Chapitre 3

Modélisation linéaire discrète

3.1 Suites arithmétiques

3.1.1 Définition

Définition 3.1. *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique réelle. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **arithmétique** s'il existe un nombre réel r tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$:*

$$u_{n+1} = u_n + r.$$

*Le réel r est appelé **raison** de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

$$u_0 \xrightarrow{+r} u_1 \xrightarrow{+r} u_2 \xrightarrow{+r} \cdots \xrightarrow{+r} u_n \xrightarrow{+r} u_{n+1} \xrightarrow{+r} \cdots$$

Exemple : La suite définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = u_n + 3$ est une suite arithmétique de raison 3.

$$2 \xrightarrow{+3} 5 \xrightarrow{+3} 8 \xrightarrow{+3} 11 \xrightarrow{+3} 14 \xrightarrow{+3} 17 \xrightarrow{+3} \cdots$$

Exercices : 3.1 et 3.2 ; 3.9 et 3.10.

3.1.2 Terme général

Théorème 3.1. *Soient r un nombre réel et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r. Quels que soient les entiers naturels n et p, on a :*

$$u_n = u_0 + n \times r \quad et \quad u_n = u_p + (n-p) \times r.$$

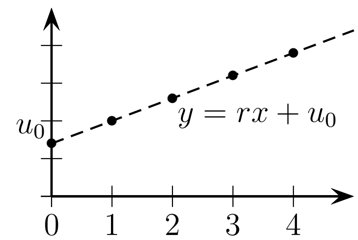
Exemple : En reprenant l'exemple précédent, on trouve que $u_n = 2 + 3n$.

Exemple : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique dont on sait que $u_3 = 24$ et $u_8 = 74$. On sait que

$$u_n = u_p + r \times (n - p).$$

Avec $p = 3$ et $n = 8$, on a alors $u_8 = r \times (8-3) + u_3$, ou encore $74 = 5r + 24$. On en déduit que la raison de notre suite est $r = 10$; reste à déterminer son terme initial u_0. On sait que $u_3 = 3r + u_0$, donc que $u_0 = u_3 - 3r = 24 - 30 = -5$. Notre suite a donc pour terme général $u_n = -5 + 10n$.

Corollaire 3.1. *Soient $r \in \mathbb{R}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r. Les points de la représentation graphique de u sont alignés.*



Remarque : une suite arithmétique est donc une discrétisation d'une fonction affine.

Exercices : 3.3 à 3.5 ; 3.11 et 3.12.

3.1.3 Variations d'une suite arithmétique

Propriété 3.1. *Soient r un nombre réel et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r.*

- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est* ***croissante*** *si et seulement si $r \geqslant 0$.*
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est* ***décroissante*** *si et seulement si $r \leqslant 0$.*
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est* ***constante*** *si et seulement si $r = 0$.*

Exemples :

1. La suite (u_n) arithmétique de premier terme $u_0 = 0$ et de raison $r = 5$ est croissante.
2. La suite (u_n) arithmétique de premier terme $u_0 = 2$ et de raison $r = -3$ est décroissante.

Exercices : 3.6 ; 3.13.

3.2 Capacités attendues

- Reconnaître un phénomène discret de croissance linéaire et savoir le modéliser.
- Calculer un terme de rang donné d'une suite arithmétique définie par une relation fonctionnelle ou une relation de récurrence.
- Réaliser et exploiter la représentation graphique des termes d'une suite arithmétique.
- Résoudre un problème de seuil dans le cas d'une croissance linéaire.

3.3 Exercices

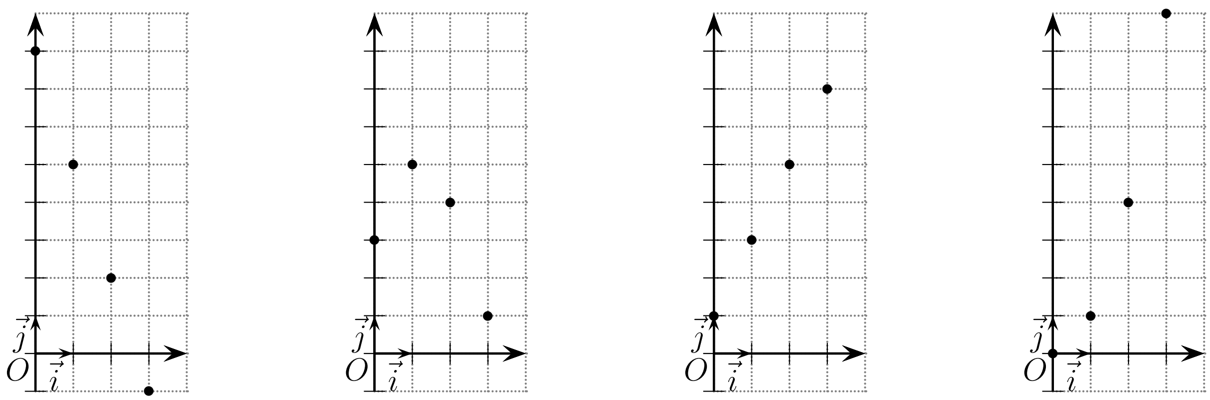
3.3.1 Progresser

Suites arithmétiques

Exercice 3.1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r. Dans chaque cas, calculer u_1, u_2 et u_3.

1. $u_0 = 1$ et $r = 3$.
2. $u_0 = 5$ et $r = -2$.
3. $u_0 = -2$ et $r = -\dfrac{1}{4}$.

Exercice 3.2. On a représenté sur chacun des graphiques ci-dessous les premiers termes d'une suite. Dans chaque cas, préciser si cette suite peut être arithmétique ou non.



Terme général

Exercice 3.3. Donner le terme général des suites de l'exercice 3.1. Dans chaque cas, calculer u_{100}.

Exercice 3.4. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique. Dans chaque cas, donner le terme général de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1. $u_0 = 1$ et $u_3 = 5$.
2. $u_1 = -5$ et $u_9 = -7$.

Exercice 3.5. [Écureuil] Un écureuil décide de faire des réserves de noisettes pour l'hiver. C'est le 1er septembre, il compte le nombre de noisettes qu'il lui reste en réserve : il en a 15. À partir du lendemain, il ajoute 9 noisettes supplémentaires à son stock chaque jour. On note (s_n) la suite donnant le stock de noisettes en réserve au n-ème jour de récolte, ainsi $s_0 = 15$.

1. Calculer s_1 et s_2.
2. Quelle est la nature de (s_n) ? Préciser sa raison.
3. Donner l'expression de s_n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. L'écureuil estime qu'il a besoin de 550 noisettes en réserve pour survivre de début novembre à début avril. Aura-t-il fini de faire ces réserves avant le début de novembre ?

Variations

Exercice 3.6. Donner les variations des suites de l'exercice 3.1.

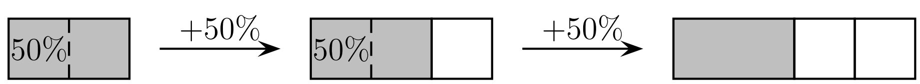
3.3.2 Approfondir

Exercice 3.7. [Intérêts simples] En finance, lorsque l'on place un capital, celui-ci peut rapporter des intérêts : un revenu supplémentaire engendré par le capital. De la même façon, lorsque l'on s'endette, on paye des intérêts au prêteur.

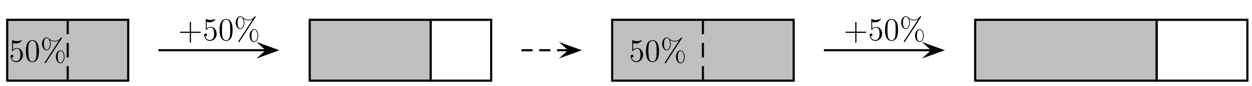
Il existe deux systèmes d'intérêts, les simples et les composés. Les intérêts simples sont calculés à partir du capital initial : à chaque période, le montant du placement ou de l'endettement augmente donc d'une somme fixe égale à $t\%$ du capital de départ. Les intérêts composés, eux, sont calculés à partir du capital de l'année précédente : à chaque période, le montant du placement ou de l'endettement augmente donc d'une somme variable égale à $t\%$ du capital de la période précédente.

Par exemple, un capital de 1 000 euros est placée en banque au taux incroyable de 50%.

Intérêts simples : chaque année, 50% du capital initial (en gris) est ajouté au capital total.



Intérêts composés : chaque année, 50% du capital de l'année précédente (en gris) est ajouté au capital total.



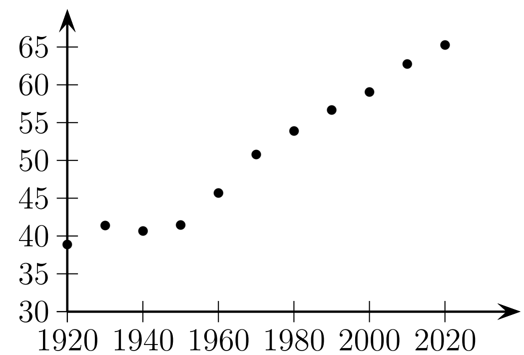
Jessie et James ont besoin d'argent afin de financer leur prochain plan machiavélique. Il décide donc d'emprunter respectivement 500 et 400 pokédollars à Miaouss. Ce dernier accepte de leur prêter contre des intérêts simples journaliers au taux respectifs de 2% et 3%. On note u_n, resp. v_n, le montant dû par Jessie, resp. James, à Miaouss après n jours.

1. Calculer u_{30} et v_{30}. Interpréter.
2. Justifier que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont arithmétiques puis donner leur terme général.
3. La dette de James peut-elle devenir plus importante que celle de Jessie ?

Exercice 3.8. [Évolution de la population en France métropolitaine] Le tableau ci-dessous donne la population de la France métropolitaine (en million d'individus) en fonction de l'année par tranche de dix ans (source : INSEE).

Année	1920	1930	1940	1950	1960	1970	1980	1990	2000	2010	2020
Population	38,9	41,39	40,69	41,48	45,68	50,77	53,88	56,71	59,05	62,77	65,28

Le graphe ci-contre représente le nuage de points correspondant au tableau ci-contre.
Pour tenter de prévoir la population durant les années à venir, il peut être pertinent de la modéliser à l'aide d'une suite.
La population en 2015 était de 64 301 000 et en 2020 de 65 284 000. En cinq ans, elle a donc augmenté de 983 000, soit 196 600 habitants supplémentaires chaque année. On estime qu'elle devrait continuer de croître de la même façon durant les années à venir.



1. Expliquer pourquoi on ne peut pas modéliser l'évolution de la population française depuis 1920 par une suite arithmétique.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$, on note P_n la population française à l'année $2015 + n$.
   (a) Que vaut P_0 ?
   (b) Exprimer P_{n+1} en fonction de P_n.
   (c) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_n = 0,1966n + 64,301$.
3. En 2021, d'après l'INSEE, la population française était de 65 447 000.
   (a) Déterminer la population française en 2021 d'après la suite (P_n).
   (b) Calculer l'erreur commise par le modèle de la suite (P_n) à l'aide de la formule ci-dessous. Arrondir à 0,01% près.

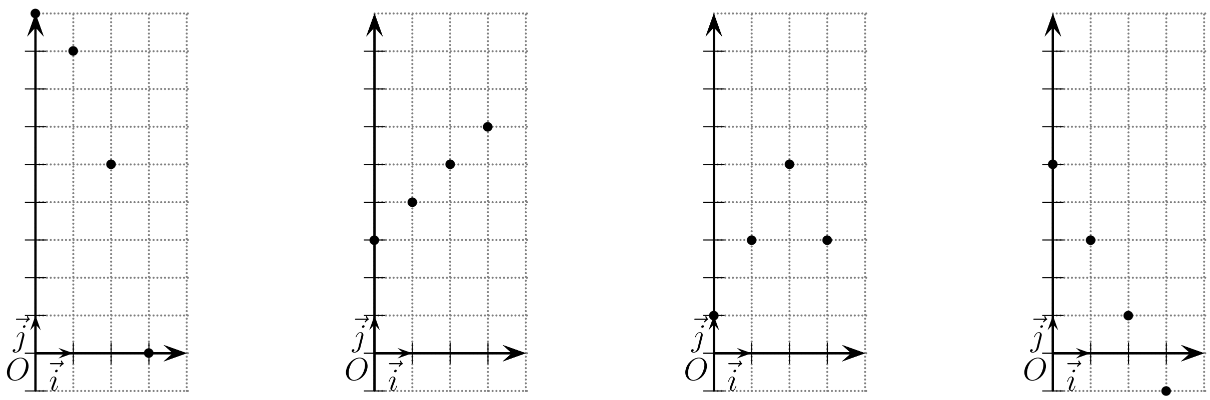
$$\text{erreur} = \left| \frac{\text{valeur approchée} - \text{valeur exacte}}{\text{valeur exacte}} \right|.$$

   (c) L'erreur est jugée acceptable si elle est inférieure à 1%. Qu'en est-il ?
4. Des études montrent que la population française en 2029 devrait atteindre les 67 millions d'individus. Cela remet-il en cause la modélisation par la suite (P_n) ?
5. D'après ce modèle, la population française atteindra-t-elle les 70 millions ? Si oui, en quelle année ?

3.3.3 S'entraîner

Suites arithmétiques

Exercice 3.9. On a représenté sur chacun des graphiques ci-dessous les premiers termes d'une suite. Dans chaque cas, préciser si cette suite peut être arithmétique ou non.



Exercice 3.10. [Des crapauds et des nénuphars] Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1. Un étang comportait en 2010 35 crapauds. Ces derniers ont constaté une augmentation de leur effectif de 2% par an depuis 2010. **Affirmation 1 :** « l'évolution de la population de crapauds peut être modélisée par une suite arithmétique de premier terme 35 ».
2. Un des crapaud de l'étang a remarqué que son nénuphar favori s'élargit chaque jour de 1 cm ; quand il l'a trouvé, il mesurait 5 cm. **Affirmation 2 :** « l'évolution du diamètre du nénuphar peut être modélisée par une suite arithmétique de premier terme 5 ».

Terme général

Exercice 3.11. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique. Dans chaque cas, donner le terme général de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ puis calculer u_0, u_1 et u_{100}.

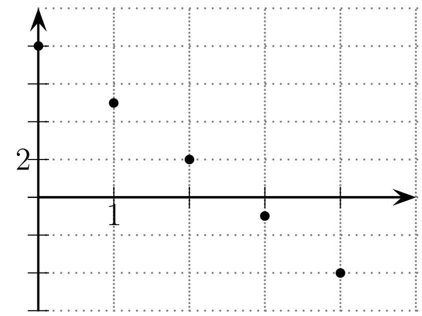
1. $u_0 = -2$ et $u_3 = 8$.
2. $u_{14} = -6$ et $u_{36} = -12$.

Exercice 3.12. [Écureuil 2, le retour des noisettes] Cet exercice fait suite à l'exercice 3.5. C'est le 1$^{\text{er}}$ janvier et notre écureuil fait ses comptes ; il lui reste 360 noisettes.

1. Combien de noisettes a-t-il mangé en moyenne par jour ? On notera r ce nombre.
2. On note (s_n) la suite donnant le nombre de noisettes en réserve au n-ème jour de la saison froide, ainsi $s_1 = 550$.
   (a) Quelle est la nature de (s_n) ?
   (b) Donner l'expression de (s_n) en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (c) Déterminer le plus petit entier n tel que $s_n \leqslant 0$.
   (d) L'écureuil aura-t-il assez de noisettes pour aller jusqu'au 1$^{\text{er}}$ avril à ce rythme ?

Variations

Exercice 3.13. On donne ci-dessous la représentation graphique de la suite arithmétique u. Préciser si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.



1. Le premier terme de la suite est 5.
2. $u_3 = 1$.
3. La raison de la suite est -3.
4. La suite u est décroissante.

3.3.4 Automatismes

Automatisme 3.1. Voici trois nombres. $A = \dfrac{333}{1\,000}$, $B = \dfrac{3}{10}$ et $C = 0,33$. Le classement par ordre croissant de ces trois nombres est :

1. $B < A < C$ 2. $A < B < C$ 3. $A < C < B$ 4. $B < C < A$

Automatisme 3.2. Choisir deux nombres puis calculer la somme de leur inverse. Le résultat obtenu si on choisit comme nombres 4 et 16 est :

1. $\dfrac{1}{10}$ 2. $\dfrac{1}{20}$ 3. $\dfrac{2}{64}$ 4. $\dfrac{5}{16}$

Automatisme 3.3. Le prix d'un article a augmenté : il est passé de 170 euros à 238 euros. Cela signifie que ce prix a été multiplié par :

1. 1,5 2. 1,4 3. 0,4 4. 0,6

Automatisme 3.4. Le prix d'un article a subi une augmentation de 24%. Le taux à appliquer pour que cet article retrouve son prix initial est donné par :

1. $\dfrac{1}{0,24}$ 2. $1 - \dfrac{1}{0,24}$ 3. $\dfrac{-0,24}{1,24}$ 4. $\dfrac{1}{0,76} - 1$

Automatisme 3.5. Une diminution de 30% suivie d'une diminution de 10% équivaut à une diminution de

1. 40% 2. 35% 3. 37% 4. 45%

Automatisme 3.6. Le plan est muni d'un repère orthogonal. On note d la droite passant par les points $B\,(8\,;6)$ et $E\,(9\,;5)$. Le coefficient directeur m de la droite (BE) est égal à :

1. -1
2. 0
3. 1

Automatisme 3.7. p% de 80 est égal à 8. On a :

1. $p = 8$
2. $p = 1$
3. $p = 10$
4. $p = 100$

Automatisme 3.8. Dans une forêt, on dénombre 20 pikachu, ce qui représente 1% du nombre des pokémons de la forêt. Le nombre de pokémons dans la forêt est égal à :

1. 200
2. $2,100$
3. 20
4. 2000

Automatisme 3.9. 10 ; 10 ; 6 ; 1 ; 18. La moyenne de cette série est :

1. 9
2. 7
3. $8,5$
4. 10

Automatisme 3.10. On donne la série statistique suivante : 7 ; 4 ; 6 ; 8 ; 5 ; 20. Parmi ces propositions, laquelle peut être la médiane de la série ?

1. 6
2. 8
3. $6,5$
4. 7

Automatisme 3.11. Une grandeur passe de 140 à 490. L'évolution est une augmentation de :

1. 350%
2. 250%
3. 260%
4. 71%

Automatisme 3.12. On donne la série suivante : 10 ; 8 ; 5 ; 12 ; 6. Quelle valeur faut-il ajouter à la série pour que sa moyenne soit égale à 9 ?

1. 16
2. 13
3. 15
4. 14