Chapitre 6

Modélisation exponentielle discrète

6.1 Suites géométriques

6.1.1 Définition

Définition 6.1. *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique réelle. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est* ***géométrique*** *s'il existe un nombre réel q tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$:*

$$u_{n+1} = u_n \times q.$$

Le réel q est appelé ***raison*** *de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

$$u_0 \xrightarrow{\times q} u_1 \xrightarrow{\times q} u_2 \xrightarrow{\times q} \cdots \xrightarrow{\times q} u_n \xrightarrow{\times q} u_{n+1} \xrightarrow{\times q} \cdots$$

Exemple : La suite définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = u_n \times 3$ est une suite géométrique de raison 3.

$$2 \xrightarrow{\times 3} 6 \xrightarrow{\times 3} 18 \xrightarrow{\times 3} 54 \xrightarrow{\times 3} 162 \xrightarrow{\times 3} 486 \xrightarrow{\times 3} \cdots$$

Exercices : 6.1 et 6.2 ; 6.10 et 6.11.

6.1.2 Terme général

Théorème 6.1. *Soient q un nombre réel et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q. Quels que soient les entiers naturels n et p, on a :*

$$u_n = u_0 \times q^n \quad et \quad u_n = u_p \times q^{n-p}.$$

Exemple : En reprenant l'exemple précédent, on trouve que $u_n = 2 \times 3^n$.

Exemple : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique dont on sait que $u_3 = 24$ et $u_8 = 768$. On sait que

$$u_n = u_p \times q^{n-p}.$$

Avec $p = 3$ et $n = 8$, on a alors $u_8 = u_3 \times q^{8-3}$, ou encore $768 = 24 \times q^5$. On en déduit que $q^5 = \dfrac{768}{24} = 32$, donc que $q = 32^{\frac{1}{5}} = 2$. On a donc déterminé la raison de notre suite : $q = 2$; reste à déterminer son terme initial u_0. On sait que $u_3 = u_0 \times q^3$, donc que $u_0 = \dfrac{u_3}{q^3} = \dfrac{24}{2^3} = \dfrac{24}{8} = 3$.

Notre suite a donc pour terme général $u_n = 3 \times 2^n$.

Exercices : 6.3 à 6.5 ; 6.12 et 6.13.

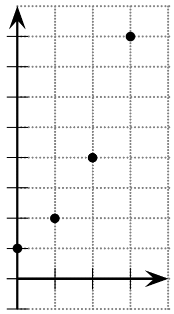
6.1.3 Variations d'une suite géométrique

Propriété 6.1. *Soient q un nombre réel et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q.*

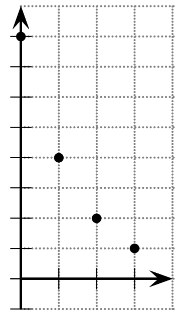
Premier terme u_0	> 0			
Raison q	$q > 1$	$q = 1$	$0 < q < 1$	$q < 0$
Variations de (u_n)	*croissante*	*constante*	*décroissante*	*alternée*
Premier terme u_0	< 0			
Raison q	$q > 1$	$q = 1$	$0 < q < 1$	$q < 0$
Variations de (u_n)	*décroissante*	*constante*	*croissante*	*alternée*

Exemples :

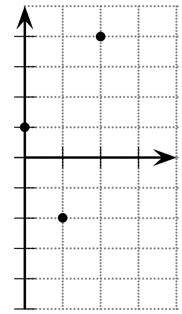
1. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de raison $q = 2$ et avec $u_0 = 1$ est croissante. Ses premiers termes sont :
$$1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32.$$
2. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de raison $q = 1$ et avec $u_0 = 2$ est constante égale à 2. Ses premiers termes sont :
$$2,\ 2,\ 2,\ 2,\ 2,\ 2.$$
3. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de raison $q = \dfrac{1}{2}$ et avec $u_0 = 8$ est décroissante. Ses premiers termes sont :
$$8,\ 4,\ 2,\ 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4}.$$
4. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de raison $q = -2$ et avec $u_0 = 1$ est alternée. Ses premiers termes sont :
$$1,\ -2,\ 4,\ -8,\ 16,\ -32.$$



$u_n = 1 \times 2^n$



$u_n = 8 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$



$u_n = 1 \times (-2)^n$

Exercices : 6.6 ; 6.14.

6.2 Capacités attendues

— Reconnaître un phénomène discret de croissance exponentielle et savoir le modéliser.

— Calculer un terme de rang donné d'une suite géométrique définie par une relation fonctionnelle ou une relation de récurrence.

— Réaliser et exploiter la représentation graphique des termes d'une suite géométrique.

— Résoudre un problème de seuil dans le cas d'une croissance exponentielle par le calcul, à l'aide d'une représentation graphique ou en utilisant un outil numérique.

6.3 Exercices

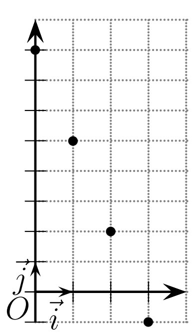
6.3.1 Progresser

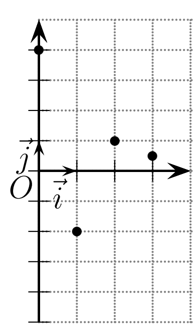
Suites géométriques

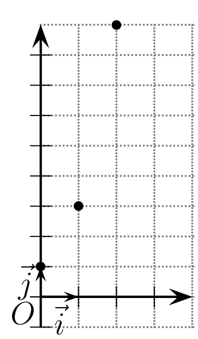
Exercice 6.1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q. Dans chaque cas, calculer u_1, u_2 et u_3.

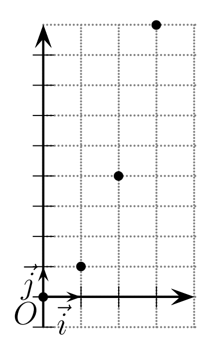
1. $u_0 = 1$ et $q = 3$.
2. $u_0 = 5$ et $q = -2$.
3. $u_0 = -32$ et $q = -\dfrac{1}{4}$.

Exercice 6.2. On a représenté sur chacun des graphiques ci-dessous les premiers termes d'une suite. Dans chaque cas, préciser si cette suite peut être géométrique ou non.









Terme général

Exercice 6.3. Donner le terme général des suites de l'exercice 6.1. Dans chaque cas, calculer u_{100}.

Exercice 6.4. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique. Dans chaque cas, donner le terme général de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1. $u_0 = -2$ et $u_3 = -250$.
2. $u_1 = 60\,000$ et $u_5 = 96$.

Exercice 6.5. [Castors] Dans une certaine région, la population de castors augmente chaque année de 5%. En 2022, le nombre d'individus recensés est de 80. Pour tout entier n, c_n modélise le nombre d'individus à l'année $2022 + n$. Ainsi, c_0 correspond au nombre initial d'individus.

1. Donner c_0.
2. Que représente c_1 ? Calculer sa valeur.
3. Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, c_{n+1} en fonction de c_n.
4. En déduire que (c_n) est géométrique et préciser sa raison.
5. Calculer le nombre de castors dans la région en 2030 selon le modèle.

Variations

Exercice 6.6. Donner les variations des suites de l'exercice 6.1.

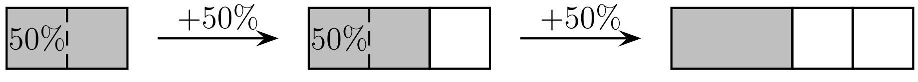
6.3.2 Approfondir

Exercice 6.7. [Intérêts composés, tableur] En finance, lorsque l'on place un capital, celui-ci peut rapporter des intérêts : un revenu supplémentaire engendré par le capital. De la même façon, lorsque l'on s'endette, on paye des intérêts au prêteur.

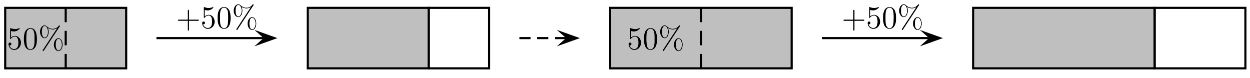
Il existe deux systèmes d'intérêts, les simples et les composés. Les intérêts simples sont calculés à partir du capital initial : à chaque période, le montant du placement ou de l'endettement augmente donc d'une somme fixe égale à t% du capital de départ. Les intérêts composés, eux, sont calculés à partir du capital de l'année précédente : à chaque période, le montant du placement ou de l'endettement augmente donc d'une somme variable égale à t% du capital de la période précédente.

Par exemple, un capital de 1 000 euros est placée en banque au taux incroyable de 50%.

Intérêts simples : chaque année, 50% du capital initial (en gris) est ajouté au capital total.



Intérêts composés : chaque année, 50% du capital de l'année précédente (en gris) est ajouté au capital total.



Jessie et James ont besoin d'argent afin de financer leur prochain plan machiavélique. Ils décident donc d'emprunter respectivement 500 et 400 pokédollars à Miaouss. Ce dernier accepte de leur prêter contre des intérêts composés journaliers au taux respectifs de 2% et 3%. On note u_n, resp. v_n, le montant dû par Jessie, resp. James, à Miaouss après n jours.

1. Que valent u_0 et v_0 ?
2. Calculer u_1 et v_1. Interpréter.
3. Justifier que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont géométriques puis donner leur terme général.
4. Les dettes de Jessie et James vont-elles croître ou décroître ?
5. Combien devront Jessie et James à Miaouss après un mois ?
6. À L'aide d'un tableur, déterminer quand est-ce que la dette de James deviendra plus importante que celle de Jessie.

Exercice 6.8. [Propagation d'une rumeur] En passant devant l'infirmerie, Harry, Hermione et Ron surprennent une conversation entre les professeurs Dumbledore et McGonagall. Ils les entendent dire que si les attaques continuent, l'école risque la fermeture. Après avoir regagné leur salle commune au bout de 20 minutes, ils en parlent chacun à trois camarades à qui ils font jurer de ne rien dire. Mais au bout de 20 minutes, chacun des neuf camarades en parle à trois autres camarades et ainsi de suite...

On note, depuis que Harry, Hermione et Ron ont entendu la conversation de Dumbledore et McGonagall :

— n le nombre de fois où 20 minutes se sont écoulées ;

— t_n le temps écoulé en heures ;

— p_n le nombre de nouvelles personnes informées de la rumeur au temps t_n ;

— T_n le nombre total de personne informées de la rumeur au temps t_n.

1. Observer le tableau suivant et justifier les valeurs déjà indiquées. Le compléter ensuite en expliquant la méthode employée.

n	t_n	p_n	T_n
0	0	3	3
1	1/3	9	12
2	2/3	27	
3	1		
4			

2. Exprimer t_{n+1} en fonction de t_n. En déduire la nature de (t_n) puis son terme général.
3. Exprimer p_{n+1} en fonction de p_n. En déduire la nature de (p_n) puis son terme général.
4. Exprimer T_n en fonction de T_{n-1} et p_n.
5. Au bout de combien de temps les 280 élèves de Poudlard auront entendus la rumeur ?

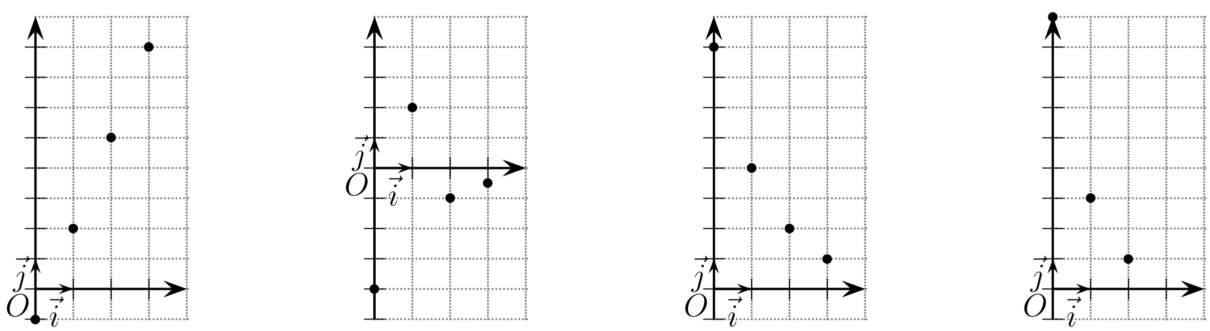
Exercice 6.9. [Origami, tableur] Une feuille de papier a une épaisseur de 0,15 mm ; on note e_0 cette épaisseur. Chaque fois qu'on l'on plie la feuille en deux, son épaisseur double ; on note e_n son épaisseur après n pliages.

1. Calculer e_1 et e_2.
2. Quelle est la nature de la suite (e_n) ? Justifier.
3. Donner le terme général de (e_n).
4. À l'aide d'un tableur, déterminer le nombre de pliages nécessaire pour que l'épaisseur de la feuille de papier pliée soit supérieure à la distance Terre Soleil.

6.3.3 S'entraîner

Suites géométriques

Exercice 6.10. On a représenté sur chacun des graphiques ci-dessous les premiers termes d'une suite. Dans chaque cas, préciser si cette suite peut être géométrique ou non.



Exercice 6.11. [Des crapauds et des nénuphars] Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1. Un étang comportait en 2010 35 crapauds. Ces derniers ont constaté une augmentation de leur effectif de 2% par an depuis 2010. **Affirmation 1 :** « l'évolution de la population de crapauds peut être modélisée par une suite géométrique de premier terme 35 ».
2. Un des crapaud de l'étang a remarqué que son nénuphar favori s'élargit chaque jour de 1 cm ; quand il l'a trouvé, il mesurait 5 cm. **Affirmation 2 :** « l'évolution du diamètre du nénuphar peut être modélisée par une suite géométrique de premier terme 5 ».

Terme général

Exercice 6.12. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique. Dans chaque cas, donner le terme général de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ puis calculer u_0, u_1 et u_{100}.

1. $u_0 = 64$ et $u_3 = 8$.
2. $u_5 = 4\,374$ et $u_7 = 486$.

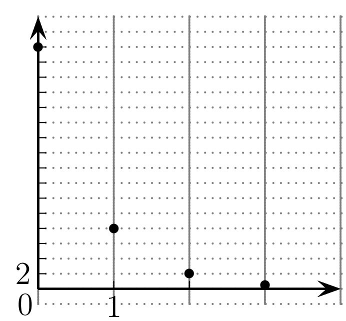
Exercice 6.13. [Élimination d'une substance dans le sang, tableur] On injecte dans le sang d'une personne une dose de 2 mg d'un médicament. On considère que le corps élimine chaque heure 20% du médicament.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note u_n la quantité en mg de médicament présente dans le sang après n heures. Ainsi, $u_0 = 2$.

1. Vérifier que $u_1 = 1,6$.
2. (a) Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_{n+1} en fonction de u_n.
   (b) En déduire que (u_n) est géométrique et préciser sa raison.
3. (a) Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n en fonction de n.
   (b) Au bout de 3 heures, quelle est la quantité de médicament présente dans le sang ?
4. On estime que le médicament n'est plus efficace lorsque sa quantité présente dans le sang est inférieure à 0,5 mg. À l'aide d'un tableur, estimer au bout de combien de temps le médicament ne sera plus efficace.

Variations

Exercice 6.14. On donne ci-dessous la représentation graphique de la suite géométrique u. Préciser si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.



1. Le premier terme de la suite est 4.
2. La raison de la suite est 4.
3. La suite u est décroissante.
4. $u_3 = 0,5$.

6.3.4 Automatismes

Automatisme 6.1. Soit n un entier. À quelle expression est égale $(4^n)^3$?

1. 4^{3+n}
2. 4^{n^3}
3. 12^n
4. 64^n

Automatisme 6.2. La seule égalité vraie est :

1. $6^{-5} \times 7^{-5} = 42^{-10}$
2. $60 \times \dfrac{1}{60^3} = 60^2$
3. $(30^{-4})^4 = 30^0$
4. $\dfrac{12^{-7}}{12^{12}} = 12^{-19}$

Automatisme 6.3. Combien de solutions réelles possède l'équation $7 = -x^2 + 2$?

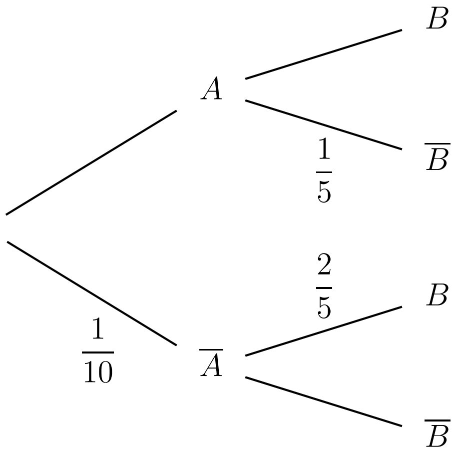
1. Une infinité
2. Aucune
3. Une
4. Deux

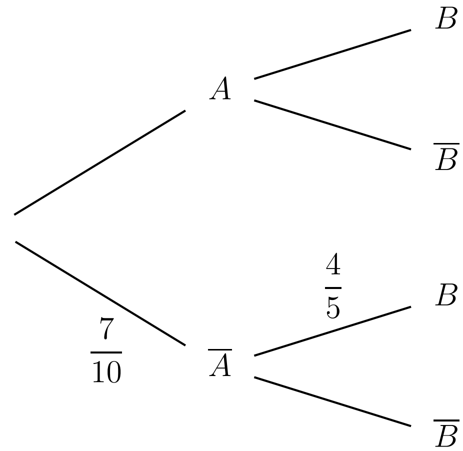
Automatisme 6.4. Le taux d'évolution associé à un coefficient multiplicateur de $0,3$ est

1. -30%
2. $-0,3\%$
3. -70%
4. -7%

Automatisme 6.5. On donne l'arbre de probabilités ci-dessous à gauche. $\mathbb{P}(A \cap B) = \dots$

1. $\dfrac{4}{5}$ 2. $\dfrac{3}{5}$ 3. $\dfrac{17}{10}$ 4. $\dfrac{18}{25}$





Automatisme 6.6. On donne l'arbre de probabilités ci-dessus à droite. On sait que $\mathbb{P}(A \cap B) = \dfrac{3}{25}$.
$\mathbb{P}_A(\overline{B}) = \dots$

1. $\dfrac{3}{5}$ 2. $\dfrac{4}{5}$ 3. $\dfrac{7}{10}$ 4. $\dfrac{2}{5}$

Automatisme 6.7. Dans un prairie, il y a 1 400 pokémons. 20 % d'entre eux sont des roucools. Le nombre de roucouls est égal à :

1. 280 2. 1 120 3. 330 4. 20

Automatisme 6.8. La forme développée de $(5a-8)^2$ est :

1. $25a^2 - 80a + 64$ 2. $25a^2 + 40a + 64$ 3. $25a^2 + 80a + 64$ 4. $25a^2 - 64$

Automatisme 6.9. On considère la fonction f définie par $f(x) = (x-1)(2x-2)$. L'image de -2 par la fonction f est égale à :

1. 18 2. 3 3. -5 4. -9

Automatisme 6.10. Une pokéball coûte 120 pokédollars. Le prix baisse de 15%. Le nouveau prix en pokédollars est :

1. $120 \times 1,15$ 2. $120 \times \left(\dfrac{100-15}{15}\right)$ 3. $120 \times \left(-\dfrac{15}{100}\right)$ 4. $120 \times 0,85$