Chapitre 1

Raisonnement par récurrence

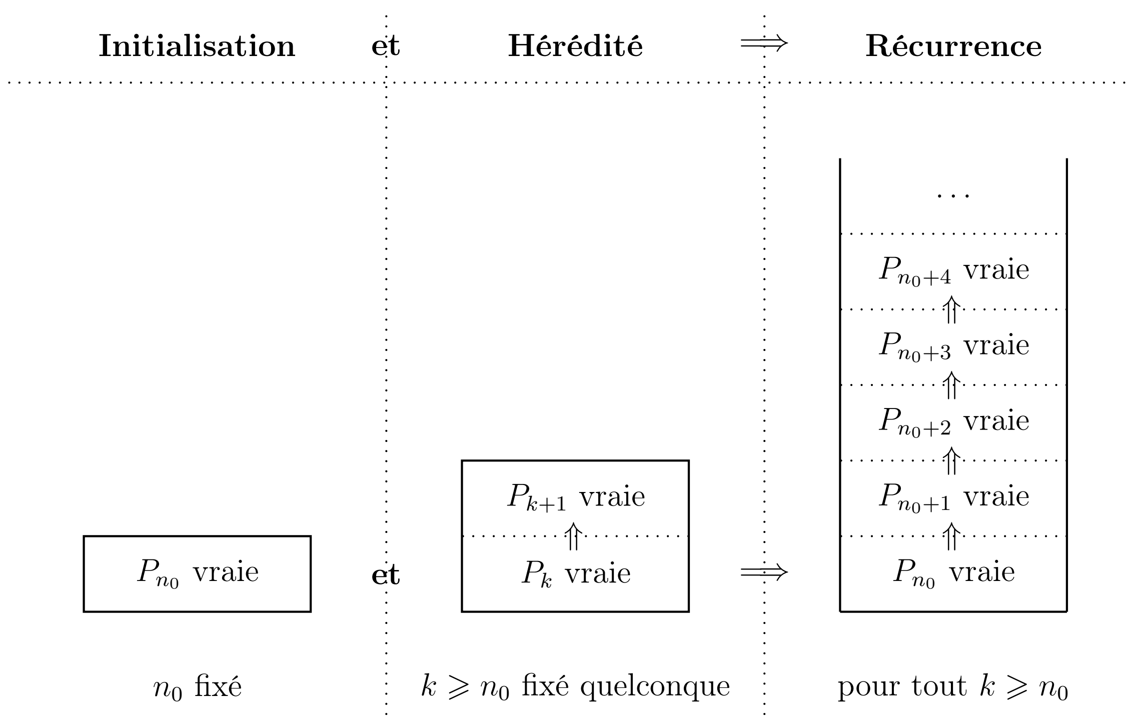
1.1 Raisonnement par récurrence

Axiome 1.1. *Soit $n_0 \in \mathbb{N}$. On considère la proposition P_n définie pour tout entier naturel $n \geqslant n_0$. Si les deux conditions suivantes sont vérifiées :*

Initialisation : *P_{n_0} est vraie ;*

Hérédité : *pour tout entier naturel $k \geqslant n_0$, « P_k est vraie » implique « P_{k+1} est vraie » ;*

alors on peut conclure que, pour tout $n \geqslant n_0$, la proposition P_n est vraie.



Méthode :

1. Identifier et énoncer la propriété à démontrer : « Pour tout $n \geqslant n_0$, on note P_n : ....
2. **Initialisation :** montrer que P_{n_0} est vraie.
3. **Hérédité :** on fixe $k \geqslant n_0$.
   (a) Énoncer l'**hypothèse de récurrence** P_k : « On suppose P_k vraie : ... ».
   (b) Énoncer l'**objectif** P_{k+1} : « Montrons que P_{k+1} est vraie ».
   (c) Démontrer P_{k+1} grâce à P_k.
4. **Conclusion :** « Par principe de récurrence, on a démontré que, pour tout $n \geqslant n_0$, on a P_n ».

1.2 Exemples

1.2.1 Exemple 1

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 2u_n + 1$. On cherche à prouver que l'expression de u_n en fonction de n est $u_n = 2^n - 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, la proposition P_n : « $u_n = 2^n - 1$ ». Démontrons la par récurrence.

Initialisation : Pour $n = 0$, on a $2^0 - 1 = 0 = u_0$, donc P_0 est vraie.

Hérédité : Soit k un entier naturel fixé.

Hypothèse de récurrence : On suppose que la propriété P_k est vraie : $u_k = 2^k - 1$.
Objectif : Démontrons que P_{k+1} : « $u_{k+1} = 2^{k+1} - 1$ » est vraie.

On a :

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= 2u_k + 1 \\ &= 2 \times (2^k - 1) + 1 \quad \text{(d'après l'hypothèse de récurrence)} \\ &= 2^{k+1} - 2 + 1 \\ &= 2^{k+1} - 1. \end{aligned}$$

Ainsi P_{k+1} est vraie, et l'hérédité est démontrée.

Conclusion : Par principe de récurrence, P_n est vraie pour tout entier naturel n : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 2^n - 1$.

Remarque : Dans la suite, l'hypothèse de récurrence sera notée HR.

1.2.2 Exemple 2

Soit $n \in \mathbb{N}$, on cherche à montrer la proposition P_n : « $n^3 - n$ est un multiple de 3 », autrement qu'il existe $c_n \in \mathbb{N}$ tel que $n^3 - n = 3c_n$.

Initialisation : Pour $n = 0$, $n^3 - n = 0^3 - 0 = 0 = 3 \times 0$ donc $n^3 - n$ est bien un multiple de 3 lorsque $n = 0$. P_0 est donc vraie.

Hérédité : Soit k un entier naturel fixé.

Hypothèse de récurrence : On suppose que la propriété P_k est vraie : $k^3 - k$ est un multiple de 3, i.e. il existe $c \in \mathbb{Z}$ tel que $k^3 - k = 3c_k$.

Objectif : Démontrons que P_{k+1} : « il existe $c_{k+1} \in \mathbb{N}$ tel que $(k+1)^3 - (k+1) = 3c_{k+1}$. » est vraie.

$$\begin{aligned}(k+1)^3 - (k+1) &= k^3 + 3k^2 + 3k + 1 - k - 1\\ &= k^3 - k + 3k^2 + 3k\\ &= 3c_k + 3k^2 + 3k \quad \text{(HR)}\\ &= 3(c_k + k^2 + k).\end{aligned}$$

Comme c_k et k sont des entiers, $c_k + k^2 + k$ en est un aussi. On en déduit que $(k+1)^3 - (k+1)$ est un multiple de 3 et donc que P_{k+1} est vraie.

Conclusion : Par principe de récurrence, on en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n est vraie, donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n^3 - n$ est un multiple de 3.

1.2.3 Exemple 3

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on cherche à démontrer la proposition

$$P_n : \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \cdots + \frac{1}{n \times (n+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

Initialisation : Pour $n = 1$. $\frac{1}{1 \times 2} = \frac{1}{2}$ et $\frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$ donc P_1 est vraie.

Hérédité : Soit k un entier naturel fixé.

Hypothèse de récurrence : On suppose que la propriété P_k est vraie :

$$\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \cdots + \frac{1}{k \times (k+1)} = \frac{k}{k+1}.$$

Objectif : Démontrons que P_{k+1} est vraie :

$$\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \cdots + \frac{1}{(k+1) \times (k+2)} = \frac{k+1}{k+2}.$$

On a :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\dots+\frac{1}{k\times(k+1)}+\frac{1}{(k+1)\times(k+2)}\\
=&\frac{k}{k+1}+\frac{1}{(k+1)\times(k+2)} \quad \text{(HR)}\\
=&\frac{k(k+2)+1}{(k+1)\times(k+2)}\\
=&\frac{k^2+2k+1}{(k+1)\times(k+2)}\\
=&\frac{(k+1)^2}{(k+1)\times(k+2)}\\
=&\frac{k+1}{k+2}.
\end{aligned}$$

Donc P_{k+1} est vraie.

Conclusion : Par principe de récurrence, on en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, P_n est vraie.

Remarque : Il est absolument nécessaire de vérifier l'initialisation et l'hérédité. Cette dernière n'est pas suffisante comme on peut le voir dans le contre-exemple ci-dessous où l'hérédité est bien vérifiée mais pas l'initialisation.

Contre-exemple : Considérons la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2, \\ u_{n+1} = u_n^2,\ n \geqslant 1. \end{cases}$$

Considérons la propriété P_n : « $0 \leqslant u_n \leqslant 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ ». Il est évident que l'initialisation P_0 est fausse (puisque $u_0 = 2$) et qu'aucun terme de la suite n'est plus petit que 1. Pourtant l'hérédité est vraie : soit $k \geqslant 0$ fixé quelconque, par hypothèse de récurrence, on a

$$\begin{aligned}
&0 \leqslant u_k \leqslant 1\\
\Longrightarrow\ &0^2 \leqslant u_k^2 \leqslant 1^2, \quad \text{(fonction carré croissante sur } \mathbb{R}_+)\\
\Longrightarrow\ &0 \leqslant u_{k+1} \leqslant 1.
\end{aligned}$$

Donc P_k vraie implique bien P_{k+1} vraie. Pourtant, P_n est fausse pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1.3 Capacités attendues

- Identifier une hypothèse de récurrence.
- Effectuer un raisonnement par récurrence.

1.4 Exercices

1.4.1 Progresser

Exercice 1.1. Soit la suite (v_n) définie par $v_0 = 0$ et pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = v_n + 2n + 2$. On cherche à démontrer que pour tout entier naturel n, $v_n = n(n+1)$. Pour cela on introduit l'affirmation pour n un entier naturel :

$$P_n : « v_n = n(n+1) »$$

1. **Initialisation :** Démontrer P_0.
2. **Hérédité :** Soit k un entier naturel fixé tel que P_k soit vraie.
   (a) Écrire l'affirmation P_{k+1}.
   (b) Démontrer P_{k+1}
3. **Conclure**.

Exercice 1.2. On cherche à démontrer par récurrence que pour tout

$$n \in \mathbb{N}^* : \sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, écrire la proposition, notée P_n, que l'on cherche à démontrer
2. **Initialisation :** montrer que l'égalité est vraie pour $n = 1$, c'est-à-dire que P_1 est vraie.
3. **Hérédité :** soit $k \in \mathbb{N}$ un entier tel que P_k soit vraie.
   (a) Écrire P_{k+1}.
   (b) Montrer que P_{k+1} est vraie.
4. **Conclure**

Exercice 1.3. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^* : \displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Exercice 1.4. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N} : 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1$.

Exercice 1.5. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{3u_n}{1 + 2u_n}$.

1. Calculer u_1 et u_2.
2. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n : 0 < u_n$.

Exercice 1.6. Soit la suite (w_n) définie par $w_0 = 3$ et pour tout entier naturel n, $w_{n+1} = 2w_n + 4$.

1. Calculer w_1, w_2 et w_3.
2. Démontrer par récurrence que la suite (w_n) est croissante.

Exercice 1.7. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et pour tout entier naturel $n : u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$. Démontrer que pour tout entier naturel $n : u_n \leqslant 2$.

Exercice 1.8. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $7^n - 1$ est un multiple de 6.

Exercice 1.9. Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère la proposition P_n : « $10^n + 1$ est divisible par 9 ».

1. Montrer que s'il existe un entier k tel que P_k est vraie, alors P_{k+1} est vraie.
2. Peut-on conclure que P_n est vraie pour tout entier naturel ? Justifier.
3. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $10^n - 1$ est un multiple de 9.

Exercice 1.10. [Preuves de première]

1. Soit a et r deux réels. On considère la suite arithmétique (u_n) de terme initial $u_0 = a$ et de raison r. Montrer que, pour tout entier naturel n, $u_n = a + rn$.
2. Soit q un réel. On considère la suite géométrique (v_n) de terme initial v_0 et de raison q. Montrer que, pour tout entier naturel n, $v_n = v_0 \times q^n$.

Exercice 1.11. [Produit] On utilise le symbole $\prod$ afin de désigner un produit de la même façon que l'on utilise le symbole $\sum$ afin de désigner une somme. Par exemple

$$\prod_{i=1}^{9} i = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times 9.$$

Pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, on pose

$$P_n = \prod_{i=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{i^2}\right) = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \ldots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right).$$

Démontrer que pour tout $n \geqslant 2$, on a $P_n = \dfrac{n+1}{2n}$.

Exercice 1.12. Soit $n \in \mathbb{N}$. On note P_n la proposition « pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $(1+x)^n \geqslant 1 + nx$ ».

1. Montrer que cette proposition est vraie pour $n = 0$.
2. Supposons qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que P_k soit vraie. Soit $x > 0$.
   (a) Développer $(1 + kx)(1 + x)$.
   (b) En déduire que P_{k+1} est vraie.
3. Conclure.

1.4.2 Approfondir

Exercice 1.13. [Diagonales d'un polynôme convexe] Pour un polygone convexe – i.e. un polygone dont tous les angles sont inférieurs à π –, on souhaite compter le nombre de diagonales – i.e. le nombre de segments joignant deux sommets non consécutifs du polygone.

1. Déterminer le nombre de diagonales d'un triangle, d'un quadrilatère et d'un pentagone convexe.
2. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3. On considère la proposition P_n : « un polygone convexe à n côtés possèdent $\dfrac{n(n-3)}{2}$ diagonales ». Que peut-on vérifier d'après la question 1.

3. On suppose qu'il existe un entier naturel $k \geqslant 3$ pour lequel P_k est vraie. Soient P un polygone convexe à $k+1$ sommets et A l'un d'entre eux.
   (a) Combien de diagonales comporte le polygone P' composé des $k+1$ sommets de P sauf A ?
   (b) Combien y a-t-il de diagonales de P partant du point A ?
   (c) En remarquant qu'un des côtés de P' est une diagonale de P, montrer que P_{k+1} est vraie et conclure.

Exercice 1.14. [Récurrence forte] Lors de la démonstration de l'hérédité dans un raisonnement par récurrence, il peut être nécessaire que la propriété soit vraie pour tous les entiers inférieurs à un k fixé : P_k, P_{k-1},..., P_0. C'est ce que l'on appelle une récurrence forte. L'initialisation quant à elle ne change pas.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1, \\ u_{n+1} = u_0 + u_1 + \cdots + u_n,\ n \geqslant 1. \end{cases}$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant n$.

1.4.3 S'entraîner

Exercice 1.15. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, 4^n + 5$ est un multiple de 3.

Exercice 1.16. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 4$ et pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = 0,92u_n + 8$. Démontrer que pour tout entier naturel n : $u_n = -96 \times (0,92)^n + 100$.

Exercice 1.17. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 5$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + 1$.

1. Démontrer que la suite (u_n) est positive.
2. Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.

Exercice 1.18. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{u_n}$.
Démontrer que pour tout entier naturel n : $\dfrac{3}{2} \leqslant u_n \leqslant 2$.

Exercice 1.19. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = \dfrac{1+3u_n}{3+u_n}$.
Démontrer que pour tout entier naturel n, $u_n > 1$.