

# Chapitre 2

## Calcul littéral

### 2.1 Fractions

**Proposition 2.1.** [*Multiplication et division*] Pour tous  $a, b, c$  et  $d$  réels avec  $b \neq 0$  et  $d \neq 0$ , on a

$$1. \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d};$$

$$3. a \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{d};$$

$$2. \frac{a \times c}{a \times d} = \frac{c}{d};$$

$$4. \frac{a/b}{c/d} = \frac{a \times d}{b \times c}.$$

**Exemples :**

$$1. \frac{4}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{4 \times 2}{5 \times 3} = \frac{8}{15}.$$

$$3. x \times \frac{4}{7} = \frac{4x}{7}.$$

$$2. \frac{4}{12} = \frac{4 \times 1}{4 \times 3} = \frac{1}{3}.$$

$$4. \frac{2/3}{5/6} = \frac{2 \times 6}{3 \times 5} = \frac{2 \times 2 \times 3}{3 \times 5} = \frac{4}{5}.$$

**Proposition 2.2.** [*Addition et soustraction*] Pour tous  $a, b$  et  $c$  réels avec  $c \neq 0$ , on a

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}.$$

**Remarque :** pour additionner ou soustraire plusieurs fractions, il faut que celles-ci soient au même dénominateur .

**Exemples :**

$$1. \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{3-1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

$$3. x + \frac{x}{2} = \frac{2x}{2} + \frac{x}{2} = \frac{2x+x}{2} = \frac{3x}{2}.$$

$$2. \frac{1}{3} + \frac{5}{6} = \frac{2}{6} + \frac{5}{6} = \frac{2+5}{6} = \frac{7}{6}.$$

**Exercices :** 2.1; 2.18.

## 2.2 Puissances et racine carrée

**Proposition 2.3.** *Pour tous  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $m, n \in \mathbb{N}$ . On a*

- |  |   |
|--|---|
| 1. $a^m \times a^n = a^{m+n}$ ;                  | 4. $(a^m)^n = a^{m \times n}$ ;                                     |
| 2. si $a \neq 0$ , $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ ; | 5. $(ab)^n = a^n \times b^n$ ;                                      |
| 3. si $a \neq 0$ , $a^{-1} = \frac{1}{a}$ ;      | 6. si $b \neq 0$ , $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ . |

**Exemples :**

- |  |   |
|--|---|
| 1. $2^3 \times 2^4 = 2^{3+4} = 2^7$ ;      | 4. $(c^2)^{10} = c^{2 \times 10} = c^{20}$ ;                        |
| 2. $\frac{3^4}{3^3} = 3^{4-1} = 3^1 = 3$ ; | 5. $(4x)^2 = 4^2 x^2 = 16x^2$ ;                                     |
| 3. $10^{-1} = \frac{1}{10}$ ;              | 6. $\left(\frac{1}{x}\right)^2 = \frac{1^2}{x^2} = \frac{1}{x^2}$ . |

**Proposition 2.4.** *Soient  $a, b \in \mathbb{R}_+$ . On a*

- |   |   |
|---|---|
| 1. $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$ ; | 2. Si $b \neq 0$ , $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ . |
|---|---|

**Exemples :**

- $\sqrt{20} = \sqrt{4 \times 5} = \sqrt{4} \times \sqrt{5} = 2\sqrt{5}$ .
- $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{8}{2}} = \sqrt{4} = 2$ .

**Remarques :** attention, en général,  $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$ . Par exemple,

$$\sqrt{1+1} = \sqrt{2} \neq 2 = 1+1 = \sqrt{1} + \sqrt{1}.$$

**Exercices :** 2.2 à 2.7 ; 2.19 et 2.21.

## 2.3 Développer et factoriser

### 2.3.1 Développer

**Proposition 2.5.** *Soient  $A, B, C$  et  $D$  quatre réels. On a*

**Simple distributivité :**  $A \times (B + C) = A \times B + A \times C$ .

**Double distributivité :**  $(A + B) \times (C + D) = A \times C + A \times D + B \times C + B \times D$ .

**Exemples :**

1. **[Simple distributivité]** Développons  $-5(3x - 1)$ .

$$-5(3x - 1) = -5 \times (3x) - (-5) \times 1 = -15x + 5.$$

2. **[Double distributivité]** Développons  $(6 - 2x)(5x + 1)$ .

$$\begin{aligned}(6 - 2x)(5x + 1) &= 6 \times (-2x) + 6 \times 1 - 2x \times 5x - 2x \times 1 \\ &= -12x + 6 - 10x^2 - 2x \\ &= -10x^2 - 14x + 6.\end{aligned}$$

**2.3.2 Factorisation**

**Proposition 2.6.** Soient  $A$ ,  $B$  et  $C$  trois réels. On a

$$A \times B + A \times C = A \times (B + C).$$

**Méthode :**

1. On détermine le facteur commun aux différents termes de la somme .
2. On factorise par le facteur commun et on met entre parenthèse, ou crochets, tous les termes restant en conservant les opérations qui vont avec .
3. On réduit si possible les termes entre parenthèses.

**Exemples :**

1. Factorisons  $(2x - 7)(6x - 9) - (4x - 5)(2x - 7)$ . On observe que  $2x - 7$  est le facteur commun. On a

$$\begin{aligned}(2x - 7)(6x - 9) - (4x - 5)(2x - 7) &= (2x - 7)[(6x - 9) - (4x - 5)] \\ &= (2x - 7)(6x - 9 - 4x + 5) \\ &= (2x - 7)(2x - 4).\end{aligned}$$

2. Factorisons  $4x^3 - 2x^2$ . On a

$$4x^3 - 2x^2 = 2 \times 2 \times x \times x^2 - 2x^2 \times 1 = 2x^2(2x - 1).$$

**Exercices :** 2.8 à 2.12 ; 2.22 à 2.23.



## 2.4 Identités remarquables

**Exercices développement et factorisation :** 2.8 à 2.12 ; 2.22 et 2.23.

**Proposition 2.7.** *Pour tous nombres réels  $a$  et  $b$ , on a :*

1.  $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$  .

3.  $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$  .

2.  $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$  .

**Exemples :**

1.  $(a + 3)^2 = a^2 + 6a + 9$ .

3.  $y^2 - 25 = (y - 5)(y + 5)$ .

2.  $(2z - 1)^2 = 4z^2 - 4z + 1$ .

4.  $(w + 2t)(w - 2t) = w^2 - 4t^2$ .

**Méthode du conjugué :** Les identités remarquables permettent de retirer des racines carrées au dénominateur d'une fraction en multipliant au numérateur et au dénominateur par la même quantité : le **conjugué**. Par exemple :

$$\frac{1}{\sqrt{2} - 1} = \frac{1 \times (\sqrt{2} + 1)}{(\sqrt{2} - 1) \times (\sqrt{2} + 1)} = \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2}^2 - 1^2} = \frac{\sqrt{2} + 1}{2 - 1} = \sqrt{2} + 1.$$

Le conjugué de  $\sqrt{2} - 1$  est  $\sqrt{2} + 1$  et réciproquement ; de façon générale, le conjugué de  $a - b$  est  $a + b$  où  $a$  et  $b$  sont deux réels.

**Exercices :** 2.13 à 2.17 ; 2.24 à 2.28.

## 2.5 Capacités attendues

- Effectuer des calculs numériques ou littéraux mettant en jeu des puissances, des racines carrées, des écritures fractionnaires.
- Développer, factoriser, réduire une expression.
- Connaître les identités remarquables et savoir les utiliser dans les deux sens.
- Choisir la forme la plus adaptée (factorisée, développée réduite) d'une expression en vue de la résolution d'un problème.

## 2.6 Exercices

### 2.6.1 Progresser

#### Fractions

**Exercice 2.1.** Simplifier les fractions suivantes :

- |                                       |                         |   |
|---------------------------------------|-------------------------|---|
| 1. $\frac{1}{2} + \frac{2}{3}$ ;      | 4. $\frac{2/3}{4/3}$ ;  | 7. $\frac{25/16}{10/32}$ ;  |
| 2. $\frac{1}{2} \times \frac{2}{3}$ ; | 5. $\frac{6/5}{3/20}$ ; | 8. $\frac{\frac{1}{2} - 1}{\frac{1}{2} + 1}$ ;  |
| 3. $3 + \frac{3}{2}$ ;                | 6. $\frac{21/4}{7/8}$ ; | 9. $\frac{\frac{1}{5} + 2}{\frac{1}{5} - 2} \times \frac{1 - \frac{1}{3}}{1 + \frac{1}{3}}$ . |

#### Puissances et racine carrée

**Exercice 2.2.** Simplifier les expressions suivantes :

- |                          |                            |  |  |
|--------------------------|----------------------------|--|--|
| 1. $2^3 \times 2^5$ ;    | 3. $4^5 \times 8^9$ ;      | 5. $(9r)^3 \times (2r)^2$ ;                  | 7. $\frac{\frac{n^2}{m^5} \times n^3}{\frac{n^9}{m^8} \times m^5}$ . |
| 2. $\frac{13^2}{13^7}$ ; | 4. $\frac{(4a)^3}{2a^9}$ ; | 6. $\frac{n^6 \times m^7}{n^2 \times m^3}$ ; |  |

**Exercice 2.3.** Écrire sous la forme  $a\sqrt{b}$  avec  $a, b \in \mathbb{R}_+$ ,  $b$  le plus petit possible.

- |                  |                  |                  |                  |
|------------------|------------------|------------------|------------------|
| 1. $\sqrt{27}$ ; | 2. $\sqrt{32}$ ; | 3. $\sqrt{50}$ ; | 4. $\sqrt{64}$ . |
|------------------|------------------|------------------|------------------|

**Exercice 2.4.** Démontrer que, pour tout entier naturel  $n$ , on a :  $2^n + 2^n = 2^{n+1}$ .

**Exercice 2.5.** Calculer sans calculatrice :

- |   |                                       |
|---|---------------------------------------|
| 1. $\frac{3^{999} + 3^{999} + 3^{999}}{3^{1000}}$ ; | 2. $\frac{3^{27} - 3^{29}}{3^{28}}$ . |
|---|---------------------------------------|

**Exercice 2.6.** Sans utiliser la calculatrice, écrire sous la forme  $\frac{a}{b}$  ou  $a\sqrt{b}$  avec  $a \in \mathbb{Z}$  et  $b \in \mathbb{N}$  le plus petit possible.

- |  |   |  |
|--|---|--|
| 1. $A = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$ ;                             | 3. $C = \frac{\frac{3}{2} - \frac{7}{5}}{\frac{2}{5} \times \frac{4}{3} + 1}$ ; | 5. $E = 5\sqrt{27} - 3\sqrt{48}$ ;   |
| 2. $B = \frac{2}{3} - \frac{3}{4} + 3\left(\frac{4}{5} - \frac{5}{6}\right)$ ; | 4. $D = \sqrt{36 + 64}$ ;   | 6. $F = \frac{\sqrt{81}}{\sqrt{242}} \times \frac{\sqrt{92}}{\sqrt{25}}$ . |

**Exercice 2.7.** Démontrer que, pour tout entier naturel  $n$ , on a :  $12 \times \frac{1 - \frac{1}{5^{n+1}}}{1 - \frac{1}{5}} = 15 - \frac{3}{5^n}$ .



**Développer et factoriser****Exercice 2.8.** Simplifier les expressions suivantes :

1.  $x^2 - x + 6x^2 + 3x - 9$ ;      2.  $3 - 2a + 8a^2 - (a - 1)$ ;      3.  $3b + 5b^2 - (2b + 1)$ .

**Exercice 2.9.** Développer et réduire les expressions suivantes :

1. $3(2 + x)$ ;	5. $(t - 2)(2 - t)$ ;
2. $a(3 - a)$ ;	6. $-z(2 - z)$ ;
3. $-2(y - 7)$ ;	7. $(x - 3)(1 - 2x) + 3x^2$ ;
4. $(r + 2)(r + 3)$ ;	8. $y(y - 6)(y + 4) - 5$ .

**Exercice 2.10.** Factoriser les expressions suivantes :

1. $2x + 2y$ ;	3. $3z^2 - (z + 1)z^2$ ;	5. $(g - 5)(g + 4) - (4 + g)(g + 5)$ ;
2. $x^2 - 2x$ ;	4. $2(y + 1) - 3(y + 1)^2$ ;	6. $p^4 + 3p^3 + 2p^2$ .

**Exercice 2.11.** Soit  $n$  un entier naturel. Factoriser les expressions suivantes :

1.  $A = 3\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1} - 3\left(\frac{2}{5}\right)^n$ ;    2.  $B = -2 \times 5^{n+1} + 2 \times 5^n$ ;    3.  $C = (n + 1) \times 2^{n+1} - n \times 2^n$ .

**Exercice 2.12.** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Étudier le signe de  $\frac{3^{n+1}}{n+1} - \frac{3^n}{n}$ .**Identités remarquables****Exercice 2.13.** Développer les expressions suivantes à l'aide d'identités remarquables :

1.  $(x + 1)^2$ ;      2.  $(y - 2)^2$ ;      3.  $(z + 2)(z - 2)$ ;      4.  $(2b - 3)^2$ .

**Exercice 2.14.** Factoriser les expressions suivantes à l'aide d'identités remarquables :

1.  $x^2 - 3^2$ ;      2.  $25 - y^2$ ;      3.  $a^2 + 2a + 1$ ;      4.  $b^2 - 4b + 4$ .

**Exercice 2.15.** Écrire sans racine carrée au dénominateur et simplifier les expressions suivantes :

1.  $A = \frac{3}{\sqrt{5} + 1}$ ;      2.  $B = \frac{-2}{\sqrt{7} - 2}$ ;      3.  $C = \frac{1 + \sqrt{5}}{3 - \sqrt{5}}$ ;      4.  $D = \frac{6 - \sqrt{2}}{4 - \sqrt{2}}$ .

**Exercice 2.16.** Développer les expressions suivantes.

1. $u(3u + 1)(3u - 1)$ ;	3. $-3h(2 - 5h)^2$ ;
2. $\frac{1}{4} - (3y + 2)^2$ ;	4. $(n + 1)^2 - (n - 1)^2$ .

**Exercice 2.17.** Factoriser les expressions suivantes.

1.  $(r + 1)^2 - 36$ ;
2.  $16 - (3x + 2)^2$ ;
3.  $(3 + g)^2 - (5 + 2g)^2$ ;
4.  $(k + 1) - 2k(k + 1) + k^2(k + 1)$ .

## 2.6.2 S'entraîner

### Fractions

**Exercice 2.18.** Simplifier les fractions suivantes :

1.  $\frac{4}{3} + \frac{1}{8}$ ;
2.  $\frac{3}{7} \times \frac{14}{6}$ ;
3.  $5 + \frac{4}{9}$ ;
4.  $\frac{z}{6} - \frac{2}{3}$ ;
5.  $\frac{a}{35} \times \frac{7}{3a}$ ;
6.  $\frac{x}{3} - \frac{5x}{4}$ ;
7.  $\frac{36/5}{24/5}$ ;
8.  $\frac{\frac{1}{3} - 1}{\frac{1}{3} + 1}$ ;
9.  $\frac{\frac{1}{4} + 2}{\frac{1}{4} - 2} \times \frac{3 - \frac{1}{2}}{3 + \frac{1}{2}}$ .

### Puissances et racine carrée

**Exercice 2.19.** Simplifier les expressions suivantes :

1.  $5^4 \times 5^8$ ;
2.  $\frac{17^4}{17^2}$ ;
3.  $9^{30} \times 27^{18}$ ;
4.  $\frac{(2a)^8}{4a^{10}}$ ;
5.  $(3r)^4 \times (6r)^3$ ;
6.  $\frac{n^{12} \times m^{32}}{n^{90} \times m^{15}}$ .

**Exercice 2.20.** Écrire sous la forme  $a\sqrt{b}$  avec  $a, b \in \mathbb{R}_+$ ,  $b$  le plus petit possible.

1.  $\sqrt{18}$ ;
2.  $\sqrt{75}$ ;
3.  $\sqrt{40}$ ;
4.  $\sqrt{128}$ .

**Exercice 2.21.** Calculer ou simplifier sans calculatrice les expressions suivantes :

1.  $A = \frac{a^2(-a)^3(-b)^2b^5a}{(-b)^4a^5(ab)^2}, a \neq 0, b \neq 0$ ;
2.  $B = \frac{a^2 + ab}{b^2 + ab}, b^2 + ab \neq 0$ ;
3.  $C = \sqrt{2^6(1 + 2^3)}$ ;
4.  $D = \frac{\frac{1}{1-\pi} - \frac{1}{1+\pi}}{1 + \frac{1}{\pi^2-1}}$ .

### Développer et factoriser

**Exercice 2.22.** Développer et réduire les expressions suivantes :

1.  $7(x + 4)$ ;
2.  $-2a(7 + a)$ ;
3.  $-4(3y + 1)$ ;
4.  $(r + 5)(r - 11)$ ;
5.  $(2t - 3)(4 - 5t)$ ;
6.  $(3z + 5)(2 - z) - 6z$ .



**Exercice 2.23.** Factoriser les expressions suivantes :

- |                 |                             |                                 |
|-----------------|-----------------------------|---------------------------------|
| 1. $3x + 3y$ ;  | 4. $x^2 + 5x$ ;             | 7. $3s^2 - 5s$ ;                |
| 2. $6a - 12b$ ; | 5. $(7z + 1)z^2 - 5z^2$ ;   | 8. $l^2(4 - 2l) - 3l(4 - 2l)$ ; |
| 3. $x + 2cx$ ;  | 6. $(y - 8)^2 - 6(y - 8)$ ; | 9. $(s + 1)^4 - 3(s + 1)$ .     |

### Identités remarquables

**Exercice 2.24.** Développer les expressions suivantes à l'aide d'identités remarquables :

- |                  |                  |                       |                   |
|------------------|------------------|-----------------------|-------------------|
| 1. $(x + 2)^2$ ; | 2. $(6 - y)^2$ ; | 3. $(z + 7)(z - 7)$ ; | 4. $(3b - 9)^2$ ; |
|------------------|------------------|-----------------------|-------------------|

**Exercice 2.25.** Factoriser les expressions suivantes à l'aide d'identités remarquables :

- |                  |                 |                     |                     |
|------------------|-----------------|---------------------|---------------------|
| 1. $x^2 - 5^2$ ; | 2. $64 - y^2$ ; | 3. $a^2 - 2a + 1$ ; | 4. $b^2 + 6b + 9$ . |
|------------------|-----------------|---------------------|---------------------|

**Exercice 2.26.** Écrire sans racine carrée au dénominateur et simplifier les expressions suivantes :

- |                                   |                                    |  |  |
|-----------------------------------|------------------------------------|--|--|
| 1. $A = \frac{1}{\sqrt{2} + 1}$ ; | 2. $B = \frac{-1}{\sqrt{6} - 6}$ ; | 3. $C = \frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}$ ; | 4. $D = \frac{\sqrt{7} + 1}{\sqrt{7} - 1}$ . |
|-----------------------------------|------------------------------------|--|--|

**Exercice 2.27.** Développer les expressions suivantes et réduire :

- |                           |                               |                                  |
|---------------------------|-------------------------------|----------------------------------|
| 1. $5t(t + 4)(t - 4)$ ;   | 3. $(3r - 4)^2(5r + 1) - 4$ ; | 5. $p^2(3p + 12) - 3p^3$ ;       |
| 2. $(m + 1)^2(m - 1)^2$ ; | 4. $u(u + 1)(u - 1) - u^2$ ;  | 6. $k(17 - k)(3k + 2)^2 - k^4$ . |

**Exercice 2.28.** Factoriser les expressions suivantes :

- |                        |   |
|------------------------|---|
| 1. $(2t - 4)^2 - 25$ ; | 3. $(1 - 7h) + 4h(1 - 7h) + 4h^2(1 - 7h)$ . |
| 2. $f^2 - (1 - f)^2$ ; |   |

### 2.6.3 Le Flashback!

**Flashback 2.1.** Donner les complémentaires de  $A$  dans  $E$  dans chacun des cas suivants.

- |   |   |
|---|---|
| 1. $E = \mathbb{R}$ et $A = [8; +\infty[$ . | 3. $E = \mathbb{R}$ et $A = ]-\infty; 3] \cup ]5; +\infty[$ . |
| 2. $E = \mathbb{R}$ et $A = ]-6; 2]$ .      | 4. $E = ]-\infty; 1[$ et $A = ]-\infty; -1]$ .                |

**Flashback 2.2.** Représenter graphiquement les unions et intersections suivantes et dire à quel ensemble elles sont égales.

- |                                     |                                 |  |
|-------------------------------------|---------------------------------|--|
| 1. $[-1; 3] \cap ]2; +\infty[$ ;    | 4. $[-3; 0] \cap \mathbb{N}$ ;  | 7. $]-\infty; 1[ \cup ]-1; +\infty[$ ; |
| 2. $]-\infty; -5[ \cap [-10; -5]$ ; | 5. $] -1; 1[ \cap \mathbb{Z}$ ; | 8. $] -1; 1[ \cup [-2; 2]$ ;           |
| 3. $] -3; 0[ \cap \mathbb{N}$ ;     | 6. $] -4; -1[ \cup ] -1; 0[$ ;  | 9. $\mathbb{R} \cup \mathbb{Z}$ .      |