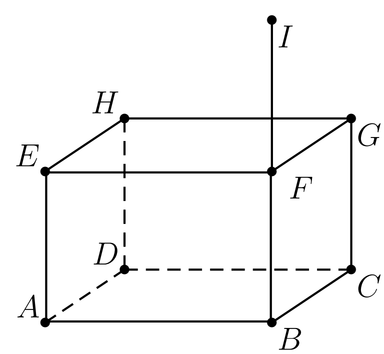
Bases et repères de l'espace

Exercice 3.18. On considère le cube $ABCDEFGH$ représenté ci-dessous.



1. Justifier que $\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AD}\,;\overrightarrow{AE}\right)$ est une base de l'espace.
2. Donner deux autres bases de l'espace.
3. Soit I et J les milieux respectifs de $[AB]$ et $[HG]$.
   (a) Placer I et J sur la figure.
   (b) Exprimer $\overrightarrow{IJ}$ en fonction des vecteurs de la base $\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AD}\,;\overrightarrow{AE}\right)$.

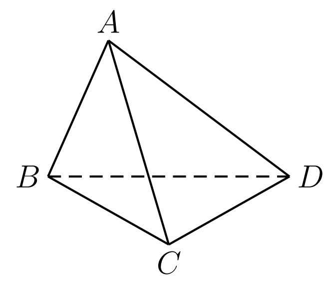
Exercice 3.19. $ABCDEFGH$ est un parallélépipède rectangle ci-contre. Soit I le point de la droite (FB) tel que $FB = FI$.



1. Justifier que $\left(\overrightarrow{DA}\,;\overrightarrow{DC}\,;\overrightarrow{DH}\right)$ est une base de l'espace.
2. Quelles sont les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{DI}$ dans cette base ?
3. Quelles sont les coordonnées du point I dans le repère $\left(D\,;\overrightarrow{DA}\,;\overrightarrow{DC}\,;\overrightarrow{DH}\right)$?
4. Donner les coordonnées des autres points de la figure dans ce même repère.
5. Donner les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{GA}$ dans la base $\left(\overrightarrow{DA}\,;\overrightarrow{DC}\,;\overrightarrow{DH}\right)$.

Exercice 3.20. Dans une base on donne les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\1\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}-1\\-5\\-3\end{pmatrix}$.

1. Calculer les coordonnées du vecteur $2\vec{u} - \vec{v} - \vec{w}$.
2. Que peut-on dire de ces trois vecteurs ?



Exercice 3.21. $ABCD$ est un tétraèdre. Soient I, J et K les milieux respectifs des arêtes $[AB]$, $[AC]$ et $[AD]$. Soit L le milieu du segment $[JK]$.

1. Reproduire la figure et y placer les points I, J, K et L.
2. Déterminer les coordonnées de tous les points de la figure dans le repère $\left(A\,;\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}\,;\overrightarrow{AD}\right)$.
3. Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{IL}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont coplanaires.

Exercice 3.22. [Changement de repère] Soit $ABCD$ un tétraèdre. On note I le milieu de $[CD]$ et J le milieu de $[BD]$.

1. Faire une figure.
2. Dans le repère $\left(A\,;\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}\,;\overrightarrow{AD}\right)$ donner les coordonnées de tous les points de la figure. Puis exprimer le vecteur $\overrightarrow{BD}$ dans la base $\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}\,;\overrightarrow{AD}\right)$.
3. Dans le repère $\left(B\,;\overrightarrow{BA}\,;\overrightarrow{BC}\,;\overrightarrow{BD}\right)$. Donner les coordonnées des points de la figure.

Exercice 3.23. Dans un repère $\left(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k}\right)$, soient les points $A\,(-1\,;4\,;-3)$ et $B\,(2\,;1\,;3)$. Déterminer les coordonnées de M vérifiant $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.

Exercice 3.24. On considère les points $A\,(0\,;1\,;1)$, $B\,(2\,;1\,;1)$, $C\,(3\,;1\,;1)$ et $D\,(1\,;1\,;1)$.

1. Démontrer que $ABCD$ est un parallélogramme.
2. Soit E le point de coordonnées $(2\,;2\,;4)$. Déterminer les coordonnées du point F telles que $ACEF$ soit un parallélogramme.
3. Soit I le point de l'espace tel que F soit le milieu de $[AI]$ et J le milieu de $[EF]$. Démontrer que J est le milieu de $[IC]$.

Exercice 3.25. $\left(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k}\right)$ est un repère de l'espace. On donne les points : $A\,(1\,;0\,;3)$, $B\,(3\,;-1\,;2)$ et $M\,(x\,;y\,;-2)$ avec x et y des nombres réels. Existe-t-il des valeurs de x et y telles que les points A, B et M soient alignés ?

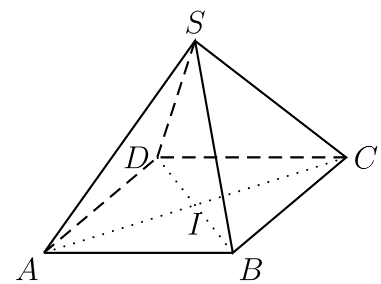
Exercice 3.26. Dans un repère de l'espace, on donne les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}$ et le point $A\,(-1\,;2\,;3)$. On note $\mathscr{P}$ le plan $(A\,;\vec{u}\,;\vec{v})$.

1. Démontrer que le point $B\,(1\,;-1\,;0)$ appartient au plan $\mathscr{P}$.
2. Le point $C\,(-2\,;7\,;10)$ appartient-il au plan $\mathscr{P}$?

3.7.2 S'entraîner

Vecteurs de l'espace

Exercice 3.27. $ABCDS$ est une pyramide de sommet S dont la base est un parallélogramme $ABCD$ de centre I.



1. À l'aide de la relation de Chasles, exprimer le vecteur $\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SD}$ en fonction de $\overrightarrow{SI}$.
2. En déduire l'expression de $\overrightarrow{SI}$ en fonction de $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BS}$.

Exercice 3.28. Soit $ABCDEFGH$ un cube. On note I le centre du carré $ABCD$, J le centre du carré $EFGH$ et K le milieu de $[IJ]$.

1. Faire une figure.
2. Exprimer chacun des vecteurs $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{AK}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$.
3. En déduire que K est le milieu de $[AG]$.

Exercice 3.29. [Maîtrise de Chasles] Soit $ABCD$ un quadrilatère quelconque et I, J, K, L les milieux respectifs de $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[DA]$. Montrer que $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{LK}$.

Plans de l'espace

Exercice 3.30. Soit $ABCDEFGH$ un cube. On définit les points P, Q et R par les relations vectorielles :

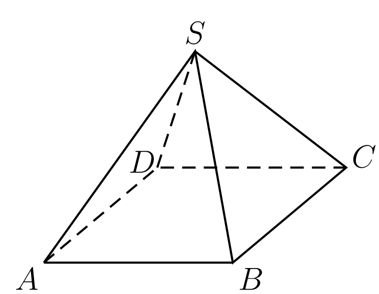
$$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE},\quad \overrightarrow{AQ}=-\overrightarrow{AD}+2\overrightarrow{AE}\quad \text{et}\quad \overrightarrow{AR}=\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AD}+3\overrightarrow{AE}.$$

1. En raisonnant par l'absurde, montrer que $\overrightarrow{AP}$ et $\overrightarrow{AQ}$ sont non colinéaires.
2. En déduire que $\left(\overrightarrow{AP}\,;\overrightarrow{AQ}\right)$ est une base du plan (APQ).¨
3. Démontrer que les points A, P, Q et R sont coplanaires.

Exercice 3.31. Soit $ABCDS$ une pyramide régulière de sommet S et dont la base $ABCD$ est un carré. On note I le milieu de $[SA]$ et J le milieu de $[SB]$.

1. Démontrer que (DC) et (IJ) sont parallèles.
2. Démontrer que la droite (IJ) et le plan (SDC) sont parallèles.

Exercice 3.32. $SABCD$ est une pyramide de sommet S dont la base est un parallélogramme $ABCD$.



1. Reproduire la figure, et placer les points I, J et K tels que

$$\overrightarrow{SI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{SA},\quad \overrightarrow{SJ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{SB}\quad \text{et}\quad \overrightarrow{SK}=\frac{1}{3}\overrightarrow{SC}.$$

2. Montrer que les plans (IJK) et (ABC) sont strictement parallèles.

Vecteurs coplanaires et linéairement indépendants

Exercice 3.33. $ABCDEFGH$ est un parallélépipède rectangle, et I et J sont les points définis par :

$$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{BJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{4}\overrightarrow{BF}.$$

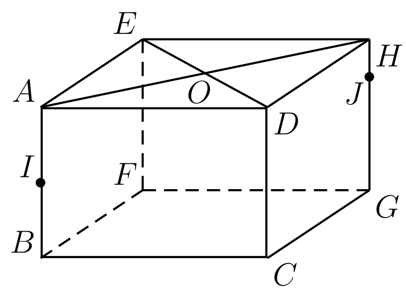
1. Réaliser une figure.
2. Exprimer chacun des vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{AG}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$.
3. Les droites (IJ) et (AG) sont elles parallèles ? Justifier.

Exercice 3.34. Soit $ABCDEFGH$ un cube, et I, J, K les milieux respectifs des arêtes $[AB]$, $[GC]$ et $[EH]$.

1. Donner trois points du plan $(A; \overrightarrow{EF}, \overrightarrow{EH})$.
2. Existe-t-il des réels λ et μ tels que $\overrightarrow{GJ} = \lambda\overrightarrow{GK} + \mu\overrightarrow{GE}$? Si oui les déterminer.
3. Les vecteurs $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DH}$ et $\overrightarrow{BJ}$ sont-ils coplanaires ?
4. Les plans $\left(J\,;\overrightarrow{ID}\,;\overrightarrow{IC}\right)$ et $\left(K\,;\overrightarrow{EF}\,;\overrightarrow{EG}\right)$ sont-ils parallèles ?

Bases et repères de l'espace

Exercice 3.35. $ABCDEFGH$ est un parallélépipède rectangle. On note I le milieu de $[AB]$, O le centre de la face $ADHE$ et J le point défini par $\overrightarrow{HJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{HG}$.



1. Justifier que $\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AD}\,;\overrightarrow{AE}\right)$ est une base de l'espace.
2. Donner les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{BJ}$ dans cette base.

Exercice 3.36. Soit $ABCDEFGH$ un cube. On se place dans le repère $(A\,;\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AD}\,;\overrightarrow{AE})$. On note I le milieu de $[AB]$ et J le point défini par $\overrightarrow{AJ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$. Démontrer que les points I, J et G sont alignés.

Exercice 3.37. On se place dans un repère $\left(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k}\right)$ de l'espace. Les questions de l'exercice sont indépendantes les unes des autres.

1. On donne les points $A\,(1\,;-3\,;4)$, $B\,(2\,;-1\,;1)$ et $C\,(-1\,;0\,;2)$. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $-3\overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{AB}$ et $2\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{CA}$.
2. Soient $D\,(1\,;2\,;1)$, $E\,(2\,;-1\,;3)$ et $F\,(3\,;-4\,;5)$. Démontrer que les points D, E, F sont alignés.
3. Soient les points $G\,(2\,;3\,;-2)$, $H\,(1\,;3\,;1)$ et $L\,(-1\,;1\,;0)$. Démontrer que les points G, H, L définissent un repère du plan.
4. Soient $M\,(1\,;2\,;1)$, $N\,(-1\,;-2\,;3)$ et $P\,(1\,;2\,;5)$. Montrer que les points O, M, N et P sont coplanaires.

Exercice 3.38. Soient $A\,(1\,;2\,;1)$, $B\,(1\,;-1\,;1)$ et $C\,(3\,;1\,;2)$ trois points de l'espace. On note I le milieu de $[BC]$.

1. Déterminer les coordonnées du point G, le centre de gravité du triangle ABC, défini par $\overrightarrow{AG} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AI}$.
2. Soit $E\,(3\,;7\,;2)$, déterminer les coordonnées du point F telles que $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AB}$.
3. On note J le milieu de $[BE]$. Les points G, J et F sont-ils alignés ? Justifier.

3.7.3 Le Flashback !

Flashback 3.1. [Extrait du bac 2022, Amérique du Nord] Pour chacune des affirmations, indiquer si elles sont vraies ou fausses en justifiant.

1. **Affirmation 1 :** pour tout réel x : $1 - \dfrac{1-\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x} = \dfrac{2}{1+\mathrm{e}^{-x}}$.
2. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2\mathrm{e}^{-x}$ et on note $\mathscr{C}$ sa courbe dans un repère orthonormé. **Affirmation 2 :** l'axe des abscisses est tangent à la courbe $\mathscr{C}$ en un seul point.
3. On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \mathrm{e}^x\left(1-x^2\right)$. **Affirmation 3 :** Dans le plan muni d'un repère orthonormé, la courbe représentative de la fonction h n'admet pas de point d'inflexion.
4. **Affirmation 4 :** Pour tout réel x, $1 + \mathrm{e}^{2x} \geqslant 2\mathrm{e}^x$.