Chapitre 7

Modélisation exponentielle continue

7.1 Fonction exponentielle de base a

7.1.1 Définition

Définition 7.1. *Soit $a > 0$. On appelle* ***fonction exponentielle de base a****, la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = a^x$.*

Exemples :

— La fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = 1,3^x$ est une fonction exponentielle de base $1,3$.

— La fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $g(x) = 0,2^x$ est une fonction exponentielle de base $0,2$.

Remarques :

— Pour tout $a > 0$, on a $a^0 = 1$ et $a^1 = a$.

— Une fonction exponentielle de base a est le prolongement de la suite géométrique de raison a de $\mathbb{N}$ à $\mathbb{R}_+$. On passe du discrèt ($\mathbb{N}$) au continu ($\mathbb{R}$).

7.1.2 Variations d'une fonction exponentielle de base a

Proposition 7.1. *Soit f une fonction exponentielle de base a.*

— *Si $a > 1$, alors est f est croissante sur $\mathbb{R}_+$.*

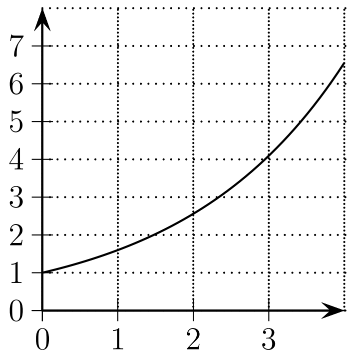
— *Si $a = 1$, alors est f est constante sur $\mathbb{R}_+$.*

— *Si $0 < a < 1$, alors est f est décroissante sur $\mathbb{R}_+$.*

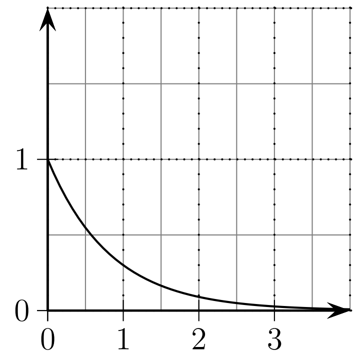
Exemples :

— La fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = 1,6^x$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$.

— La fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $g(x) = 0,3^x$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+$.



$a > 1$



$0 < a < 1$

Exercices : 7.1 à 7.4 ; 7.11 et 7.12.

7.1.3 Propriétés

Proposition 7.2. ***[Admise]*** *Soit $a > 0$ et f une fonction exponentielle de base a.*

— *Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $a^x > 0$.*

— *Pour tous x, x_1, $x_2 \in \mathbb{R}_+$, on a*

1. $a^{x_1} \times a^{x_2} = a^{x_1+a_2}$;
2. $\dfrac{1}{a^x} = a^{-x}$;
3. $\dfrac{a^{x_1}}{a^{x_2}} = a^{x_1-x_2}$;
4. $(a^{x_1})^{x_2} = a^{x_1\times x_2}$.

Exemples :

1. $2^{1,4} \times 2^{3,2} = 2^{1,4+3,2} = 2^{4,6}$;
2. $\dfrac{1}{1,05^{5,1}} = 1,05^{-5,1}$;
3. $\dfrac{4,7^{1,05}}{4,7^{0,95}} = 4,7^{1,05-0,95} = 4,7^{0,1}$;
4. $(8,9^{0,4})^{0,6} = 8,9^{0,4\times0,6} = 8,9^{0,24}$.

Remarque : il s'agit d'une extension aux exposants réels positifs des propriétés vues en seconde sur les puissances pour une base $a > 0$.

Exercices : 7.5 ; 7.13.

7.2 Taux d'évolution moyen

7.2.1 Racine n-ième d'un nombre réel positif

Proposition 7.3. *Soient $a \in \mathbb{R}_+$ et $n \in \mathbb{N}$. L'équation $x^n = a$ admet une unique solution positive appelée* ***racine n-ième*** *de a. On la note $\sqrt[n]{a}$.*

Exemple : L'équation $x^4 = 16$ admet une unique solution appelée racine 4-ième de 16 ; on la note $\sqrt[4]{16}$. Elle vaut 2, en effet, $2^4 = 16$.

Remarques :

— $(\sqrt[n]{a})^n = a$.

— La racine n-ième d'un nombre positif a est positive.

— La racine 2-ième d'un nombre positif a correspond à sa racine carrée.

Proposition 7.4. *Soient $a \in \mathbb{R}_+$ et $n \in \mathbb{N}$. On a $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$.*

Exemple : $16^{\frac{1}{2}} = 2$.

Exercice : 7.6.

7.2.2 Taux d'évolution moyen

Rappel : Soit v_0 une valeur évoluant n fois jusqu'à une valeur v_n. On note c_i les coefficients multiplicateurs et t_i les taux d'évolution associés à chaque évolution. Le **coefficient multiplicateur global** correspondant à l'évolution de v_0 à v_n est

$$C = c_1 \times \cdots \times c_n.$$

$$\begin{tikzcd}
v_0 \arrow[r, "+t_1\%", "\times c_1"'] \arrow[rrr, bend left, "+T\%"] \arrow[rrr, bend right, "\times C = c_1 \times \cdots \times c_n"'] & \cdots & {} \arrow[r, "+t_n\%", "\times c_n"'] & v_n
\end{tikzcd}$$

Définition 7.2. *Soient $n \in \mathbb{N}$, v_0 une valeur initiale évoluant successivement n fois pour devenir v_n, C le coefficient multiplicateur global associé à cette évolution.*

— *On appelle* ***coefficient multiplicateur moyen*** *le nombre $c_m = C^{\frac{1}{n}}$.*

— *On appelle* ***taux d'évolution moyen*** *le nombre $t_m = c_m - 1$.*

Exemple : Un prix augmente de successivement de 10%, puis de 30% et baisse finalement de 10%.

— Globalement, le prix est multiplié par

$$C = 1,1 \times 1,3 \times 0,9 = 1,287.$$

— Si ce prix avait connu trois évolutions successives identiques conduisant à la même évolution globale, il aurait alors été multiplié à trois reprises par le coefficient multiplicateur moyen :

$$c_m = C^{\frac{1}{3}} = 1,287^{\frac{1}{3}} \simeq 1,088.$$

— Le taux d'évolution moyen associé est $t_m = c_m - 1 = 1,088 - 1 = 0,088 = 8,8\%$. Soit une augmentation moyenne de 8,8% par évolution.

Exercices : 7.10 ; 7.14.

7.3 Capacités attendues

— Reconnaître un phénomène continu de croissance exponentielle et savoir le modéliser.

— Calculer un taux d'évolution moyen.

— Réaliser et exploiter la représentation graphique d'une fonction exponentielle.

— Résoudre un problème de seuil dans le cas d'une croissance exponentielle par le calcul, à l'aide d'une représentation graphique ou en utilisant un outil numérique.

7.4 Exercices

7.4.1 Progresser

Définition et variations

Exercice 7.1.

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = 1,25^x$.
   (a) Calculer les images de 0 et 1 par f.
   (b) Construire, en justifiant, le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}_+$.
   (c) Déterminer, s'ils existent, les extremums de f. En quelle(s) valeur(s) sont-ils atteint(s) ?
2. Même question avec $f(x) = 0,9^x$.

Exercice 7.2. Soient f, g, h et k quatre fonctions définies sur $\mathbb{R}_+$ respectivement par

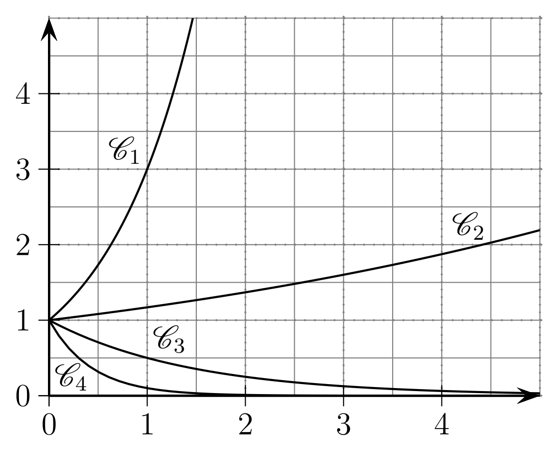
— $f(x) = 0,5^x$;

— $g(x) = 3^x$;

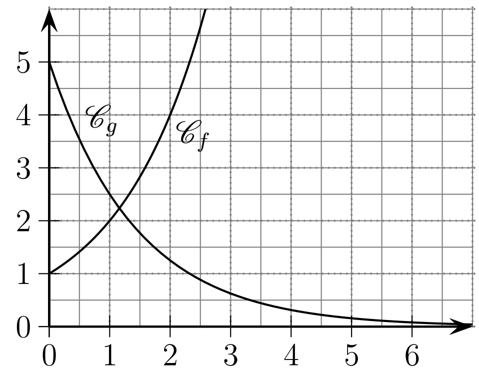
— $h(x) = 1,17^x$;

— $k(x) = 0,1^x$.

On donne ci-contre leurs représentations graphiques. Associer chaque fonction à sa courbe.



Exercice 7.3. On considère deux fonctions f et g définies respectivement par $f(x) = a^x$ et $g(x) = kb^x$ où a, b et k sont des réels strictement positifs. On donne ci-contre les courbes représentatives des deux fonctions.



1. (a) Lire les images de 0, 1 et 2 par f.
   (b) En déduire l'expression de la fonction f.
2. (a) Lire les images de 0 et 1 par g.
   (b) En déduire l'expression de la fonction g.

Exercice 7.4. Déterminer si les situations ci-dessous correspondent à un phénomène continu à croissance exponentielle.

1. Un site internet a été consulté 100 000 fois en janvier. Chaque mois, sa fréquentation augmente de 4 000 visiteurs. On s'intéresse à la fréquentation totale du site au bout de x mois.
2. Chaque année, la consommation mondiale d'énergie primaire est multipliée par 1,06. On s'intéresse à l'évolution annuelle de la consommation mondiale d'énergie primaire au bout de x ans.
3. Le nombre de d'arbres dans une forêt diminue de 15% tous les ans. On s'intéresse au nombre total d'arbres au bout de x ans.

Propriétés

Exercice 7.5. Donner la (ou les) bonne(s) réponse(s).

1. $3^{2,1} \times 3^5$ est égal à :

   (a) $3^{7,1}$. (b) $9^{7,1}$. (c) $3^{10,5}$. (d) $9^{10,5}$.

2. $25 \times 5^{3,4}$ est égal à :

   (a) $5^{5,4}$. (b) $5^{6,8}$. (c) $125^{3,4}$. (d) $125^{4,4}$.

3. $\dfrac{1,5^{5,5}}{1,5^{3,5}}$ est égal à :

   (a) $1^{1,57}$. (b) 1^2. (c) $1,5^{1,57}$. (d) $1,5^2$.

Racine n-ième

Exercice 7.6. À l'aide de la calculatrice, donner une valeur arrondie au millième de :

1. la racine 4-ième de 29 ;
2. la racine 7-ième de 18,4 ;
3. $\sqrt[8]{12}$;
4. $\sqrt[3]{2,5}$.

Taux d'évolution moyen

Exercice 7.7. Calculer le coefficient multiplicateur moyen puis le taux d'évolution moyen associé à chacune de ces évolutions successives :

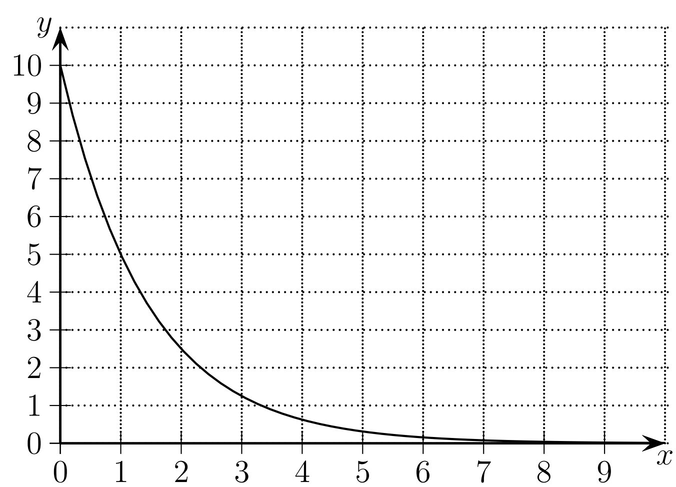
1. $t_1 = 5\%$, $t_2 = 12\%$, $t_3 = -24\%$;
2. $t_1 = -10\%$, $t_2 = -32\%$, $t_3 = 4\%$.

7.4.2 Approfondir

Exercice 7.8. [Désintégration radioactive, tableur] La **radioactivité** est le phénomène physique par lequel un atome se transforme en un autre en émettant de l'énergie et des particules. La désintégration atomique est phénomène aléatoire, on ne peut donc pas prédire lorsqu'elle se produira. Cependant, en observant un grand nombre d'atomes qui se désintègrent, on réalise que les désintégrations sont soumises à des régularités.

Par l'exemple, pour l'iode 131 (utilisé en radiothérapie), le nombre de noyaux radioactifs d'un échantillon est divisé par 2 par rapport au nombre initial au bout de 8 jours, par 4 au bout de 16 jours, par 8 au bout de 24 jours, etc. Le nombre de noyaux radioactifs est donc divisé par 2 tous les 8 jours.

On appelle **demi-vie** (notée $T_{1/2}$) d'un atome radioactif la période durant laquelle la moitié des noyaux initialement présents se désintègrent. Ainsi, l'iode 131 a une demi-vie de 8 jours.
On considère un échantillon de 10 millions de noyaux radioactifs d'iode 131 à l'instant initial. On a représenté ci-contre la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = 10 \times 0,5^x$ qui donne le nombre d'atomes radioactifs (en million) après x demi-vies.



1. Donner le nombre de noyaux radioactifs présents après 2 demi-vies. Combien de jours se sont écoulés ?
2. Donner le nombre de noyaux radioactifs présents après 24 jours.
3. Donner le nombre de noyaux radioactifs présents après 36 jours.
4. On cherche à partir de combien de demi-vies il reste moins d'un million de noyaux radioactifs.
   (a) Quelle équation doit-on résoudre pour répondre à cette question ?
   (b) À l'aide du tableur, donner une valeur approchée à 0,1 près de la solution de cette équation.
   (c) En déduire à partir de combien de demi-vies il restera moins d'un million de noyaux radioactifs.

Exercice 7.9. [Datation au Carbone 14] Les organismes vivants contiennent naturellement du carbone 14 provenant de l'interaction des rayons cosmiques avec le carbone 12 de l'atmosphère. La proportion de carbone 14 par rapport au 12 dans un organisme vivant est constante. Lorsque ce dernier meurt, il n'absorbe plus de carbone ; le carbone 14 (radioactif) qu'il contient se désintègre alors que le 12 (stable) n'évolue pas.

Il faut environ 5 730 ans pour que la moitié du carbone 14 se transforme en 12. On dit que la demi-vie du carbone 14 est alors de 5 730 ans : la quantité de carbone 14 est divisée par 2 tous les 5 730 ans.

1. Des archéologues trouvent des ossements dans une grotte. Ils mesurent que la proportion de carbone 14 a été divisée par 8 par rapport à la proportion que l'on retrouve chez un être vivant. Estimer une datation de l'occupation de la grotte.
2. (a) Lorsque la proportion de carbone 14 est inférieure à 0,3% de sa valeur initiale, on considère que la méthode de datation au carbone 14 n'est plus efficace. Déterminer l'âge maximal des organismes qui peuvent être datés à l'aide du carbone 14.
   (b) Peut-on dater des os de dinosaures à l'aide du carbone 14 ?

Exercice 7.10. [Inflation] Selon l'INSEE, l'inflation est « la perte de pouvoir d'achat de la monnaie qui se traduit par une augmentation générale et durable des prix ». Ci-dessous, on donne les taux d'inflations annuels entre 2020 et 2024

Année	2020	2021	2022	2023	2024
Taux d'inflation	0,5%	1,6%	5,2%	4,9%	2%

1. On considère un bien ou un service ayant subi toutes ces augmentations, de combien de pourcents a augmenté son prix entre 2020 et 2024 ? On arrondira au dixième.
2. Un éditorialiste affirme que l'inflation a été en moyenne de 2,84% par an sur les cinq dernières années. Il dit avoir trouvé ce résultat grâce au calcul suivant

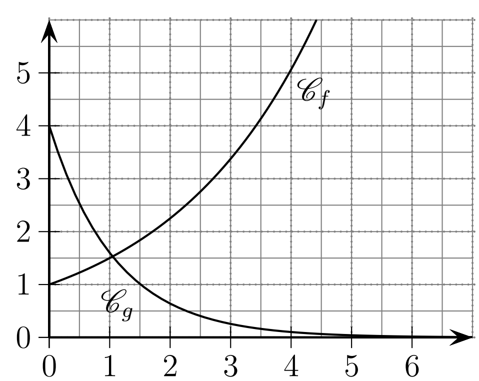
$$\frac{0,5+1,6+5,2+4,9+2}{5} = 2,84.$$

   Que faut-il en penser ? Rectifier si nécessaire.

7.4.3 S'entraîner

Définition et variations

Exercice 7.11. On considère deux fonctions f et g définies respectivement par $f(x) = a^x$ et $g(x) = kb^x$ où a, b et k sont des réels strictement positifs. On donne ci-contre les courbes représentatives des deux fonctions.



1. (a) Lire les images de 0, 1 et 2 par f.
   (b) En déduire l'expression de la fonction f.
2. (a) Lire les images de 0 et 1 par g.
   (b) En déduire l'expression de la fonction g.

Exercice 7.12. [Le marchand de sable] Une entreprise d'extraction de sable modélise les coûts journaliers, en millier d'euros, engendrés par la production de x tonnes de sable à l'aide de la fonction c définie par $c(x) = 1,9 \times 1,03^x$.

1. Pourquoi peut-on dire que la fonction c modélise un phénomène continu de croissance exponentielle ?
2. Calculer $c(0)$ et interpréter.
3. Calculer les coûts d'exploitation si l'entreprise extrait 2,3 tonnes de sable.
4. Les coûts d'exploitation doublent-il si la quantité de sable extraite double ? Justifier.

Propriétés

Exercice 7.13. Donner la (ou les) bonne(s) réponse(s).

1. $4^{5,3} \times 4^{8,1}$ est égal à :

   (a) $4^{42,93}$. (b) $16^{42,93}$. (c) $4^{13,4}$. (d) $16^{13,4}$.

2. $36 \times 6^{1,1}$ est égal à :

   (a) $6^{3,1}$. (b) $6^{2,2}$. (c) $216^{3,1}$. (d) $216^{2,2}$.

3. $\dfrac{4^{4,8}}{128}$ est égal à :

   (a) $4^{0,8}$. (b) $4^{8,8}$. (c) $4^{1,3}$. (d) $4^{19,2}$.

Taux d'évolution moyen

Exercice 7.14. Calculer le coefficient multiplicateur moyen puis le taux d'évolution moyen associé à chacune de ces évolutions successives :

1. $t_1 = 10\%$, $t_2 = 15\%$, $t_3 = 20\%$;
2. $t_1 = 5\%$, $t_2 = -20\%$, $t_3 = -5\%$.

7.4.4 Automatismes

Automatisme 7.1. Soient a et b deux nombres réels non nuls. À quelle expression est égale $a^3 \times b^6$?

1. $(ab)^{18}$
2. $(ab)^3 \times b^3$
3. $(ab)^9$
4. Aucune de ces propositions.

Automatisme 7.2. Soit a un nombre réel non nul et n un entier non nul. À quelle expression est égale $a^{3n}(a^n)^2$?

1. a^{6n^2}
2. a^{6n}
3. a^{5n^2}
4. a^{5n}

Automatisme 7.3. On considère $A = \dfrac{280}{100} + \dfrac{6}{1\,000}$. On a :

1. $A = 2{,}800\,6$
2. $A = 2,806$
3. $A = 0{,}028\,6$
4. $A = 0,286$

Automatisme 7.4. Le prix d'un article est noté P. Il connaît deux augmentations successives de 20%. Le prix après ces augmentations est :

1. $\dfrac{P}{1,44}$
2. $P \times 1,4$
3. $P \times 1,2^2$
4. $P \times \left(1 + \left(\dfrac{20}{100}\right)^2\right)$

Automatisme 7.5. Le prix d'un article a subi une augmentation de 48%. Le taux à appliquer pour que cet article retrouve son prix initial est donné par :

1. $1 - \dfrac{1}{0,48}$
2. $\dfrac{1}{0,52} - 1$
3. $\dfrac{1}{1,48} - 1$
4. $\dfrac{1}{0,48}$

Automatisme 7.6. Soit t la fonction définie par : $t(x) = 4x - 1$. $t(0) - t(-2)$ est égal à :

1. -1
2. 8
3. -10
4. 7

Automatisme 7.7. Les coordonnées du point d'intersection entre la droite d'équation $y = 5x-15$ et l'axe des abscisses sont :

1. $(-15\,;0)$
2. $(-3\,;0)$
3. $(3\,;0)$
4. $(0\,;-15)$

Automatisme 7.8. Ce matin, Marie a ouvert une bouteille d'eau. Elle a bu $\dfrac{5}{7}$ de la bouteille. Puis à midi, elle a bu $\dfrac{1}{6}$ du reste. Quelle fraction de la bouteille a-t-elle bu à midi ?

1. $\dfrac{1}{21}$
2. $\dfrac{5}{6}$
3. $\dfrac{5}{42}$
4. $\dfrac{2}{7}$

Automatisme 7.9. Dans une région de France, le tarif de l'eau est le suivant : un abonnement annuel de 48 € et un prix par mètre cube consommé. Une famille a payé une facture de 393, 92 € pour une consommation de 94 m^3. Le prix du mètre cube consommé est donné par le calcul :

1. $\dfrac{3,68 \times 94}{393,92}$
2. $\dfrac{393,92 - 48}{94}$
3. $\dfrac{393,92 - 94}{48}$
4. $393,92 - 48 \times 94$

Automatisme 7.10. Quel est l'ensemble des solutions de l'inéquation $3x - 6 \leqslant 0$?

1. $[-2\,;+\infty[$
2. $]-\infty\,;2]$
3. $]-\infty\,;-2[$
4. $]2\,;+\infty[$

Automatisme 7.11. Soient t, r, s et u quatre nombres (avec u non nul) vérifiant l'égalité : $t = (r - s)u$. Une expression de s en fonction de t, r et u est :

1. $s = \dfrac{t - ru}{u}$
2. $s = t - ru$
3. $s = r - \dfrac{t}{u}$
4. $s = r + \dfrac{t}{u}$

Automatisme 7.12. La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (6x + 30)(2x - 10)$ admet pour tableau de signes :

1.

x	$-\infty$		-5		5		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

2.

x	$-\infty$		5		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$+$	

3.

x	$-\infty$		-5		5		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	