Chapitre 2

Dérivabilité et convexité

2.1 Rappels sur les nombres et fonctions dérivés

2.1.1 Définitions

Définition 2.1. *Soient f une fonction définie sur un intervalle I et a un réel de I. Soit h un nombre réel non nul tel que $x_0 + h \in I$. On appelle* ***taux d'accroissement*** *de f entre x_0 et $x_0 + h$ le nombre :*

$$\tau_h(x_0) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}.$$

Définition 2.2. *Soient f une fonction définie sur un intervalle I et x_0 un réel de I. On dit que f est* ***dérivable*** *en x_0 si le taux d'accroissement de f entre x_0 et $x_0 + h$ admet une unique limite finie lorsque h tend vers 0. On appelle cette limite* ***nombre dérivé*** *de f en x_0 et on la note $f'(x_0)$. On peut écrire :*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0) \qquad \text{ou} \qquad \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0).$$

Définition 2.3. *Soient f une fonction définie sur un intervalle I et J un intervalle inclus dans I. Si f est dérivable en x_0 pour tout $x_0 \in J$, on dit que f est* ***dérivable*** *sur J. La fonction qui à tout $x_0 \in J$ associe $f'(x_0)$ s'appelle* ***fonction dérivée*** *de f, elle est notée f'.*

Exemple On considère encore la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$, alors :

$$\begin{aligned}
\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} &= \frac{(x_0+h)^2 - x_0^2}{h} \\
&= \frac{x_0^2 + 2x_0h + h^2 - x_0^2}{h} \\
&= \frac{2x_0h + h^2}{h} \\
&= 2x_0 + h \quad \text{car} \quad h \neq 0.
\end{aligned}$$

Quelque soit la valeur de x_0, cette expression tend vers $2x_0$ lorsque h tend vers 0. La fonction f' est donc définie sur $\mathbb{R}$ par $f'(x_0) = 2x_0$.

2.1.2 Fonctions dérivées usuelles

Soient $k \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

$f : x \mapsto$	k	x^n	$\dfrac{1}{x}$	$\dfrac{1}{x^n}$	$\sqrt{x}$	e^x	$\cos(x)$	$\sin(x)$
$\mathcal{D}_f$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}_+$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$

$f' : x \mapsto$	0	nx^{n-1}	$-\dfrac{1}{x^2}$	$-\dfrac{n}{x^{n+1}}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	e^x	$-\sin(x)$	$\cos(x)$
$\mathcal{D}_{f'}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}_+^*$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$

2.1.3 Opérations sur les dérivées

Propriété 2.1. *Soient u et v deux fonctions définies et dérivables sur un intervalles I et k un nombre réel.*

1. *La fonction $u+v$ est dérivable sur I, et on a : $(u+v)' = u' + v'$.*
2. *La fonction $k \times u$ est dérivable sur I, et on a : $(k \times u)' = k \times u'$.*
3. *La fonction $u \times v$ est dérivable sur I, et on a : $(uv)' = u'v + uv'$.*
4. *La fonction u^2 est dérivable sur I, et on a : $(u^2)' = 2uu'$.*
5. *Si v ne s'annule pas sur I, alors $\dfrac{1}{v}$ est dérivable sur I et on a : $\left(\dfrac{1}{v}\right)' = -\dfrac{v'}{v^2}$.*
6. *Si v ne s'annule pas sur I, alors $\dfrac{u}{v}$ est dérivable sur I et on a : $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$.*

Exemples :

— Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 - 4x + 5$. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 \times 3x^2 - 4 \times 1 + 0 \\ &= 6x^2 - 4. \end{aligned}$$

— On définit g sur $I =]0\,;+\infty[$ par $g(x) = (\sqrt{x} - 1)(3x^2 + x)$. On peut écrire :

$$g(x) = u(x)v(x) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} u(x) = \sqrt{x} - 1, \\ v(x) = 3x^2 + x. \end{cases}$$

Ainsi g est le produit des fonctions u et v, toutes deux dérivables sur I. On en déduit que g est dérivable sur I, et pour tout $x \in I$:

$$\begin{aligned} g'(x) &= u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}}(3x^2 + x) + (\sqrt{x} - 1)(6x + 1). \end{aligned}$$

— Soit h définie sur $J =]2\,;+\infty[$ par $h(x) = \dfrac{x^2+x+1}{x-2}$. On peut écrire :

$$g(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} u(x) = x^2+x+1, \\ v(x) = x-2. \end{cases}$$

Ainsi g est le quotient des fonctions u et v. Toutes deux sont dérivables sur J, de plus v ne s'annule pas sur J. On en déduit que h est dérivable sur J, et pour tout $x \in J$:

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2} \\ &= \frac{(2x+1)(x-2) - (x^2+x+1) \times 1}{(x-2)^2} \\ &= \frac{x^2-4x-3}{(x-2)^2}. \end{aligned}$$

2.2 Fonction composée et dérivation

2.2.1 Fonction composée

Définition 2.4.

— *Soit u une fonction définie sur un ensemble D_u à images (ou valeurs) dans un ensemble I_u.*

— *Soit v une fonction définie sur un ensemble D_v.*

Si $I_u \subset D_v$, on définit la ***composée*** *de u par v, notée $v \circ u$, par :*

$$(v \circ u)(x) = v(u(x)), \quad \forall x \in D_u.$$

On peut schématiser cela sous la forme :

$$x \underset{u}{\mapsto} u(x) \underset{v}{\mapsto} v(u(x)).$$

Exemple : Soient u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = x^2+1$ et v la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $v(x) = \sqrt{x}$. On a donc $D_u = \mathbb{R}$ et $D_v = \mathbb{R}_+$.

— u est à images dans $I_u = \mathbb{R}_+$, donc $I_u \subset D_v$. $v \circ u$ est donc bien définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$(v \circ u)(x) = v(u(x)) = \sqrt{u(x)} = \sqrt{x^2+1}.$$

— v est à images dans $I_v = \mathbb{R}_+$, donc $I_v \subset D_u$. $u \circ v$ est donc définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$(u \circ v)(x) = u(v(x)) = v(x)^2 + 1 = (\sqrt{x})^2 + 1 = x + 1.$$

Remarque : Comme on peut le voir dans l'exemple précédent, on a en général $v \circ u \neq u \circ v$.

Méthode : Pour déterminer l'ensemble de définition d'une fonction composée $f = v \circ u$.

1. Identifier u et v.
2. Identifier l'ensemble de définition de v : D_v.
3. Identifier l'ensemble de définition de u : D_u, et son ensemble image : I_u.
4. Pour $x \in D_u$, $(v \circ u)(x) = v(u(x))$ est bien défini si et seulement si $u(x) \in D_v$.
   (a) Si $I_u \subset D_v$, alors $v \circ u$ est définie sur D_u.
   (b) Sinon, on résout le problème $u(x) \in D_v$ (une équation ou une inéquation le plus souvent). On trouve alors un ensemble solution D qui est l'ensemble de définition de $v \circ u$.

Exemple : Déterminons l'ensemble de définition de la fonction définie par $f(x) = \sqrt{3x-5}$.

1. On a $f = v \circ u$ avec $v(X) = \sqrt{X}$ et $u(x) = 3x - 5$.
2. v est définie sur $D_v = \mathbb{R}_+$.
3. u est définie sur $D_u = \mathbb{R}$ à images dans $I_u = \mathbb{R}$.
4. On a $I_u \not\subseteq D_v$. Il faut donc résoudre $u(x) \in \mathbb{R}_+$:

$$\begin{aligned} & u(x) \in \mathbb{R}_+ \\ \iff & 3x - 5 \geqslant 0 \\ \iff & 3x \geqslant 5 \\ \iff & x \geqslant \frac{5}{3} \\ \iff & x \in \left[\frac{5}{3} ; +\infty\right[. \end{aligned}$$

On en déduit que f est définie sur $\left[\frac{5}{3} ; +\infty\right[$.

Exercices : 2.1 à 2.3 ; 2.23.

2.2.2 Limite d'une fonction composée

Théorème 2.1. ***[Admis]*** *Soient a, b, $c \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, u et v deux fonctions définies et dérivables respectivement en a et b. Si $\lim\limits_{x \to a} u(x) = b$ et $\lim\limits_{X \to b} v(X) = c$, alors $\lim\limits_{x \to a} v(u(x)) = c$.*

Exemple : $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 + 1 = +\infty$ et $\lim\limits_{X \to +\infty} \sqrt{X} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2+1} = +\infty$.

2.2.3 Dérivation d'une fonction composée

Théorème 2.2.

— *Soit u une fonction définie et dérivable sur un ensemble D_u à images (ou valeurs) dans un ensemble I_u.*

— *Soit v une fonction définie et dérivable sur un ensemble D_v.*

Si $I_u \subset D_v$, alors la fonction $v \circ u$ est dérivable sur D_u et $(v \circ u)' = u' \times (v' \circ u)$: pour tout $x \in D_u$,

$$(v \circ u)'(x) = u'(x) \times v'(u(x)).$$

Démonstration. Soit $x_0 \in D_u$. On cherche à montrer que $\dfrac{(v \circ u)(x) - (v \circ u)(x_0)}{x - x_0}$ admet une limite finie lorsque x tend vers x_0 et à déterminer cette limite. On cherche à faire apparaître $u'(x) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{u(x) - u(x_0)}{x - x_0}$:

$$\frac{(v \circ u)(x) - (v \circ u)(x_0)}{x - x_0} = \frac{u(x) - u(x_0)}{x - x_0} \times \frac{(v \circ u)(x) - (v \circ u)(x_0)}{u(x) - u(x_0)}.$$

— Comme v est dérivable en x_0 on sait que $u'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{u(x) - u(x_0)}{x - x_0}$

— D'autre part, lorsque x tend vers x_0, $u(x)$ tend vers $u(x_0)$ car u est dérivable sur D_u. De plus, v est dérivable en $u(x_0)$, donc $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{(v \circ u)(x) - (v \circ u)(x_0)}{u(x) - u(x_0)} = v'(u(x_0)) = (v' \circ u)(x_0)$.

□

Méthode : Pour déterminer l'ensemble de dérivabilité d'une fonction composée $f = v \circ u$ et la dériver.

1. Identifier u et v.
2. Identifier le domaine de dérivabilité D'_u de u.
3. Identifier le domaine image de u : I_u.
4. Identifier le domaine de dérivabilité D'_v de v.
5. Conclure quant à la dérivabilité de f :
   (a) Si $I_u \subset D'_v$: f est dérivable sur D'_u.
   (b) Sinon déterminer I tel que, pour tout $x \in I$, $u(x) \in D'_v$. f sera dérivable sur I.
6. Calculer la dérivée de f à l'aide de la formule $(v \circ u)' = u' \times v'(u)$.

Exemple : Soit la fonction f définie sur $I = \left]\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$ par $f(x) = \dfrac{1}{2x-1}$.

1. On a $f = v \circ u$ avec $v(X) = \dfrac{1}{X}$ et $u(x) = 2x - 1$.
2. u est définie et dérivable sur $D_u = \mathbb{R}$, donc sur $I \subset D_u$.
3. u est à images dans $I_u = \mathbb{R}_+^*$, en effet :

$$\begin{aligned} x \in \left]\frac{1}{2}\,;+\infty\right[&\iff x > \frac{1}{2} \\ &\iff 2x > 1 \\ &\iff 2x - 1 > 0 \\ &\iff u(x) \in \mathbb{R}_+^*. \end{aligned}$$

4. v est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$. On a bien $I_u = \mathbb{R}_+^* \subset \mathbb{R}^*$.
5. f est donc dérivable sur $]1\,;+\infty[$.
6. On a $V'(X) = -\dfrac{1}{X^2}$ et $u'(x) = 2$. Pour tout $x \in I$, on a donc :

$$\begin{aligned} f'(x) &= (v \circ u)'(x) \\ &= u'(x)v'(u(x)) \\ &= 2 \times \left(-\frac{1}{(2x-1)^2}\right) \\ &= -\frac{2}{(2x-1)^2}. \end{aligned}$$

Corollaire 2.1. *Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I. Alors sur I :*

1. $(\mathrm{e}^u)' = u'\mathrm{e}^u$.
2. *Pour tout entier naturel n non nul :* $(u^n)' = nu'u^{n-1}$.
3. *Si u ne s'annule pas sur I :* $\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}$ *et* $\left(\dfrac{1}{u^n}\right)' = -n\dfrac{u'}{u^{n+1}}$.
4. *Si u est strictement positive sur I, alors* $(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$.

Exemple : Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{-5x-3}$. On a $f = \sqrt{u}$ avec $u(x) = -5x - 3$. u est strictement positive sur $\left]-\infty\,;-\frac{3}{5}\right[$ donc f est définie et dérivable sur $\left]-\infty\,;-\frac{3}{5}\right[$. Pour tout $x \in \left]-\infty\,;-\frac{3}{5}\right[$, on a :

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} = \frac{-5}{2\sqrt{-5x-3}}.$$

Exercices : 2.4 à 2.7 ; 2.24 et 2.26.

2.3 Dérivée seconde

Définition 2.5. *Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. On note f' sa dérivée. Lorsque f' est dérivable sur I, on note f'' sa dérivée : c'est la* ***dérivée seconde*** *de f.*

Exemples :

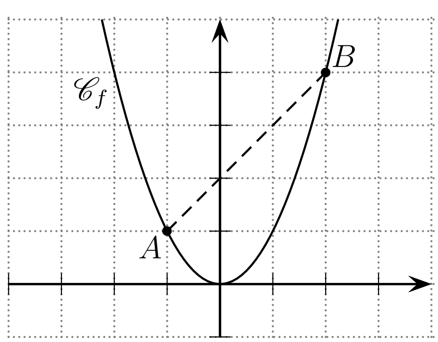
- f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4x^3 + 2x^2 + 13x + 9$ est dérivable deux fois et admet $f'(x) = 12x^2 + 4x + 13$ comme dérivée première et $f''(x) = 24x + 4$ comme dérivée seconde.
- f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos(x)$ est dérivable deux fois et admet $f'(x) = -\sin(x)$ comme dérivée première et $f''(x) = -\cos(x)$ comme dérivée seconde.

Remarque : certaines fonctions peuvent être dérivées plus que deux fois : on note $f^{(n)}$ la dérivée n-ième de f : $f^{(3)}$ est la dérivée troisième, $f^{(4)}$ la dérivée quatrième, etc. Il existe même des fonctions qui sont infiniment dérivable comme exponentielle, cosinus, sinus, etc.

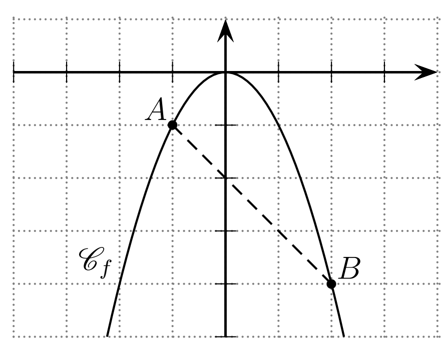
Exercice : 2.8.

2.4 Convexité d'une fonction

Définition 2.6. *Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative. f est* ***convexe****, resp.* ***concave*** *sur I si pour tous points distincts A et B de $\mathscr{C}_f$, le segment $[AB]$ est* ***au-dessus****, resp.* ***en dessous****, de sa courbe $\mathscr{C}_f$ entre A et B.*



convexe



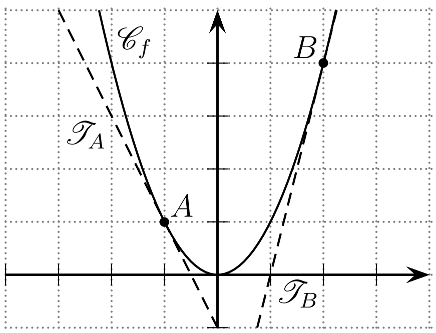
concave

Exemples :

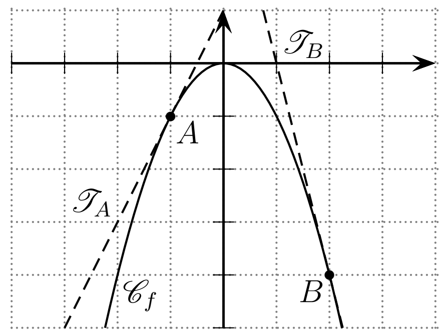
- Les fonctions carré et valeur absolue sont **convexes**.
- La fonction racine carré est **concave**.

Proposition 2.1. ***[Admise]*** *Soit f une fonction définie et deux fois dérivable sur un intervalle I. Les quatre propositions suivantes sont équivalentes :*

1. *f est convexe (concave) sur I ;*
2. *la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de f est entièrement située au-dessus (en dessous) de ses tangentes ;*
3. *f' est croissante (décroissante) sur I ;*
4. *f'' est positive (négative) sur I.*



convexe



concave

Démonstration. **[Partielle]**

3 $\iff$ 4 : Le théorème de première sur les variations des fonctions dérivables affirmait déjà l'équivalence entre la croissance d'une fonction dérivable et la positivité de sa dérivée. On applique ce théorème à f' sur I pour obtenir l'équivalence entre les points *3* et *4*.

4 $\implies$ 2 : On va montrer que si f'' est positive sur I alors $\mathscr{C}_f$ de f est entièrement située au-dessus de ses tangentes.

Soit $a \in I$, on considère la tangente $\mathscr{T}_a$ à $\mathscr{C}_f$ au point $(a\,;f(a))$. Elle a pour équation :

$$y = f'(a)(x-a) + f(a).$$

$\mathscr{C}_f$ est au dessus de $\mathscr{T}_a$ si et seulement si pour tout $x \in I$,

$$f(x) \geqslant f'(a)(x-a) + f(a).$$

On note φ la fonction définie sur I par

$$\varphi(x) = f(x) - (f'(a)(x-a) + f(a)).$$

On va montrer que $\varphi \geqslant 0$. Comme f est deux fois dérivable, φ l'est aussi avec

$$\varphi'(x) = f'(x) - f'(a) \quad \text{et} \quad \varphi''(x) = f''(x).$$

Par hypothèse $f'' > 0$, donc $\varphi'' > 0$. On en déduit que φ' est croissante sur I (on utilise en fait l'équivalence *3* $\iff$ *4*). On a $\varphi'(a) = 0$.

— Si $x \leqslant a$ alors $\varphi' \leqslant 0$ et donc φ est décroissante sur $I \cap]-\infty\,;a[$.

— Si $x \geqslant a$ alors $\varphi' \geqslant 0$ et donc φ est croissante sur $I \cap]a\,;+\infty[$.

Ainsi le minimum de φ sur I est atteint en a et vaut $\varphi(a) = f(a) - (f'(a)(a-a) + f(a)) = 0$. On a donc pour tout $x \in I$, $\varphi(x) \geqslant 0$, i.e. $f(x) - (f'(a)(x-a) + f(a)) \geqslant 0$, ou encore

$$f(x) \geqslant f'(a)(x-a) + f(a).$$

□

Remarques :

— La démonstration est incomplète. En effet, la démonstration énonce que *1* $\iff$ *2* $\iff$ *3* $\iff$ *4* et nous n'avons prouvé que *2* $\Longleftarrow$ *3* $\iff$ *4*.

— Pour démontrer des propositions de ce types, il est usuel de procéder par implications circulaires : *1* $\Longrightarrow$ *2* $\Longrightarrow$ *3* $\Longrightarrow$ *4* $\Longrightarrow$ *1*.

Méthode : Pour déterminer la convexité / concavité d'une fonction deux fois dérivable.

1. Énoncer la propriété faisant le lien entre le signe de f'' et la convexité / concavité de f.
2. Déterminer f'' et son signe.
3. En déduire les intervalles où f est convexe / concave.

Exemple : Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -3x^3 + 4x^2 + 5$.

1. f est un polynôme, donc deux fois dérivable. f est convexe / concave si et seulement si f'' est positive / négative. On va donc étudier le signe de f''.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f'(x) = -9x^2 + 8x \quad \text{et} \quad f''(x) = -18x + 8.$$

Le signe de f'' est :

x	$-\infty$		$\frac{4}{9}$		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	

3. On en déduit que f est convexe sur $\left]-\infty\,;\dfrac{4}{9}\right]$ car f'' y est positive, et concave sur $\left[\dfrac{4}{9}\,;+\infty\right[$ car f'' y est négative.

Méthode : Pour obtenir une inégalité à partir d'une équation de tangente en un point d'abscisse x_0.

1. Déterminer la convexité / concavité de f sur un intervalle I contenant x_0.
2. Déterminer l'équation de la tangente en x_0 : $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.
3. (a) Si f est convexe sur I, on a, pour tout $x \in I$, $f(x) \geqslant f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.
   (b) Si f est concave sur I, on a, pour tout $x \in I$, $f(x) \leqslant f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

Exemple : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^x$.

1. On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f''(x) = \mathrm{e}^x > 0$ donc la fonction f est convexe sur $\mathbb{R}$.
2. L'équation de la tangente à f au point d'abscisse 0 est :

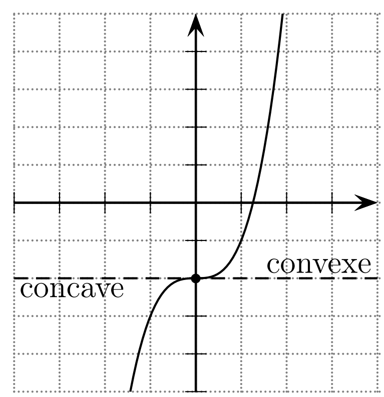
$$y = f'(0)(x - 0) + f(0) = \mathrm{e}^0 \times x + \mathrm{e}^0 = x + 1.$$

3. Comme f est convexe, sa courbe représentative est toujours au dessus de ses tangentes et donc, en particulier, au dessus de celle en 0. Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \mathrm{e}^x \geqslant x + 1$.

Exercices : 2.9 à 2.13 ; 2.27 et 2.28.

2.5 Point d'inflexion

Définition 2.7. *Soit f une fonction. Un **point d'inflexion** de $\mathscr{C}_f$ est un point où la fonction change de convexité : elle passe de convexe à concave ou inversement.*



Proposition 2.2. *Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I. La courbe représentative de la fonction f admet un point d'inflexion au point d'abscisse $a \in I$ si et seulement si f'' s'annule en changeant de signe en a.*

Remarque : En un point d'inflexion, la courbe $\mathscr{C}_f$ traverse sa tangente.

Démonstration. Conséquence directe de la propriété précédente. ☐

Méthode : Pour déterminer les points d'inflexions d'une fonction.

1. Énoncer le fait que les points d'inflexions sont les points où la fonction change de convexité.
2. Déterminer la convexité de f.
3. En déduire les points d'inflexion de f.

Exemple : Reprenons la f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -3x^3 + 4x^2 + 5$. On sait que f est convexe sur $\left]-\infty\,; \frac{4}{9}\right]$, et concave sur $\left[\frac{4}{9}\,; +\infty\right[$. On en déduit que $\left(\frac{4}{9}\,; f\left(\frac{4}{9}\right)\right)$ est un point d'inflexion de $\mathscr{C}_f$.

Exercices : 2.14 à 2.18 ; 2.29 et 2.30.

2.6 Capacités attendues

— Calculer la dérivée d'une fonction donnée par une formule simple mettant en jeu opérations algébriques et composition.

— Calculer la fonction dérivée, déterminer les limites et étudier les variations d'une fonction construite simplement à partir des fonctions de référence.

— Démontrer des inégalités en utilisant la convexité d'une fonction.

— Esquisser l'allure de la courbe représentative d'une fonction f à partir de la donnée de tableaux de variations de f, de f' ou de f''.

— Lire sur une représentation graphique de f, de f' ou de f'' les intervalles où f est convexe, concave, et les points d'inflexion. Dans le cadre de la résolution de problème, étudier et utiliser la convexité d'une fonction.

2.7 Exercices

2.7.1 Progresser

Fonction composée

Exercice 2.1. Soient les fonctions f, g et h définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \mathrm{e}^{5x-4}, \quad g(x) = 2x + 1, \quad h(x) = x^2.$$

1. Déterminer deux fonctions u et v telles que $f(x) = (u \circ v)(x)$ sur $\mathbb{R}$.
2. Pour tous réels x, déterminer $h \circ g(x)$ et $g \circ h(x)$.
3. Pour tous réels x, déterminer $g \circ f(x)$ et $f \circ g(x)$.

Exercice 2.2. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $v \circ u$ et, pour tout x dans cet ensemble, donner l'expression de $(v \circ u)(x)$.

1. $v : x \mapsto \mathrm{e}^x$ et $u : x \mapsto x^2$.
2. $v : x \mapsto \sqrt{x}$ et $u : x \mapsto -x^2 + x + 6$.
3. $v : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ et $u : x \mapsto x^3 - 8$.

Exercice 2.3. Déterminer deux fonctions f et g distinctes, définies sur $[1\,;2]$ telles que pour tout $x \in [1\,;2]$:

$$(g \circ f)(x) = (f \circ g)(x).$$

Dérivation d'une fonction composée

Exercice 2.4. Déterminer, sans se soucier de dérivabilité de f, l'expression de f' sur I.

1. $f(x) = (x^2+5x)^4,\ I = \mathbb{R}$.
2. $f(x) = \dfrac{1}{(4-6x)},\ I = \left]\dfrac{2}{3}\,;+\infty\right[$.
3. $f(x) = \mathrm{e}^{5x^2-3},\ I = \mathbb{R}$.
4. $f(x) = \sqrt{1-x^2},\ I =]-1\,;1[$.

Exercice 2.5. Déterminer les variations sur $\mathbb{R}$ des fonctions f et g définies par :

1. $f(x) = \mathrm{e}^{2x^2-2x+1}$;
2. $g(x) = \left(x^3-12x\right)^5$.

Exercice 2.6. Soit f la fonction définie et dérivable sur $]-1\,;1[$ par $f(x) = \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$.

1. Déterminer l'expression de la dérivée de f.
2. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $]-1\,;1[$ et en déduire les variations de f sur $]-1\,;1[$.
3. Déterminer une équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.

Exercice 2.7. Déterminer l'ensemble de dérivabilité de chacune des fonctions ci-dessous puis l'expression de sa dérivée.

1. $f(x) = \sqrt{-4x^2+16}$.
2. $g(x) = 4x+5+\mathrm{e}^{-2x+3}$.
3. $h(x) = \sqrt{x+\dfrac{1}{x}}$.
4. $i(x) = \sqrt{x+\sqrt{x}}$.
5. $j(x) = \mathrm{e}^{\frac{x+2}{x+7}}$.
6. $k(x) = (x^3+2x^2+3x+4)^5$.

Dérivée seconde

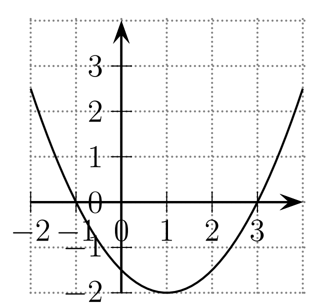
Exercice 2.8. [Équation différentielle] Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x+\sqrt{1+x^2}$.

1. Déterminer l'expression de la dérivée de f.
2. Déterminer l'expression de la dérivée seconde de f.
3. Montrer que pour tout réel x on a : $(1+x^2)f''(x)+xf'(x)-f(x) = 0$.

Convexité

Exercice 2.9. Soit f est une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. Déterminer, en justifiant, la convexité de la fonction f lorsque la courbe tracée dans le repère ci-contre est celle :

1. de la fonction f ;
2. de la fonction f' ;
3. de la fonction f''.



Exercice 2.10. Voici le tableau de signes de la fonction dérivée seconde f'' d'une fonction f deux fois dérivable sur l'intervalle $[-2\,;6]$.

x	-2		0		4		6
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

1. Déterminer la convexité de la fonction f.
2. Est-il possible que :

   (a) $f'(-2) = 1$ et $f'(0) = 0$?

   (b) $f'(0) = 0$ et $f'(4) = -1$?
3. Sachant que $f(0) = 1$ et $f(4) = 1$, tracer dans un repère une courbe pouvant représenter f.

Exercice 2.11. Soit g la fonction définie sur $]-0,5\,;+\infty[$ par $g(x) = \sqrt{2x+1}$.

1. Étudier la convexité de g sur $]-0,5\,;+\infty[$.
2. Déterminer une équation de la tangente à $\mathscr{C}_g$ au point d'abscisse 24.
3. En déduire que $\sqrt{51} \leqslant \dfrac{50}{7}$.

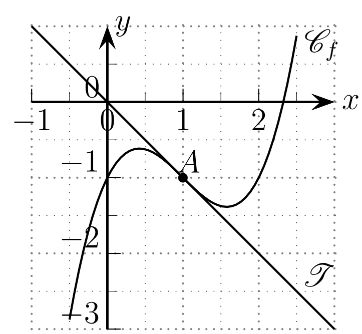
Exercice 2.12. Soit f la fonction exponentielle définie sur $\mathbb{R}$.

1. Étudier la convexité de f sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer une équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 1.
3. En déduire que, pour tout réel x, $\mathrm{e}^x > x$.

Exercice 2.13. Soit P une fonction polynôme définie sur $\mathbb{R}$ par $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ où a, b, c, d sont des réels avec $a \neq 0$. Étudier la convexité de P en fonction de ces coefficients.

Points d'inflexion

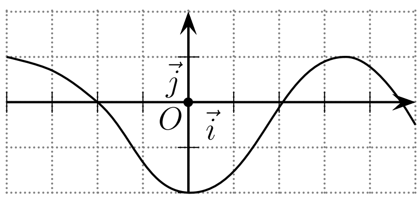
Exercice 2.14. On donne ci-contre la représentation graphique de la fonction f définie sur $[-0,5\,;2,5]$. On a également tracé la tangente $\mathscr{T}$ à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A d'abscisse 1.



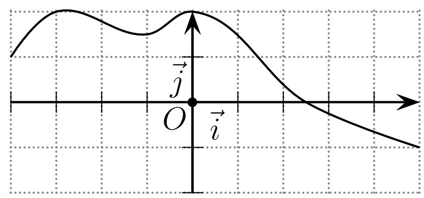
1. Étudier la convexité de f sur $[-0,5\,;2,5]$.
2. Est-ce que A est un point d'inflexion ? Justifier.
3. Lire graphiquement $f(1)$, $f'(1)$ et $f''(1)$.

Exercice 2.15. Soit $\left(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\right)$ un repère du plan. Parmi les trois courbes ci-dessous, déterminer celle qui représente une fonction f vérifiant :

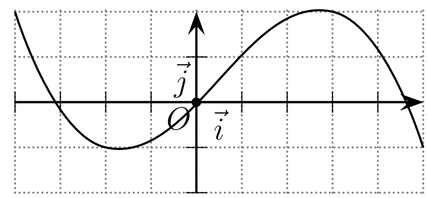
1. f est concave sur $[-4\,;-2]$ et sur $[4\,;5]$;
2. f' s'annule trois fois ;
3. la courbe représentative de f admet trois points d'inflexions.



Courbe 1



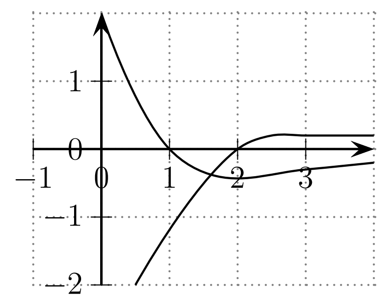
Courbe 2



Courbe 3

Exercice 2.16. f est une fonction deux fois dérivable sur $[0\,;4]$. On a ci-contre les courbes représentatives de f' et f''.

1. Identifier, en justifiant, la courbe correspondant à f' et celle à f''.
2. En déduire la convexité de f en précisant les abscisses des éventuels point d'inflexion.
3. Peut-on déterminer l'ordonnée du point d'inflexion ?



Exercice 2.17. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (x^4 - 10x^3 + 44x^2 - 109x + 128)\mathrm{e}^{x-4}$.

1. Déterminer l'expression de la dérivée et de la dérivée seconde de g.
2. Chercher deux racines évidentes de $x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 7x - 2$. Puis déterminer des réels a, b, c tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 7x - 2 = (x+2)(x-1)(ax^2 + bx + c)$.
3. En déduire le signe de h'' puis étudier la convexité de g et les coordonnées de ses éventuels points d'inflexion.

Exercice 2.18. Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ où a, b, c, d, e sont des réels avec $a \neq 0$. Déterminer des réels a, b, c, d, e, et discuter de l'unicité de ce quintuplet, tels que $\mathscr{C}_f$ admette :

1. deux points d'inflexion d'abscisses 2 et $-0,5$;
2. la droite d'équation $y = -x + 5$ comme tangente au point d'abscisse 0 ;
3. une tangente au point d'abscisse -1 de coefficient directeur $-0,5$.

2.7.2 Approfondir

Exercice 2.19. [Médecine] Les observateurs d'une maladie nécessitant une hospitalisation s'intéressent à l'évolution du nombre de lits occupés par des malades pendant les trois mois d'hiver. On admet que cette évolution peut être modélisée par une fonction f définie sur $[0\,;3]$ par

$$f(x) = 2x\mathrm{e}^{-0,5x^2}$$

où $f(x)$ représente le nombre de lits occupés, exprimé en million, à l'instant x exprimé en mois.

1. (a) Étudier les variations de f.
   (b) Estimer le nombre de lits occupés lors du pic de la maladie.
2. (a) Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;3]$, on a $f''(x) = 2x(x^2-3)\mathrm{e}^{-0,5x^2}$.
   (b) Étudier le signe de $f''(x)$ sur l'intervalle $[0\,;3]$.
   (c) En déduire le sens de variation de la fonction f' et la convexité de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;3]$. Donner les coordonnées des éventuels points d'inflexion de la courbe représentative de f.
3. Comment peut-on qualifier l'évolution du nombre de lits sur $[0\,;1]$? Sur $[0\,;3]$?

Exercice 2.20. [Bac S, Pondichéry, avril 1998] Soient f les fonctions définies sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x\mathrm{e}^x + 1}$ et $g(x) = x + 2 - \mathrm{e}^x$.

Partie A

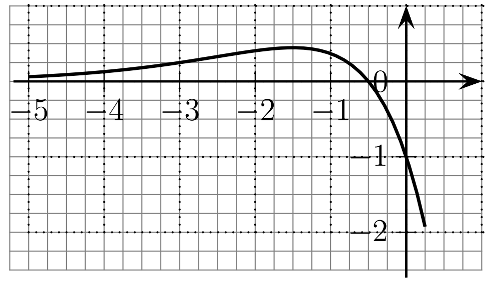
1. Étudier les variations de g sur $[0\,;+\infty[$.
2. On admet que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution a sur $[0\,;+\infty[$. Déterminer un encadrement de a à 10^{-3} prés.
3. En déduire le tableau de signe de g.

Partie B

1. Montrer que pour tout $x \in [0\,;+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x g(x)}{(x\mathrm{e}^x+1)^2}$. En déduire le tableau de variation de f.
2. Prouver que $f(a) = \dfrac{1}{a+1}$. Puis en utilisant l'encadrement de a, donner un encadrement de $f(a)$ à 10^{-2} prés.
3. Déterminer une équation de la tangente $\mathscr{T}$ à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.
4. Montrer que pour tout $x \in [0\,;+\infty[$, $f(x) - x = \dfrac{(x+1)\times u(x)}{x\mathrm{e}^x+1}$ avec $u(x) = \mathrm{e}^x - x\mathrm{e}^x - 1$.
5. Étudier le sens de variation de la fonction u sur $[0\,;+\infty[$.
6. En déduire le signe de $u(x)$ sur $[0\,;+\infty[$.
7. Déduire des questions précédentes la position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à $\mathscr{T}$.

Exercice 2.21. [Extrait d'un QCM du bac 2022 Métropole] On considère une fonction f définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. La courbe de sa fonction dérivée f' est donnée ci-dessous. On admet que f' admet un maximum en $-\dfrac{3}{2}$ et que sa courbe coupe l'axe des abscisses au point de coordonnées $\left(-\dfrac{1}{2}\,;0\right)$.

Pour chacune des questions suivantes, sélectionner la ou les bonnes réponses.



1. (a) La fonction f admet un maximum en $-\dfrac{3}{2}$.
   (b) La fonction f admet un maximum en $-\dfrac{1}{2}$.
   (c) La fonction f admet un minimum en $-\dfrac{1}{2}$;
   (d) Au point d'abscisse -1, la courbe de la fonction f admet une tangente horizontale.
2. (a) La fonction f est convexe sur $\left]-\infty\,;-\dfrac{3}{2}\right[$.
   (b) La fonction f est convexe sur $\left]-\infty\,;-\dfrac{1}{2}\right[$.
   (c) La courbe $\mathscr{C}_f$ représentant la fonction f n'admet pas de point d'inflexion.
   (d) La fonction f est concave sur $\left]-\infty\,;-\dfrac{1}{2}\right[$.
3. La dérivée seconde f'' de la fonction f vérifie :
   (a) $f''(x) \geqslant 0$ pour $x \in \left]-\infty\,;-\dfrac{1}{2}\right[$.
   (b) $f''(x) \geqslant 0$ pour $x \in [-2\,;-1]$.
   (c) $f''\left(-\dfrac{3}{2}\right) = 0$.
   (d) $f''(-3) = 0$.

Exercice 2.22. [Géométrie]** Dans un plan muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\right)$, on considère le cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon 1. On place les points A et A' de coordonnées respectives $(1\,;0)$ et $(-1\,;0)$. Soit H un point du segment $[AA']$ distinct de A et A', on note x son abscisse. Soit $\mathscr{D}$ la droite passant par H perpendiculaire à (AA') et M, M' les deux points d'intersection entre $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$.

1. Faire une figure.
2. Exprimer en fonction de x l'aire du triangle AMM'.
3. Soit f la fonction définie sur $]-1\,;1[$ par $f(x) = (1-x)\sqrt{1-x^2}$.
   (a) Étudier les variations de f sur $]-1\,;1[$.
   (b) En déduire l'abscisse du point H pour que l'aire soit minimale.
   (c) Prouver que, dans ce cas, le triangle AMM' est équilatéral.

2.7.3 S'entraîner

Fonction composée

Exercice 2.23. Déterminer l'ensemble de définition de f puis deux fonctions v et u telles que $f = v \circ u$.

1. $f(x) = \mathrm{e}^{2x^3+4x-1}$.
2. $f(x) = \dfrac{1}{3x^2+5x+4}$.
3. $f(x) = \sqrt{x^2-1}$.
4. $f(x) = |x^4 - \sqrt{3}x^2 + \pi| + 1$.

Dérivation d'une fonction composée

Exercice 2.24. Déterminer, sans se soucier de l'ensemble de dérivabilité, la dérivée des fonctions suivantes.

1. $f(x) = \dfrac{2}{1+\mathrm{e}^{-4x}}$.
2. $g(x) = \sqrt{x^2-3x+5}$.
3. $h(x) = \sqrt{x+\sqrt{x}}$.
4. $i(x) = \mathrm{e}^{x^2-5x+4}$.
5. $j(x) = (\sqrt{3x+5})^3$.
6. $k(x) = (x^2+3x+2)^2(2x^2-5x+7)^3$.

Exercice 2.25. Déterminer l'ensemble de dérivabilité des fonctions de l'exercice 2.24.

Exercice 2.26. Soient a, b deux réels avec $a \neq 0$ et f la fonction définie sur $[3\,;+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{ax+b}$. On note f' sa dérivée définie sur $]3\,;+\infty[$. Sachant que $f(3) = 0$ et $f'(5) = \dfrac{1}{2}$, déterminer les valeurs de a et de b.

Convexité

Exercice 2.27. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^* =]0\,;+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$.

1. Déterminer la convexité de la fonction racine.
2. Déterminer une équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 1.
3. En déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\sqrt{x} \leqslant \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}$.

Exercice 2.28. Soit f la fonction définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^{-5x+1}$. Pour chaque affirmation, déterminer la (ou les) bonne(s) réponse(s) en justifiant.

1. Sur $\mathbb{R}$, la fonction f est :

   (a) positive. (b) croissante. (c) convexe.

2. Sur $\mathbb{R}$, la fonction f' est :

   (a) positive. (b) croissante. (c) convexe.

Points d'inflexion

Exercice 2.29. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4x^3 - 15x^2 - 18x + 12$.

1. Dresser le tableau de variations de la fonction f.
2. Établir la convexité de la fonction f.
3. Déterminer les coordonnées des éventuels points d'inflexion de $\mathscr{C}_f$.

Exercice 2.30. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = (2 - x^2)\mathrm{e}^x$.

1. Déterminer l'expression de la dérivée et de la dérivée seconde de h.
2. En déduire la convexité de h et les coordonnées de ses éventuels points d'inflexion.

2.7.4 Le Flashback !

Flashback 2.1. Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1}$. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $0 < u_n < 2$.