

Chapitre 2

Calcul littéral

2.1 Fractions

Proposition 2.1. [*Multiplication et division*] Pour tous a, b, c et d réels avec $b \neq 0$ et $d \neq 0$, on a

1. $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$;
2. $\frac{a \times c}{a \times d} = \frac{c}{d}$;
3. $a \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{d}$;
4. $\frac{a/b}{c/d} = \frac{a \times d}{b \times c}$.

Exemples :

1. $\frac{4}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{4 \times 2}{5 \times 3} = \frac{8}{15}$.
2. $\frac{4}{12} = \frac{4 \times 1}{4 \times 3} = \frac{1}{3}$.
3. $x \times \frac{4}{7} = \frac{4x}{7}$.
4. $\frac{2/3}{5/6} = \frac{2 \times 6}{3 \times 5} = \frac{2 \times 2 \times 3}{3 \times 5} = \frac{4}{5}$.

Proposition 2.2. [*Addition et soustraction*] Pour tous a, b et c réels avec $c \neq 0$, on a

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}.$$

Remarque : pour additionner ou soustraire plusieurs fractions, il faut que celles-ci soient au même dénominateur .

Exemples :

1. $\frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{3-1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.
2. $\frac{1}{3} + \frac{5}{6} = \frac{2}{6} + \frac{5}{6} = \frac{2+5}{6} = \frac{7}{6}$.
3. $x + \frac{x}{2} = \frac{2x}{2} + \frac{x}{2} = \frac{2x+x}{2} = \frac{3x}{2}$.

Exercices : 2.1 ; 2.18.

2.2 Puissances et racine carrée

Proposition 2.3. Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, $m, n \in \mathbb{N}$. On a

- | | |
|--|---|
| 1. $a^m \times a^n = a^{m+n}$; | 4. $(a^m)^n = a^{m \times n}$; |
| 2. si $a \neq 0$, $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$; | 5. $(ab)^n = a^n \times b^n$; |
| 3. si $a \neq 0$, $a^{-1} = \frac{1}{a}$; | 6. si $b \neq 0$, $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$. |

Exemples :

- | | |
|--|---|
| 1. $2^3 \times 2^4 = 2^{3+4} = 2^7$; | 4. $(c^2)^{10} = c^{2 \times 10} = c^{20}$; |
| 2. $\frac{3^4}{3^3} = 3^{4-1} = 3^1 = 3$; | 5. $(4x)^2 = 4^2 x^2 = 16x^2$; |
| 3. $10^{-1} = \frac{1}{10}$; | 6. $\left(\frac{1}{x}\right)^2 = \frac{1^2}{x^2} = \frac{1}{x^2}$. |

Proposition 2.4. Soient $a, b \in \mathbb{R}_+$. On a

- | | |
|---|---|
| 1. $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$; | 2. Si $b \neq 0$, $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$. |
|---|---|

Exemples :

- $\sqrt{20} = \sqrt{4 \times 5} = \sqrt{4} \times \sqrt{5} = 2\sqrt{5}$.
- $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{8}{2}} = \sqrt{4} = 2$.

Remarques : attention, en général, $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$. Par exemple,

$$\sqrt{1+1} = \sqrt{2} \neq 2 = 1+1 = \sqrt{1} + \sqrt{1}.$$

Exercices : 2.2 à 2.7; 2.19 et 2.21.

2.3 Développer et factoriser

2.3.1 Développer

Proposition 2.5. Soient A, B, C et D quatre réels. On a

Simple distributivité : $A \times (B+C) = A \times B + A \times C$.

Double distributivité : $(A+B) \times (C+D) = A \times C + A \times D + B \times C + B \times D$.

Exemples :

1. [Simple distributivité] Développons $-5(3x - 1)$.

$$-5(3x - 1) = -5 \times (3x) - (-5) \times 1 = -15x + 5.$$

2. [Double distributivité] Développons $(6 - 2x)(5x + 1)$.

$$\begin{aligned}(6 - 2x)(5x + 1) &= 6 \times (-2x) + 6 \times 1 - 2x \times 5x - 2x \times 1 \\ &= -12x + 6 - 10x^2 - 2x \\ &= -10x^2 - 14x + 6.\end{aligned}$$

2.3.2 Factorisation

Proposition 2.6. Soient A , B et C trois réels. On a

$$A \times B + A \times C = A \times (B + C).$$

Méthode :

1. On détermine le facteur commun aux différents termes de la somme .
2. On factorise par le facteur commun et on met entre parenthèse, ou crochets, tous les termes restant en conservant les opérations qui vont avec .
3. On réduit si possible les termes entre parenthèses.

Exemples :

1. Factorisons $(2x - 7)(6x - 9) - (4x - 5)(2x - 7)$. On observe que $2x - 7$ est le facteur commun. On a

$$\begin{aligned}(2x - 7)(6x - 9) - (4x - 5)(2x - 7) &= (2x - 7)[(6x - 9) - (4x - 5)] \\ &= (2x - 7)(6x - 9 - 4x + 5) \\ &= (2x - 7)(2x - 4).\end{aligned}$$

2. Factorisons $4x^3 - 2x^2$. On a

$$4x^3 - 2x^2 = 2 \times 2 \times x \times x^2 - 2x^2 \times 1 = 2x^2(2x - 1).$$

Exercices : 2.8 à 2.12 ; 2.22 à 2.23.



2.4 Identités remarquables

Exercices développement et factorisation : 2.8 à 2.12 ; 2.22 et 2.23.

Proposition 2.7. Pour tous nombres réels a et b , on a :

1. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.
2. $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.
3. $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$.

Exemples :

1. $(a + 3)^2 = a^2 + 6a + 9$.
2. $(2z - 1)^2 = 4z^2 - 4z + 1$.
3. $y^2 - 25 = (y - 5)(y + 5)$.
4. $(w + 2t)(w - 2t) = w^2 - 4t^2$.

Méthode du conjugué : Les identités remarquables permettent de retirer des racines carrées au dénominateur d'une fraction en multipliant au numérateur et au dénominateur par la même quantité : le **conjugué**. Par exemple :

$$\frac{1}{\sqrt{2} - 1} = \frac{1 \times (\sqrt{2} + 1)}{(\sqrt{2} - 1) \times (\sqrt{2} + 1)} = \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2}^2 - 1^2} = \frac{\sqrt{2} + 1}{2 - 1} = \sqrt{2} + 1.$$

Le conjugué de $\sqrt{2} - 1$ est $\sqrt{2} + 1$ et réciproquement ; de façon générale, le conjugué de $a - b$ est $a + b$ où a et b sont deux réels.

Exercices : 2.13 à 2.17 ; 2.24 à 2.28.

2.5 Capacités attendues

- Effectuer des calculs numériques ou littéraux mettant en jeu des puissances, des racines carrées, des écritures fractionnaires.
- Développer, factoriser, réduire une expression.
- Connaître les identités remarquables et savoir les utiliser dans les deux sens.
- Choisir la forme la plus adaptée (factorisée, développée réduite) d'une expression en vue de la résolution d'un problème.

2.6 Exercices

2.6.1 Progresser

Fractions

Exercice 2.1. Simplifier les fractions suivantes :

$$1. \frac{1}{2} + \frac{2}{3};$$

$$4. \frac{2/3}{4/3};$$

$$7. \frac{25/16}{10/32};$$

$$2. \frac{1}{2} \times \frac{2}{3};$$

$$5. \frac{6/5}{3/20};$$

$$8. \frac{\frac{1}{2} - 1}{\frac{1}{2} + 1};$$

$$3. 3 + \frac{3}{2};$$

$$6. \frac{21/4}{7/8};$$

$$9. \frac{\frac{1}{5} + 2}{\frac{1}{5} - 2} \times \frac{1 - \frac{1}{3}}{1 + \frac{1}{3}}.$$

Puissances et racine carrée

Exercice 2.2. Simplifier les expressions suivantes :

$$1. 2^3 \times 2^5;$$

$$3. 4^5 \times 8^9;$$

$$5. (9r)^3 \times (2r)^2;$$

$$7. \frac{n^2}{m^5} \times n^3$$

$$2. \frac{13^2}{13^7};$$

$$4. \frac{(4a)^3}{2a^9};$$

$$6. \frac{n^6 \times m^7}{n^2 \times m^3};$$

$$\frac{n^9}{m^8} \times m^5.$$

Exercice 2.3. Écrire sous la forme $a\sqrt{b}$ avec $a, b \in \mathbb{R}_+$, b le plus petit possible.

$$1. \sqrt{27};$$

$$2. \sqrt{32};$$

$$3. \sqrt{50};$$

$$4. \sqrt{64}.$$

Exercice 2.4. Démontrer que, pour tout entier naturel n , on a : $2^n + 2^n = 2^{n+1}$.

Exercice 2.5. Calculer sans calculatrice :

$$1. \frac{3^{999} + 3^{999} + 3^{999}}{3^{1000}};$$

$$2. \frac{3^{27} - 3^{29}}{3^{28}}.$$

Exercice 2.6. Sans utiliser la calculatrice, écrire sous la forme $\frac{a}{b}$ ou $a\sqrt{b}$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}$ le plus petit possible.

$$1. A = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4};$$

$$3. C = \frac{\frac{3}{2} - \frac{7}{5}}{\frac{2}{5} \times \frac{4}{3} + 1};$$

$$5. E = 5\sqrt{27} - 3\sqrt{48};$$

$$2. B = \frac{2}{3} - \frac{3}{4} + 3 \left(\frac{4}{5} - \frac{5}{6} \right);$$

$$4. D = \sqrt{36 + 64};$$

$$6. F = \frac{\sqrt{81}}{\sqrt{242}} \times \frac{\sqrt{92}}{\sqrt{25}}.$$

Exercice 2.7. Démontrer que, pour tout entier naturel n , on a : $12 \times \frac{1 - \frac{1}{5^{n+1}}}{1 - \frac{1}{5}} = 15 - \frac{3}{5^n}$.



Développer et factoriser

Exercice 2.8. Simplifier les expressions suivantes :

$$1. \ x^2 - x + 6x^2 + 3x - 9; \quad 2. \ 3 - 2a + 8a^2 - (a - 1); \quad 3. \ 3b + 5b^2 - (2b + 1).$$

Exercice 2.9. Développer et réduire les expressions suivantes :

$$\begin{array}{ll} 1. \ 3(2 + x); & 5. \ (t - 2)(2 - t); \\ 2. \ a(3 - a); & 6. \ -z(2 - z); \\ 3. \ -2(y - 7); & 7. \ (x - 3)(1 - 2x) + 3x^2; \\ 4. \ (r + 2)(r + 3); & 8. \ y(y - 6)(y + 4) - 5. \end{array}$$

Exercice 2.10. Factoriser les expressions suivantes :

$$\begin{array}{lll} 1. \ 2x + 2y; & 3. \ 3z^2 - (z + 1)z^2; & 5. \ (g - 5)(g + 4) - (4 + g)(g + 5); \\ 2. \ x^2 - 2x; & 4. \ 2(y + 1) - 3(y + 1)^2; & 6. \ p^4 + 3p^3 + 2p^2. \end{array}$$

Exercice 2.11. Soit n un entier naturel. Factoriser les expressions suivantes :

$$1. \ A = 3\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1} - 3\left(\frac{2}{5}\right)^n; \quad 2. \ B = -2 \times 5^{n+1} + 2 \times 5^n; \quad 3. \ C = (n + 1) \times 2^{n+1} - n \times 2^n.$$

Exercice 2.12. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Étudier le signe de $\frac{3^{n+1}}{n+1} - \frac{3^n}{n}$.

Identités remarquables

Exercice 2.13. Développer les expressions suivantes à l'aide d'identités remarquables :

$$1. \ (x + 1)^2; \quad 2. \ (y - 2)^2; \quad 3. \ (z + 2)(z - 2); \quad 4. \ (2b - 3)^2.$$

Exercice 2.14. Factoriser les expressions suivantes à l'aide d'identités remarquables :

$$1. \ x^2 - 3^2; \quad 2. \ 25 - y^2; \quad 3. \ a^2 + 2a + 1; \quad 4. \ b^2 - 4b + 4.$$

Exercice 2.15. Écrire sans racine carrée au dénominateur et simplifier les expressions suivantes :

$$1. \ A = \frac{3}{\sqrt{5} + 1}; \quad 2. \ B = \frac{-2}{\sqrt{7} - 2}; \quad 3. \ C = \frac{1 + \sqrt{5}}{3 - \sqrt{5}}; \quad 4. \ D = \frac{6 - \sqrt{2}}{4 - \sqrt{2}}.$$

Exercice 2.16. Développer les expressions suivantes.

$$\begin{array}{ll} 1. \ u(3u + 1)(3u - 1); & 3. \ -3h(2 - 5h)^2; \\ 2. \ \frac{1}{4} - (3y + 2)^2; & 4. \ (n + 1)^2 - (n - 1)^2. \end{array}$$

Exercice 2.17. Factoriser les expressions suivantes.

$$1. (r+1)^2 - 36;$$

$$2. 16 - (3x+2)^2;$$

$$3. (3+g)^2 - (5+2g)^2;$$

$$4. (k+1) - 2k(k+1) + k^2(k+1).$$

2.6.2 S'entraîner

Fractions

Exercice 2.18. Simplifier les fractions suivantes :

$$1. \frac{4}{3} + \frac{1}{8};$$

$$4. \frac{z}{6} - \frac{2}{3};$$

$$7. \frac{36/5}{24/5};$$

$$2. \frac{3}{7} \times \frac{14}{6};$$

$$5. \frac{a}{35} \times \frac{7}{3a};$$

$$8. \frac{\frac{1}{3} - 1}{\frac{1}{3} + 1};$$

$$3. 5 + \frac{4}{9};$$

$$6. \frac{x}{3} - \frac{5x}{4};$$

$$9. \frac{\frac{1}{4} + 2}{\frac{1}{4} - 2} \times \frac{3 - \frac{1}{2}}{3 + \frac{1}{2}}.$$

Puissances et racine carrée

Exercice 2.19. Simplifier les expressions suivantes :

$$1. 5^4 \times 5^8;$$

$$3. 9^{30} \times 27^{18};$$

$$5. (3r)^4 \times (6r)^3;$$

$$2. \frac{17^4}{17^2};$$

$$4. \frac{(2a)^8}{4a^{10}};$$

$$6. \frac{n^{12} \times m^{32}}{n^{90} \times m^{15}}.$$

Exercice 2.20. Écrire sous la forme $a\sqrt{b}$ avec $a, b \in \mathbb{R}_+$, b le plus petit possible.

$$1. \sqrt{18};$$

$$2. \sqrt{75};$$

$$3. \sqrt{40};$$

$$4. \sqrt{128}.$$

Exercice 2.21. Calculer ou simplifier sans calculatrice les expressions suivantes :

$$1. A = \frac{a^2(-a)^3(-b)^2b^5a}{(-b)^4a^5(ab)^2}, a \neq 0, b \neq 0;$$

$$3. C = \sqrt{2^6(1+2^3)};$$

$$2. B = \frac{a^2 + ab}{b^2 + ab}, b^2 + ab \neq 0;$$

$$4. D = \frac{\frac{1}{1-\pi} - \frac{1}{1+\pi}}{1 + \frac{1}{\pi^2-1}}.$$

Développer et factoriser

Exercice 2.22. Développer et réduire les expressions suivantes :

$$1. 7(x+4);$$

$$2. -2a(7+a);$$

$$3. -4(3y+1);$$

$$4. (r+5)(r-11);$$

$$5. (2t-3)(4-5t);$$

$$6. (3z+5)(2-z) - 6z.$$



2.6. EXERCICES

Exercice 2.23. Factoriser les expressions suivantes :

$$\begin{array}{lll} 1. \ 3x + 3y; & 4. \ x^2 + 5x; & 7. \ 3s^2 - 5s; \\ 2. \ 6a - 12b; & 5. \ (7z + 1)z^2 - 5z^2; & 8. \ l^2(4 - 2l) - 3l(4 - 2l); \\ 3. \ x + 2cx; & 6. \ (y - 8)^2 - 6(y - 8); & 9. \ (s + 1)^4 - 3(s + 1). \end{array}$$

Identités remarquables

Exercice 2.24. Développer les expressions suivantes à l'aide d'identités remarquables :

$$1. \ (x + 2)^2; \quad 2. \ (6 - y)^2; \quad 3. \ (z + 7)(z - 7); \quad 4. \ (3b - 9)^2;$$

Exercice 2.25. Factoriser les expressions suivantes à l'aide d'identités remarquables :

$$1. \ x^2 - 5^2; \quad 2. \ 64 - y^2; \quad 3. \ a^2 - 2a + 1; \quad 4. \ b^2 + 6b + 9.$$

Exercice 2.26. Écrire sans racine carrée au dénominateur et simplifier les expressions suivantes :

$$1. \ A = \frac{1}{\sqrt{2} + 1}; \quad 2. \ B = \frac{-1}{\sqrt{6} - 6}; \quad 3. \ C = \frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}; \quad 4. \ D = \frac{\sqrt{7} + 1}{\sqrt{7} - 1}.$$

Exercice 2.27. Développer les expressions suivantes et réduire :

$$\begin{array}{lll} 1. \ 5t(t + 4)(t - 4); & 3. \ (3r - 4)^2(5r + 1) - 4; & 5. \ p^2(3p + 12) - 3p^3; \\ 2. \ (m + 1)^2(m - 1)^2; & 4. \ u(u + 1)(u - 1) - u^2; & 6. \ k(17 - k)(3k + 2)^2 - k^4. \end{array}$$

Exercice 2.28. Factoriser les expressions suivantes :

$$\begin{array}{lll} 1. \ (2t - 4)^2 - 25; & & 3. \ (1 - 7h) + 4h(1 - 7h) + 4h^2(1 - 7h). \\ 2. \ f^2 - (1 - f)^2; & & \end{array}$$

2.6.3 Le Flashback !

Flashback 2.1. Donner les complémentaires de A dans E dans chacun des cas suivants.

$$\begin{array}{lll} 1. \ E = \mathbb{R} \text{ et } A = [8; +\infty[; & 3. \ E = \mathbb{R} \text{ et } A =]-\infty; 3] \cup]5; +\infty[. \\ 2. \ E = \mathbb{R} \text{ et } A =]-6; 2[. & 4. \ E =]-\infty; 1[\text{ et } A =]-\infty; -1]. \end{array}$$

Flashback 2.2. Représenter graphiquement les unions et intersections suivantes et dire à quel ensemble elles sont égales.

$$\begin{array}{lll} 1. \ [-1; 3] \cap]2; +\infty[; & 4. \ [-3; 0] \cap \mathbb{N}; & 7. \]-\infty; 1[\cup]-1; +\infty[; \\ 2. \]-\infty; -5[\cap [-10; -5]; & 5. \]-1; 1[\cap \mathbb{Z}; & 8. \]-1; 1[\cup [-2; 2]; \\ 3. \]-3; 0[\cap \mathbb{N}; & 6. \]-4; -1] \cup]-1; 0[; & 9. \ \mathbb{R} \cup \mathbb{Z}. \end{array}$$