

Chapitre 2

Informations chiffrées

2.1 Fréquences marginales et conditionnelles

2.1.1 Fréquence marginale

Définition 2.1. Soient E un ensemble non vide et F un sous-ensemble de E . La **fréquence marginale**, ou **proportion**, de F dans E est le réel défini par $f(F) = \frac{\text{mesure}(F)}{\text{mesure}(E)}$.

Remarque : la mesure d'un ensemble peut être son nombre d'éléments, sa longueur, sa surface, son volume, etc.

Proposition 2.1. Une fréquence, ou proportion, f est un nombre toujours compris entre 0 et 1 : $0 \leq f \leq 1$.

Exemple : Parmi les pokémons de la première génération (au nombre de 150), 32 sont de type eau, 5 de type glace, 3 de type eau et glace. On note E l'ensemble des pokémons de type eau et G l'ensemble des pokémons de type glace. La fréquence marginale de pokémons eau est

$$f(E) = \frac{32}{150} = 0,213.$$

	E	\bar{E}	Total
G	3	2	5
\bar{G}	29	116	145
Total	32	118	150

Remarque : le tableau ci-dessus est ce qu'on appelle un **tableau croisé d'effectifs**. Il permet de croiser les effectifs de deux caractères d'une même population ; ici les pokémons eau (ou non) et les pokémons glace (ou non).

Exercices : 2.1 et 2.2 ; 2.15.

2.1.2 Fréquence conditionnelle

Définition 2.2. Soient E un ensemble non vide, F un sous-ensemble non vide de E et G un sous-ensemble de E . La **fréquence conditionnelle** de G dans F est le réel défini par $f_F(G) = \frac{\text{mesure}(G)}{\text{mesure}(F)}$.

Exemple : En reprenant l'exemple précédent, la fréquence conditionnelle des pokémons glace qui sont des pokémons eau est

$$f_E(G) = \frac{3}{32} = 0,09375.$$

Exercices : 2.3 à 2.5; 2.16 et 2.17.

2.2 Évolutions

2.2.1 Taux d'évolution

Définition 2.3. Soit v_0 une valeur non nulle évoluant jusqu'à une valeur v_1 .

- On appelle **évolution absolue** de v_0 à v_1 la différence $v_1 - v_0$.
- On appelle **taux d'évolution relatif** à v_0 le rapport $t = \frac{v_1 - v_0}{v_0}$.

Exemple : Après être monté de niveau, la vitesse de Bulbizarre est passé de 33 à 36. On a $v_0 = 33$ et $v_1 = 36$, le taux d'évolution est

$$t = \frac{36 - 33}{33} = \frac{3}{33} = 0,09 = 9\%.$$

La vitesse de Bulbizarre a donc augmenté de 9%.

Exercices : 2.6 et 2.7; 2.18 et 2.19.

2.2.2 Coefficient multiplicateur

Définition 2.4. Soit v_0 une valeur non nulle évoluant jusqu'à une valeur v_1 . On appelle **coefficient multiplicateur** le rapport $c = \frac{v_1}{v_0}$.

Exemple : Après avoir lancé deux fois l'attaque Mur lumière, la défense spéciale de Raichu est passée de 72 à 180. On a $v_0 = 72$ et $v_1 = 180$, le coefficient multiplicateur est donc $c = \frac{180}{72} = 2,5$, sa défense a donc été multipliée par 2,5.

Proposition 2.2. Avec les notations précédentes, on a un lien entre coefficient multiplicateur et taux d'évolution :

$$c = 1 + t \quad \text{ou encore} \quad t = c - 1.$$

Démonstration. Soit v_0 une valeur évoluant jusqu'à une valeur v_1 . On a

$$t = \frac{v_1 - v_0}{v_0} = \frac{v_1}{v_0} - \frac{v_0}{v_0} = c - 1.$$

□

Exemples : En reprenant l'exemple précédent, on trouve le taux d'évolution $t = 2,5 - 1 = 1,5 = 150\%$, autrement dit, la défense de Raichu a augmenté de 150%.

Exemples :

Taux d'évolution t (en %)	+25%	-3%	-200%	+150%	-90%
Coefficient multiplicateur c	1,25	0,97	-1	2,5	0,1

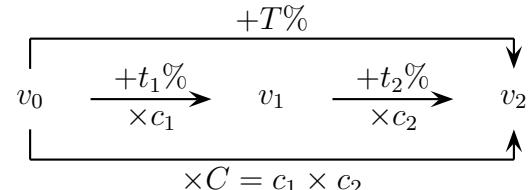
Remarques : Si $c < 1$, on a une diminution ; si $c > 1$, on a une augmentation.

Exercices : 2.8 et 2.9 ; 2.20 et 2.21.

2.3 Évolutions successives

Proposition 2.3. Soit v_0 une valeur évoluant jusqu'à une valeur v_1 ; on note le coefficient multiplicateur c_1 . Puis v_1 évolue jusqu'à une valeur v_2 ; on note le coefficient multiplicateur c_2 . Le **coefficient multiplicateur global** correspondant à l'évolution de v_0 à v_2 est

$$C = c_1 \times c_2.$$



Remarque : attention, les pourcentages d'évolutions ne s'additionnent pas : $T \neq t_1 + t_2$.

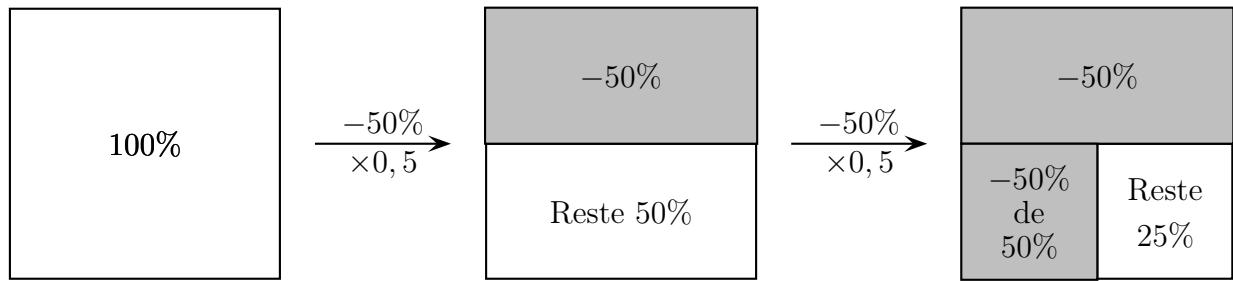
Exemple : À quelle évolution globale correspond une baisse de 50% suivie d'une deuxième baisse de 50% ?

On a $c_1 = c_2 = 1 - \frac{50}{100} = 0,5$ donc

$$C = c_1 \times c_2 = 0,5 \times 0,5 = 0,25.$$

On a alors $T = C - 1 = 0,25 - 1 = -0,75 = -75\%$; on a donc une baisse de 75% et non pas de 100%.





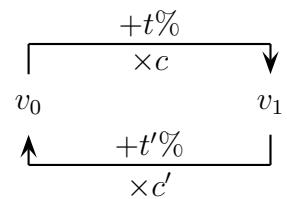
Exercices : 2.10 et 2.11 ; 2.22 et 2.23.

2.4 Évolution réciproque

Définition 2.5. Soit v_0 une valeur non nulle évoluant jusqu'à une valeur v_1 . On appelle **évolution réciproque** l'évolution allant de v_1 jusqu'à v_0 .

Proposition 2.4. Soient v_0 une valeur non nulle évoluant jusqu'à une valeur v_1 et c le coefficient multiplicateur associé à cette évolution.

- On appelle **coefficient multiplicateur réciproque** le coefficient multiplicateur c' permettant de passer de v_1 à v_0 . On a alors $c \times c' = 1$.
- On appelle **taux d'évolution réciproque** le taux d'évolution t' permettant de passer de v_1 à v_0 . On a alors $t' = c' - 1$.



Exemple : Considérons une diminution de 75% et déterminons son évolution réciproque. Le coefficient multiplicateur associé à cette augmentation est $c = 1 - \frac{75}{100} = 0,25$. Le coefficient multiplicateur réciproque est alors $c' = \frac{1}{c} = \frac{1}{0,25} = 4$. On en déduit que le taux d'évolution réciproque est $t' = c' - 1 = 4 - 1 = 3 = 300\%$. Une baisse de 75% est donc compensée par une hausse de 300%.

Exercices : 2.12 à 2.14 ; 2.24.

2.5 Capacités attendues

- Construire un tableau croisé d'effectifs.
- Interpréter un tableau croisé en utilisant des fréquences conditionnelles.
- Calculer des fréquences conditionnelles et des fréquences marginales à partir d'un tableau croisé d'effectifs.
- Exploiter la relation entre deux valeurs successives et leur taux d'évolution.
- Calculer le taux d'évolution global à partir des taux d'évolution successifs. Calculer un taux d'évolution réciproque.

2.6 Exercices

2.6.1 Progresser

Fréquence marginale

Exercice 2.1. [Pokémons] Parmi les 150 premiers pokémons, 18 sont de type vol. Quelle fréquence de pokémons cela représente-t-il ? Arrondir à 0,1% près.

Exercice 2.2. [Pokémons] Parmi les 150 premiers pokémons, 9% sont de type plante. Quel est le nombre de pokémons de type plante ?

Fréquence conditionnelle

Exercice 2.3. [Kung-fu dugongs] On s'intéresse à la population des kung-fu dugongs d'Alabasta. On en dénombre au total 340, dont :

- 42 entraînés par Luffy ;
- parmi ceux entraînés par Luffy, 12 de niveau moyen et 20 de niveau confirmé ;
- 100 de niveau débutant et 150 de niveau moyen au total.

Effectifs	Débutant	Moyen	Confirmé	Total
Entraînés par Luffy				
Non entraînés par Luffy				
Total				

1. Compléter le tableau d'effectifs ci-dessus.
2. Quelle est la fréquence marginale de kung-fu dugong de niveau confirmé ?
3. Calculer la fréquence de kung-fu dugongs de niveau confirmé parmi ceux entraînés par Luffy (arrondir à 0,1% près). Comparer avec la fréquence de kung-fu dugong de niveau confirmé parmi ceux non entraînés par Luffy.
4. **[Tableur]** Représenter ces effectifs sur un tableur.



Exercice 2.4. [Paradoxe de Simpson] Quatre médecins britanniques ont mené en 1986 une étude comparative sur l'efficacité de différents traitements contre les calculs rénaux. Ces traitements que l'on nommera par la suite traitement A et B ont respectivement été mis au point dans les années 70 et 80. On a reporté les résultats dans les deux tableaux ci-dessous suivant la taille du calcul rénal.

Petits calculs rénaux			
	Réussite	Échec	Total
Traitement A	81	6	87
Traitement B	234	36	270
Total	315	42	357

Gros calculs rénaux			
	Réussite	Échec	Total
Traitement A	192	71	263
Traitement B	55	25	80
Total	247	96	343

On s'intéresse aux deux affirmations suivantes :

Affirmation 1 : « Que ce soit sur les petits calculs rénaux ou les gros, le traitement A est plus efficace que le B ».

Affirmation 2 : « Sur l'ensemble des calculs rénaux, le traitement B est efficace à 83% environ alors que le traitement A n'est efficace qu'à 78% environ ».

1. (a) Justifier que le taux de réussite du traitement A est de 93% sur les petits calculs rénaux.
(b) Vérifier que l'affirmation 1 est vraie.
2. Vérifier que l'affirmation 2 est également vraie.
3. En quoi ces deux affirmations mettent en évidence un paradoxe ?
4. (a) On considère les petits calculs rénaux. Calculer les fréquences d'utilisations marginales des traitements A et B.
(b) Idem avec les gros calculs rénaux ; on présentera l'ensemble des résultats dans un tableau.
5. (a) Compléter le tableau ci-contre réunissant les deux traitements.
(b) Calculer la fréquence conditionnelle de réussite parmi les gros calculs rénaux.
(c) Calculer la fréquence conditionnelle de réussite parmi les petits calculs rénaux.

	Réussite	Échec	Total
Petits calculs rénaux			
Gros calculs rénaux			
Total			

6. Expliquer les passages en **gras** du texte suivant à l'aide des calculs réalisés dans questions précédentes.

« La taille du calcul rénal a une influence sur le **choix du traitement** (les calculs de taille élevée ont été plus souvent traités par le traitement A) ainsi que sur le **résultat** du traitement (les calculs de taille élevée sont plus difficiles à soigner). Ainsi, la taille du calcul a un véritable impact sur les fréquences de succès. On dit que c'est un **facteur de confusion** ».

7. Quel traitement un médecin doit-il conseiller à un patient souffrant de calculs rénaux ? Expliquer.

Exercice 2.5. [Émission de gaz à effet de serre] On s'intéresse aux émissions de gaz à effet de serre (GES, en million de tonnes équivalent CO₂) des pays européens dans les principaux secteurs pour l'année 2017. On prendra comme exemple trois pays dont les relevés associés sont répertoriés dans le tableau ci-dessous (source INSEE TEF 2017).

Secteur	Énergie	Agriculture	Industrie	Autres	Total
Allemagne	766	66	64	40	936
France	327	76	44	35	482
Royaume Uni	379	41	30	55	505

On arrondira les résultats à 0,01%.

1. Citer les deux caractères étudiés ici.
2. Déterminer la fréquence conditionnelle par rapport aux émissions françaises de l'énergie.
3. Comparer les résultats obtenus avec les mêmes émissions de l'Allemagne et du Royaume Uni.
4. Par rapport à leurs émissions totales, quel est le pays émettant le plus de GES pour l'énergie.
5. On sait qu'au total, 4 483 de tonnes de GES ont été émis en Europe cette même année. Quelle est la fréquence marginale des émissions liées à l'énergie de ces trois pays par rapport aux émissions européennes ?

Taux d'évolution

Exercice 2.6. Déterminer le pourcentage d'évolution des primes de Luffy et Zoro. Arrondir au pourcent.

1. La prime de Luffy est passé de 30 000 000 à 3 000 000 000 Berrys entre son arrivée sur Grand Line et son de départ de Wa.
2. La prime de Zoro est passé de 60 000 000 à 1 111 000 000 Berrys entre son départ d'Alabasta et son de départ de Wa.

Exercice 2.7. [Prix et volumes] Le prix unitaire d'un produit diminue de 10%. Calculer le pourcentage d'augmentation de la quantité de produits que l'on doit vendre afin que la recette augmente de 15%.

Coefficient multiplicateur

Exercice 2.8. Compléter le tableau suivant :

Évolution (en %)	+55%		-26%	+305%	
Coefficient multiplicateur		1,4			0,35

Exercice 2.9.

1. Augmenter de 7,5% revient à multiplier par
2. Diminuer de 35% revient à multiplier par
3. Réduire de 75% revient à multiplier par
4. Diminuer de 4,6% revient à multiplier par
5. Augmenter de 0,3% revient à multiplier par



Évolutions successives

Exercice 2.10. Calculer le taux d'évolution global connaissant les coefficients multiplicateurs intermédiaires dans chacun des cas suivants :

1. $c_1 = 0,4$ et $c_2 = 1,24$; 2. $c_1 = 2$, $c_2 = 0,8$ et $c_3 = 1,05$.

Exercice 2.11. [Soldes et escroquerie] Un commerçant peu scrupuleux souhaite augmenter ses prix avant une période de soldes afin que lorsqu'ils baisseront pendant celle-ci, ils soient en fait plus haut qu'avant les soldes. Il désire afficher une réduction de 20% afin d'attirer la clientèle mais le prix final doit être 5% plus haut que le prix initial. Calculer le pourcentage d'augmentation que le commerçant devra appliquer avant les soldes.

Évolution réciproque

Exercice 2.12. Calculer le taux d'évolution réciproque de chacun des taux d'évolution ci-dessous.

1. $+50\%$; 2. -50% ; 3. $+25\%$; 4. -75% .

Exercice 2.13. [Électricité] Le prix d'un MWh d'électricité vaut 51€ le 1^{er} Janvier. Au 1^{er} Juillet, il vaut 132€.

1. Calculer le pourcentage d'évolution du prix du MWh d'électricité. Arrondir à 0,1% près.
2. Calculer le pourcentage d'évolution nécessaire pour qu'au 1^{er} Août le prix du MWh d'électricité repasse à 51€. Arrondir à 0,1% près.

Exercice 2.14. [Écarts de salaires] Un employé affirme que son patron gagne environ 66% de plus que lui, mais le patron prétend que son employé ne gagne que 40% de moins que lui. Qui a raison ? Expliquez.

2.6.2 S'entraîner

Fréquence marginale

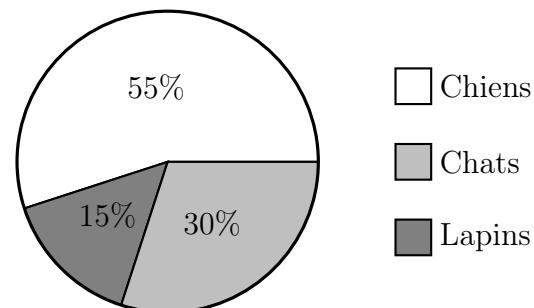
Exercice 2.15. [Pokémons] Dans le parc Safari, on estime que 4% des pokémons sont des Rhinocorne. Au dernier recensement, on comptait 128 Rhinocorne. Quel est le nombre de pokémons dans le parc Safari ? Arrondir à l'unité.

Fréquence conditionnelle

Exercice 2.16. [30 millions d'amis]

Un refuge pour animaux accueille 20 chats, chiens et lapins. Le diagramme circulaire ci-contre donne leur répartition. Par ailleurs, on sait que :

- 8 chiens et 3 chats sont des mâles;
- 2 lapins sont des femelles.



	Chats	Chiens	Lapins	Total
Femelles				
Mâles				
Total				

1. Calculer le nombre de chiens, chats et lapins.
2. Compléter le tableau ci-dessus.
3. Calculer la fréquence conditionnelle des chiens parmi les mâles. Arrondir à 0,01% près.

Exercice 2.17. Reprendre les questions de l'exercice 2.5 avec les émissions de l'industrie à la place de celles de l'énergie.

Taux d'évolution

Exercice 2.18. Lors d'une crue, le débit d'une rivière est passé de $90 \text{ m}^3/\text{s}$ à $450 \text{ m}^3/\text{s}$. Quel pourcentage d'évolution cela représente-t-il ?

Exercice 2.19. Le prix unitaire d'un produit diminue de 5%. Calculer le pourcentage d'augmentation de la quantité de produits que l'on doit vendre afin que la recette augmente de 4%.

Coefficient multiplicateur

Exercice 2.20. Compléter le tableau suivant :

Évolution (en %)		+0,3%	-0,3%		
Coefficient multiplicateur	1,75			2	0,5

Exercice 2.21.

1. Multiplier par 1,5 revient à augmenter de
2. Multiplier par 0,35 revient à diminuer de
3. Multiplier par 0,6 revient à
4. Multiplier par 1,06 revient à
5. Multiplier par 0,95 revient à

Évolutions successives

Exercice 2.22. On justifiera la réponse à chacune des questions suivantes.

1. Après une baisse de 15%, puis une hausse de 15%, un article est vendu :
 - plus cher,
 - moins cher,
 - au même prix,
 - la réponse d.
2. Après une hausse de 10% suivie d'une hausse de 5%, un article est vendu avec une augmentation de :
 - 15%,
 - 15,5%,
 - 14,5%,
 - la réponse d.



Exercice 2.23. [Soldes et escroquerie, le retour] Une enseigne commerciale souhaite augmenter ses prix avant une période de soldes afin que lorsqu'ils baisseront pendant celle-ci, ils soient en fait plus haut qu'avant les soldes. L'enseigne désire afficher une réduction de 30% afin d'attirer la clientèle mais le prix final doit être 10% plus haut que le prix initial. Calculer le pourcentage d'augmentation que l'enseigne devra appliquer avant les soldes.

Évolution réciproque

Exercice 2.24. Calculer le taux d'évolution réciproque de chacun des taux d'évolution ci-dessous.

1. +40%; 2. -40%; 3. -25%; 4. +75%.

2.6.3 Automatismes

Automatisme 2.1. Le tiers d'un quart correspond à la fraction :

1. $\frac{1}{7}$ 2. $\frac{3}{4}$ 3. $\frac{1}{3} \times 4$ 4. $\frac{1}{12}$

Automatisme 2.2. On considère $A = 10 + 0,1 + 1000$. On a $A =$

1. $\frac{20^{-1}}{1000}$ 2. $\frac{1}{1000}$ 3. 10,101 4. 10,110

Automatisme 2.3. Un article augmente de 10% puis il augmente encore de 10%. Après ces deux augmentations il a augmenté de :

1. $(10\%)^2$ 2. 19% 3. 20% 4. 21%

Automatisme 2.4. Soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 5n + 1$. On a $u_5 =$

1. 5 2. 25 3. 26 4. 30

Automatisme 2.5. Soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par $u_{n+1} = 5u_n + 1$. On a $u_1 =$

1. 1 2. 5 3. 6 4. 10

Automatisme 2.6. On considère $A = 10^{10} + 10^{-10}$. A est environ égal à :

1. 10^0 2. 0 3. 10^{10} 4. 100^0

Automatisme 2.7. On considère la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = 7 - 2(x - 3)^2$. L'image de 3 par la fonction f est égale à :

1. 5

2. -6

3. 7

4. 0

Automatisme 2.8. On considère l'égalité $\frac{1}{x} = 1 + \frac{6}{7}$. On a $x =$

1. 1

 2. $\frac{7}{13}$

 3. $\frac{6}{13}$

 4. $\frac{13}{7}$

Automatisme 2.9. La probabilité d'un événement A est $\frac{5}{6}$. Quelle est la probabilité de son événement contraire ?

 1. $\frac{6}{5}$

 2. $\frac{5}{6}$

 3. $\frac{1}{6}$

 4. $-\frac{5}{6}$

Automatisme 2.10. Lors d'une élection, un cinquième des électeurs a voté pour A, 25% ont voté pour B, un tiers a voté pour C, et le reste a voté pour D. Le candidat ayant recueilli le plus de votes est :

1. Le candidat A

2. Le candidat B

3. Le candidat C

4. Le candidat D

Automatisme 2.11. Salamèche consacre 25% de sa journée à jouer. 44% du temps consacré à jouer l'est à jouer avec Carapuce. La proportion du temps consacré à jouer avec Carapuce dans sa journée est égale à :

 1. $\frac{1}{4} \times 44$

 2. $44\% - 25\%$

 3. $\frac{1}{4} \times 0,44$

 4. $25 \times 0,44$

Automatisme 2.12. Les coordonnées du point d'intersection entre la droite d'équation $y = \frac{x}{4} - 8$ et l'axe des abscisses sont :

1. (4 ; 0)

2. (32 ; 0)

3. (-32 ; 0)

4. (-8 ; 0)

Automatisme 2.13. On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = -4x - 34$. Parmi les quatre tableaux de signes proposés, lequel correspond à cette fonction ?

1.

x	$-\infty$	8,5	$+\infty$
$f(x)$	-	0	+

2.

x	$-\infty$	-8,5	$+\infty$
$f(x)$	+	0	-

3.

x	$-\infty$	-8,5	$+\infty$
$f(x)$	-	0	+

4.

x	$-\infty$	8,5	$+\infty$
$f(x)$	+	0	-

