

# Mathématiques

## Logique et récurrence

Sujet 1

16/09/2025

Note : / 15

Durée : 40 min

- La calculatrice n'est pas autorisée.
- Le sujet est à rendre avec la copie.

**Exercice 1** [ / 4]On note  $D$  et  $V$  les deux propositions suivantes :

- $D$  : « le pokémon est de type dragon » ;
- $V$  : « le pokémon est de type vol ».

1. [ / 1] Écrire en français la proposition  $V \wedge (\neg D)$ .

**Solution:**  $V \wedge (\neg D)$  : « Le pokémon est de type vol mais pas dragon ».

2. [ / 1] Écrire à l'aide de booléens la proposition « le pokémon n'est pas de type vol ou est de type dragon » :

**Solution:**  $(\neg V) \vee D$ .

3. [ / 1] On considère l'expression booléenne :  $f(D; V) = (D \wedge (\neg V)) \vee ((\neg D) \wedge V)$ . Compléter son tableau de vérité ci-dessous.

$D$	$V$	$\neg D$	$\neg V$	$D \wedge (\neg V)$	$(\neg D) \wedge V$	$f(D; V)$
0	0	1	1	0	0	0
0	1	1	0	1	0	1
1	0	0	1	0	1	1
1	1	0	0	0	0	0

4. [ / 1] Traduire cette expression en français. Quel est le nom de la fonction booléenne associée ?

**Solution:**  $f(D; V)$  : « Le pokémon est de type soit vol, soit dragon ». Il s'agit de la fonction XOR : ou exclusif.

## Exercice 2 [ / 3]

Pour chacune des implications suivantes :

1. dire sont-elles vraies ou fausses ;
2. énoncer leurs réciproques et dire si elles sont fausses.

On justifiera à l'aide de contre-exemples.

Pokémons Plante	Bulbizarre, Herbizarre, Florizarre
Pokémons Eau	Carapuce, Lokhlass, Pyskokwak

1. [ / 1½] « Si le pokémon est un Bulbizarre, alors il est de type plante ».

**Solution:** Cette implication est vraie car Bulbizarre est de type plante.

Sa réciproque est « Si le pokémon est de type plante, alors c'est un Bulbizarre ». Elle est fausse, on a comme contre-exemple Florizarre qui est de type feu sans être un Bulbizarre.

2. [ / 1½] « Il suffit que le pokémon soit de type eau pour qu'il soit un Pyskokwak ».

**Solution:** Cette implication est fausse car il existe d'autres pokémons de type eau que Pyskokwak, par exemple Carapuce.

Sa réciproque est « Si le pokémon est un Pyskokwak, alors il est de type eau ». Elle est vraie car Pyskokwak est de type eau.

## Exercice 3 [ / 3]

Pour chacune des propositions suivantes, identifier le quantificateur utilisé puis donner leur négation.

1. [ / 1½] « Tous les pokémons eau sont bleus ».

**Solution:** Il s'agit d'un quantificateur universel.

Négation : il existe des pokémons eau qui ne sont pas bleus.

2. [ / 1½] « Certains pokémons plantes sont verts ».

**Solution:** Il s'agit d'un quantificateur existentiel.

Négation : aucun pokémon plante n'est vert.

**Exercice 4 [        / 5]**

On considère la suite définie par  $v_0 = 3$  et, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $v_{n+1} = 2 + \frac{1}{v_n}$ . Démontrer par récurrence que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $2 \leq v_n \leq 3$ .

**Solution:** On note, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $P_n : 2 \leq v_n \leq 3$ .

**Initialisation :** On a par définition  $2 \leq v_0 \leq 3$ , donc  $P_0$  est vraie.

**Hérédité :** Soit  $k \in \mathbb{N}$  fixé quelconque.

**Hypothèse de récurrence :** On suppose  $P_k$  vraie :  $2 \leq v_k \leq 3$ .

**Objectif :** Montrons que  $P_{k+1}$  est vraie :  $2 \leq v_{k+1} \leq 3$ .

On a

$$\begin{aligned} & 2 \leq v_n \leq 3 \quad (\text{hypothèse de récurrence}) \\ \implies & \frac{1}{2} \geq \frac{1}{v_k} \geq \frac{1}{3} \quad (\text{fonction inverse décroissante sur } \mathbb{R}_+^*) \\ \implies & 2 + \frac{1}{2} \geq 2 + \frac{1}{v_k} \geq 2 + \frac{1}{3} \\ \implies & 3 \geq 2 + \frac{1}{2} \geq 2 + \frac{1}{v_k} \geq 2 + \frac{1}{3} \geq 2 \\ \implies & 3 \geq 2 + \frac{1}{v_k} \geq 2. \end{aligned}$$

$P_{k+1}$  est donc vraie, la propriété est héréditaire.

**Conclusion :** par principe de récurrence, on a montré que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $2 \leq v_n \leq 3$ .

**Non noté** Si vous avez fini l'évaluation, vous pouvez colorier Carapuce.

