Chapitre 14

Sommes de variables aléatoires

14.1 Sommes de variables aléatoires

Définition 14.1. ***[Rappel]*** *Soit Ω l'univers associé à une expérience aléatoire. On suppose qu'une loi de probabilité est définie sur Ω. On appelle* ***variable aléatoire*** *toute fonction définie sur Ω et à valeurs dans $\mathbb{R}$: pour toute issue $\omega \in \Omega$,*

$$X : \omega \mapsto X(\omega) \in \mathbb{R}.$$

Exemple : On lance à deux reprises une pièce de monnaie équilibrée. L'univers associé à cette expérience est l'ensemble :

$$\Omega = \{FF\,;FP\,;PF\,;PP\}.$$

On définit la variable aléatoire X associant à chaque tirage le nombre de fois que « pile » a été obtenu. On a alors

Issue ω_i	FF	FP	PF	PP
$X(\omega_i)$	0	1	1	2

Définition 14.2. *Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un univers fini Ω.*

- *La* ***somme de variables aléatoires*** *$Z = X + Y$ est définie par $Z(\omega) = X(\omega) + Y(\omega)$ pour tout $\omega \in \Omega$.*
- *Pour toute valeur z prise par $Z = X+Y$, $\mathbb{P}(X+Y = z)$ est la somme de toutes les probabilités $\mathbb{P}(\{X = x\} \cap \{Y = y\})$ où $x + y = z$:*

$$\mathbb{P}(X + Y = z) = \sum_{\substack{x\in X(\Omega),\ y\in Y(\Omega),\\ x+y=z}} \mathbb{P}(\{X = x\} \cap \{Y = y\}).$$

Exemple : On lance deux dés cubiques équilibrés numérotés de 1 à 6. On définit les variables aléatoires X_1 et X_2 associant à chaque lancer la valeur des dés 1 et 2. On définit alors $Z = X_1+X_2$, la variable aléatoire qui donne le résultat de la somme des deux dés.

$Z = X_1 + X_2$						
$X_1(\omega)$ \ $X_2(\omega)$	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

La probabilité d'avoir une somme valant 4 est alors

$$\mathbb{P}(Z = 4) = \mathbb{P}(\{X_1 = 1\} \cap \{X_2 = 3\}) + \mathbb{P}(\{X_1 = 2\} \cap \{X_2 = 2\}) + \mathbb{P}(\{X_1 = 3\} \cap \{X_2 = 1\}) = \frac{3}{36}.$$

La loi de Z est alors

z	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\mathbb{P}(Z = z)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Définition 14.3. *Soit X une variable aléatoire définie sur un univers fini Ω et $a \in \mathbb{R}^*$.*

- *La variable aléatoire $Y = aX$ est définie par $Y(\omega) = aX(\omega)$ pour tout $\omega \in \Omega$.*
- *Pour toute valeur y prise par Y, il existe x tel que $a \times x = y$ et on a alors*

$$\mathbb{P}(Y = y) = \mathbb{P}(aX = ax) = \mathbb{P}(X = x).$$

Exemple : On lance un dé cubiques équilibré numéroté de 1 à 6. On définit la variable aléatoire X associant au lancer la valeur du dé. On définit alors $Y = 2X$, la variable aléatoire qui donne le résultat du dé multiplié par 2. On a alors

x	1	2	3	4	5	6
$\mathbb{P}(X = x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

y	2	4	6	8	10	12
$\mathbb{P}(Y = y)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Remarque : Attention ! $X + X \neq 2X$. En effet, pour X variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli, on a

X		
$X(\omega)$	0	1

$2X$		
$X(\omega)$	0	1
$2X(\omega)$	0	2

$X + X$		
$X(\omega)$ \ $X(\omega)$	0	1
0	0	1
1	1	2

Exercices : 14.1 à 14.4 ; 14.17 et 14.18.

14.2 Propriétés d'une somme de variables aléatoires

14.2.1 Espérance d'une somme de variables aléatoires

Définition 14.4. ***[Rappel]*** *On considère une expérience aléatoire d'univers fini $\Omega = \{\omega_1\,; \ldots ;\, \omega_m\}$ sur lequel est défini une loi de probabilité $\mathbb{P}$. Soit X une variable aléatoire définie sur Ω, ses valeurs sont notées $x_1, x_2, \ldots, x_n$ avec $n \in \mathbb{N}$.* ***L'espérance*** *de X est le nombre noté $\mathbb{E}(X)$ défini par :*

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbb{P}(X = x_i).$$

Lemme 14.1. ***[Admis]*** *Sous les hypothèses de la définition précédente, on a*

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{j=1}^{m} X(\omega_j)\mathbb{P}(\{\omega_j\}).$$

Proposition 14.1. ***[Linéarité de l'espérance]*** *Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un univers fini Ω et a un réel. Alors*

1. $\mathbb{E}(X+Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$; *2.* $\mathbb{E}(aX) = a\mathbb{E}(X)$.

Démonstration. Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un univers fini $\Omega = \{\omega_1\,; \ldots ;\, \omega_m\}$ et a un réel.

1. Soit Z la variable aléatoire définie par $Z = X + Y$. On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X+Y) = \mathbb{E}(Z) &= \sum_{j=1}^{m} Z(\omega_j)\mathbb{P}(\{\omega_j\}) \\
&= \sum_{j=1}^{m} (X+Y)(\omega_j)\mathbb{P}(\{\omega_j\}) \\
&= \sum_{j=1}^{m} (X(\omega_j) + Y(\omega_j))\mathbb{P}(\{\omega_j\}) \\
&= \sum_{j=1}^{m} X(\omega_j)\mathbb{P}(\{\omega_j\} + \sum_{j=1}^{m} Y(\omega_j)\mathbb{P}(\{\omega_j\} \\
&= \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y).
\end{aligned}$$

2. Si $a = 0$, la propriété est évidente puisque $\mathbb{E}(0X) = 0 = 0\mathbb{E}(X)$. Supposons $a \neq 0$. On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(aX) &= \sum_{i=1}^{n} (ax_i)\mathbb{P}(aX = ax_i) \\
&= a\sum_{i=1}^{n} x_i\mathbb{P}(X = x_i) \\
&= a\mathbb{E}(X).
\end{aligned}$$

□

Exemples :

1. Considérons le lancer de deux dés équilibrés : un dé 10 et un dé 20. On note X_1 et X_2 les variables aléatoires associées aux résultats respectifs des deux dés et $S = X_1 + X_2$ la variable aléatoire associée à la somme des résultats. On a alors

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_1) &= \sum_{i=1}^{10} i\mathbb{P}(X_1 = i)\\ &= \sum_{i=1}^{10} i \times \frac{1}{10}\\ &= \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} i\\ &= \frac{1}{10}\frac{(10-1+1)(1+10)}{2}\\ &= \frac{1}{10} \times \frac{10 \times 11}{2}\\ &= 5,5.\end{aligned}$$

   De même, on a $\mathbb{E}(X_2) = 10,5$. On a alors

$$\mathbb{E}(S) = \mathbb{E}(X_1 + X_2) = \mathbb{E}(X_1) + \mathbb{E}(X_2) = 5,5 + 10,5 = 16.$$

2. Considérons le lancer d'un dé 6 équilibré comme vu dans les exemples précédents. On note X la variable aléatoire associée au résultat du dé et $Y = 2X$ la variable aléatoire associée à la multiplication par deux des résultats. On a $\mathbb{E}(X) = 3,5$ et donc $\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(2X) = 2\mathbb{E}(X) = 7$.

Remarque : Pour X une variable aléatoire, autant on a $X + X \neq 2X$, autant on a $\mathbb{E}(X+X) = \mathbb{E}(2X)$. En effet, par linéarité de l'espérance, on a :

$$\mathbb{E}(X + X) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(X) = 2\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(2X).$$

Exercices : 14.5 et 14.6 ; 14.19.

14.2.2 Variables aléatoires indépendantes

Définition 14.5. ***[Indépendance de variables aléatoires]*** *Soient $X_1, \ldots, X_n$, n variables aléatoires à valeurs respectives dans $E_1, \ldots, E_n$. On dit que $X_1, \ldots, X_n$ sont **indépendantes** si et seulement si*

$$\forall\,(x_1\,;\ldots;x_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n, \quad \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n}\{X_i = x_i\}\right) = \prod_{i=1}^{n}\mathbb{P}(X_i = x_i).$$

Exemple : Soient X et Y deux variables aléatoires telles que $\mathbb{P}(\{X = x_i\} \cap \{Y = y_i\})$ soit donnée par le tableau ci-dessous à gauche. On en déduit alors les lois de X et Y dans les tableaux ci-dessous à droite.

$\mathbb{P}(\{X = x_i\} \cap \{Y = y_i\})$		
x_i \ y_i	2	3
0	0,28	0,42
1	0,12	0,18

x_i	0	1
$\mathbb{P}(X = x_i)$	0,7	0,3

y_i	2	3
$\mathbb{P}(Y = y_i)$	0,4	0,6

On a bien

$$\mathbb{P}(X = 0) \times \mathbb{P}(Y = 2) = 0,7 \times 0,4 = 0,28 = \mathbb{P}(\{X = 0\} \cap \{Y = 2\}).$$

De même, on vérifie que

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X = 0) \times \mathbb{P}(Y = 3) &= \mathbb{P}(\{X = 0\} \cap \{Y = 3\}), \\
\mathbb{P}(X = 1) \times \mathbb{P}(Y = 2) &= \mathbb{P}(\{X = 1\} \cap \{Y = 2\}), \\
\mathbb{P}(X = 1) \times \mathbb{P}(Y = 1) &= \mathbb{P}(\{X = 0\} \cap \{Y = 3\}).
\end{aligned}$$

X et Y sont donc indépendantes.

Contre-exemple : Soient X et Y deux variables aléatoires telles que $\mathbb{P}(\{X = x_i\} \cap \{Y = y_i\})$ soit donnée par le tableau ci-dessous à gauche. On en déduit alors les lois de X et Y dans les tableaux ci-dessous à droite.

$\mathbb{P}(\{X = x_i\} \cap \{Y = y_i\})$		
x_i \ y_i	2	3
0	0,1	0,1
1	0,24	0,56

x_i	0	1
$\mathbb{P}(X = x_i)$	0,2	0,8

y_i	2	3
$\mathbb{P}(Y = y_i)$	0,34	0,66

On a

$$\mathbb{P}(X = 0) \times \mathbb{P}(Y = 2) = 0,2 \times 0,34 = 0,068 \neq 0,1 = \mathbb{P}(\{X = 0\} \cap \{Y = 2\}).$$

X et Y ne sont donc pas indépendantes.

Exercices : 14.7 et 14.8 ; 14.20.

14.2.3 Variance d'une somme de variables aléatoires indépendantes

Proposition 14.2. *Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un univers fini Ω et a un réel. Alors*

1. $\mathbb{V}(aX) = a^2\mathbb{V}(X)$.
2. *Si X et Y sont indépendantes, alors* $\mathbb{V}(X + Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y)$.

Démonstration.

1. Soit X une variable aléatoire définie sur un univers fini Ω et a un réel. Si $a = 0$, la propriété est évidente puisque $\mathbb{V}(0X) = 0 = 0\mathbb{V}(X)$. Supposons $a \neq 0$. On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(aX) &= \mathbb{E}(aX - \mathbb{E}(aX)^2) \\
&= \sum_{i=1}^{n}(ax_i - \mathbb{E}(aX))^2\mathbb{P}(aX = ax_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n}(ax_i - a\mathbb{E}(X))^2\mathbb{P}(X = x_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} a^2(x_i - \mathbb{E}(X))^2\mathbb{P}(X = x_i) \\
&= a^2\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mathbb{E}(X))^2\mathbb{P}(X = x_i) \\
&= a^2\mathbb{E}(X - \mathbb{E}(X)^2) \\
&= a^2\mathbb{V}(X).
\end{aligned}$$

2. Exercice.

□

Exemples : Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes de lois de probabilité ci-dessous.

x	-6	9
$\mathbb{P}(X_1 = x)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

x	-2	6
$\mathbb{P}(X_1 = x)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

1. On a $\mathbb{E}(X_1) = -1$, donc

$$\mathbb{V}(X_1) = \frac{2}{3}(-6-(-1))^2 + \frac{1}{3}(9-(-1))^2 = 50.$$

On a alors $\mathbb{V}(2X_1) = 2^2\mathbb{V}(X_1) = 200$.

2. De la même façon que pour X_2, on a $\mathbb{E}(X_2) = 2$ et $\mathbb{V}(X_2) = 16$. Comme X_1 et X_2 sont indépendantes, on a

$$\mathbb{V}(X_1 + X_2) = \mathbb{V}(X_1) + \mathbb{V}(X_2) = 50 + 16 = 66.$$

Exercices : 14.9 à 14.11 ; 14.21.

14.3 Applications

14.3.1 Variables aléatoires identiquement distribuées

Définition 14.6. *Deux variables aléatoires sont dites* ***identiquement distribuées*** *lorsqu'elle ont la même loi de probabilité.*

Remarque : Deux variables aléatoires identiquement distribuées peuvent être indépendantes comme ne pas l'être.

Exercice : 14.12.

14.3.2 Loi binomiale

Proposition 14.3. ***[Admise]*** *Soit X suivant la binomiale $\mathscr{B}(n\,;p)$. Alors il existe n variable aléatoire X_i indépendantes, identiquement distribuées suivant la loi de Bernoulli de paramètre p telles que $X = X_1 + \cdots + X_n$.*

Proposition 14.4. *Si X suit la binomiale $\mathscr{B}(n\,;p)$, alors :*

1. $\mathbb{E}(X) = np$ *;* *2.* $\mathbb{V}(X) = np(1-p)$.

Démonstration. Soit X suivant la binomiale $\mathscr{B}(n\,;p)$. Alors il existe n variable aléatoire X_i indépendantes, identiquement distribuées suivant la loi de Bernoulli de paramètre p telles que $X = X_1 + \cdots + X_n$. On a donc, pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$, $\mathbb{E}(X_i) = p$ et $\mathbb{V}(X_i) = p(1-p)$.

1. Par linéarité de l'espérance, on a

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(X_1 + \cdots + X_n) = \mathbb{E}(X_1) + \cdots + \mathbb{E}(X_n) = np.$$

2. Comme les X_i sont indépendantes, on a

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{V}(X_1 + \cdots + X_n) = \mathbb{V}(X_1) + \cdots + \mathbb{V}(X_n) = np(1-p).$$

□

14.3.3 Échantillonnage

Définition 14.7.

— *Un* ***échantillon*** *est une liste $(X_1\,;X_2\,;\cdots;X_n)$ de n variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées.*

— *Soit $(X_1\,;X_2\,;\cdots;X_n)$ un échantillon de taille n. On note S_n la* ***somme*** *et M_n la* ***moyenne*** *de cet échantillon :*

$$S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n \qquad \textit{et} \qquad M_n = \frac{S_n}{n}.$$

Proposition 14.5. *Soit* $(X_1\,;X_2\,;\cdots\,;X_n)$ *un échantillon de taille* n.

1. $\mathbb{E}(S_n) = n\mathbb{E}(X_1)$;
2. $\mathbb{V}(S_n) = n\mathbb{V}(X_1)$.

Démonstration. Soit $(X_1\,;X_2\,;\cdots\,;X_n)$ un échantillon de taille n.

1. Par linéarité de l'espérance, on a
$$\mathbb{E}(S_n) = \mathbb{E}(X_1) + \cdots + \mathbb{E}(X_n).$$
Comme $(X_1\,;X_2\,;\cdots\,;X_n)$ est un échantillon, les X_k sont identiquement distribuées et ont donc toutes la même espérance : $\mathbb{E}(X_1) = \cdots = \mathbb{E}(X_n)$. On en déduit que $\mathbb{E}(S_n) = n\mathbb{E}(X_1)$.
2. Comme les X_k sont identiquement distribuées, elles ont donc toutes la même variance : $\mathbb{V}(X_1) = \cdots = \mathbb{V}(X_n)$. Par ailleurs, les X_k étant indépendantes, on a
$$\mathbb{V}(S_n) = \mathbb{V}(X_1) + \cdots + \mathbb{V}(X_n) = n\mathbb{V}(X_1).$$

□

Remarque : Cette propriété est une généralisation des résultats sur la loi binomiale pour laquelle les variables aléatoires sont un échantillon de la loi de Bernoulli.

Proposition 14.6. *Soit* $(X_1\,;X_2\,;\cdots\,;X_n)$ *un échantillon de taille* n.

1. $\mathbb{E}(M_n) = \mathbb{E}(X_1)$;
2. $\mathbb{V}(M_n) = \dfrac{\mathbb{V}(X_1)}{n}$.

Démonstration. Soit $(X_1\,;X_2\,;\cdots\,;X_n)$ un échantillon de taille n.

1. Par linéarité de l'espérance, on a $\mathbb{E}(M_n) = \mathbb{E}\left(\dfrac{S_n}{n}\right) = \dfrac{1}{n}\mathbb{E}(S_n) = \dfrac{1}{n} \times n\mathbb{E}(X_1) = \mathbb{E}(X_1)$.
2. Par propriété de la variance, on a $\mathbb{V}(M_n) = \mathbb{V}\left(\dfrac{S_n}{n}\right) = \dfrac{1}{n^2}\mathbb{V}(S_n) = \dfrac{1}{n^2} \times n\mathbb{V}(X_1) = \dfrac{\mathbb{V}(X_1)}{n}$.

□

Exemple : On lance cinq dés équilibrés à six faces. On note X la variable aléatoire correspondant à la somme des résultats. Calculons $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.

Pour tout $k \in \{1\,;\ldots\,;5\}$, on note X_k la variable aléatoire correspondant au résultat du dé k. On a alors $X = X_1 + \cdots + X_5$. Les dés étant identiques, les X_k sont identiquement distribuées. Par ailleurs, les lancers de dés étant indépendants, les X_k le sont aussi.

— On a $\mathbb{E}(X_1) = 3,5$. D'après la propriété précédente, on a $\mathbb{E}(X) = 5\mathbb{E}(X_1) = 17,5$.

— On a $\mathbb{V}(X_1) = \dfrac{35}{12}$. D'après la propriété précédente, on a $\mathbb{V}(X) = 5\mathbb{V}(X_1) = \dfrac{175}{12}$.

Exercices : 14.13 à 14.16 ; 14.22 et 14.23.

14.4 Capacités attendues

— Représenter une variable comme somme de variables aléatoires plus simples.
— Calculer l'espérance d'une variable aléatoire, notamment en utilisant la propriété de linéarité.
— Calculer la variance d'une variable aléatoire, notamment en l'exprimant comme somme de variables aléatoires indépendantes.

14.5 Exercices

14.5.1 Progresser

Sommes de variables aléatoires

Exercice 14.1. Soient X et Y deux variables aléatoires. Le tableau suivant donne les probabilités des événements $\{X = x\} \cap \{Y = y\}$ pour toutes les valeurs x prises par X et toutes les valeurs y prises par Y.

X \ Y	0	1	2
0	0,3	0,15	0,15
1	0,2	0,15	0,05

1. Représenter sous forme de tableaux les lois de probabilités de X et Y.
2. Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{E}(Y)$.
3. Déterminer mentalement $\mathbb{P}(X + Y = 0)$ et $\mathbb{P}(X + Y = 2)$.
4. Déterminer la loi de probabilité de $X + Y$.

Exercice 14.2. On lance trois dés cubiques équilibrés et on note X la variable aléatoires correspondant à la somme obtenue. On note X_1 la variable aléatoire correspondant au résultat du premier dé. A-t-on $X = 3X_1$?

Exercice 14.3. On lance un dé cubique équilibré et on joue au jeu suivant : le nombre de points récoltés est le triple du résultat de ce dé. On joue deux fois à ce jeu et on note X_1 et X_2 les variables aléatoires correspondant aux points respectivement obtenus au premier et au deuxième lancer.

1. Calculer $X_1((3\,;4))$, $X_2((1\,;6))$ et $X_1((4\,;2))$.
2. Soit X la variable aléatoire définie par $X = X_1 + X_2$.
   (a) Que représente la variable aléatoire X dans le contexte de l'exercice ?
   (b) Calculer $X((3\,;5))$.

Exercice 14.4. Lors de leur entrée au parc Safari, les visiteurs paient différents droits d'accès en fonction de leur âge :

— 40 pokédollars pour les moins de 18 ans ;
— 50 pokédollars pour les plus de 60 ans ;
— 100 pokédollars pour les autres.

De plus, ils peuvent choisir parmi deux options supplémentaires :

— 50 pokédollars pour un nombre illimité de pokéballs ;
— 20 pokédollars pour un nombre d'appâts illimités ;
— 60 pokédollars pour les deux suppléments à la fois.

On prend au hasard un visiteur du parc et on note X la variable aléatoire correspondant au montant total payé par celui-ci pour visiter le parc.

1. Proposer une décomposition de X en somme de variables aléatoires dont on donnera une interprétation.
2. Expliciter l'ensemble des valeurs prises par ces variables aléatoires.

Espérance d'une somme de variables aléatoires

Exercice 14.5. Calculer $\mathbb{E}(2X)$, $\mathbb{E}(X+Y)$ et $\mathbb{E}(5X-2Y)$ où X et Y sont les deux variables aléatoires de l'exercice 14.1.

Exercice 14.6. Soit a un nombre réel. On donne ci-dessous les lois de probabilité de trois variables aléatoires X, Y et Z définies sur un univers Ω.

x_i	-5	2	4	12
$\mathbb{P}(X=x_i)$	0,4	0,05	0,25	0,3

y_i	0	3	7
$\mathbb{P}(Y=y_i)$	0,3	0,2	0,5

z_i	12	a
$\mathbb{P}(Z=z_i)$	0,75	0,25

Déterminer l'ensemble des valeurs prises par Z sachant que $\mathbb{E}(X+3Y)=\mathbb{E}(Z)$.

Variables aléatoires indépendantes

Exercice 14.7. Soient X_1, X_2, Y_1 et Y_2 quatre variables aléatoires telles que :

$\mathbb{P}(\{X_1=x_i\}\cap\{Y_1=y_i\})$

x_i \ y_i	2	3
0	0,24	0,06
1	0,07	0,63

$\mathbb{P}(\{X_2=x_i\}\cap\{Y_2=y_i\})$

x_i \ y_i	2	3
0	0,04	0,36
1	0,06	0,54

1. (a) Déterminer les lois de X_1 et Y_1.
   (b) X_1 et Y_1 sont-elles indépendantes ? Justifier.
2. Mêmes questions avec X_2 et Y_2.

Exercice 14.8. [Espérance d'un produit sous hypothèse d'indépendance] Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un univers Ω. On souhaite montrer que $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.

Soit Z la variable définie par $Z = XY$. On notera dans la suite $\text{Val}_X = \{x_1\,;\ldots\,;x_r\}$ l'ensemble des valeurs prises par X, $\text{Val}_Y = \{y_1\,;\ldots\,;y_r\}$ l'ensemble des valeurs prises par Y et Val_Z l'ensemble des valeurs prises par Z.

Pour $z \in \text{Val}_Z$, il peut exister plusieurs couples $(x\,;y)$ tels que $z = xy$. On va donc regrouper ces différents couples dans un ensemble que l'on notera A_z : pour tout $z \in \text{Val}_Z$,

$$A_z = \{(x\,;y) \in \text{Val}_X \times \text{Val}_Y \;/\; xy = z\}.$$

1. Justifier que les ensembles A_z sont deux à deux disjoints.
2. À quoi la réunion des ensembles A_z correspond-elle ?
3. Démontrer que, pour tout $z \in \text{Val}_Z$, $\mathbb{P}(Z = a) = \displaystyle\sum_{(x\,;y)\in A_z} \mathbb{P}((X = x) \cap (Y = y))$.
4. Monter que $\mathbb{E}(X) = \displaystyle\sum_{x\in \text{Val}_X} \sum_{(x\,;y)\in A_z} xy\mathbb{P}(X = x)\mathbb{P}(Y = y)$.
5. En déduire que $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.

Variance d'une somme de variables aléatoires

Exercice 14.9. Soient X et Y les deux variables aléatoires de l'exercice 14.1. On suppose par ailleurs que X et Y sont indépendantes.

1. Calculer $\mathbb{V}(2X)$, $\mathbb{V}(X + Y)$ et $\mathbb{V}(5X - 2Y)$.
2. En déduire $\sigma(2X)$, $\sigma(X + Y)$ et $\sigma(5X - 2Y)$. On arrondira à 10^{-3} près.

Exercice 14.10. Soient a et b deux réels et X et Y deux variables aléatoires dont on donne les lois de probabilités.

x_i	-5	2	a	8	10
$\mathbb{P}(X = x_i)$	0,06	0,23	0,21	0,37	0,13

y_i	b	-4	-2	5	20
$\mathbb{P}(Y = x_i)$	0,01	0,35	0,12	0,22	0,3

On pose T et Z les variables aléatoires définies par $T = Y - X$ et $Z = 3X + 2Y$.

1. (a) Exprimer $\mathbb{E}(T)$ et $\mathbb{E}(Z)$ en fonction de a et b.
   (b) On suppose que $\mathbb{E}(T) = 0,1$ et $\mathbb{E}(Z) = 26,5$, déterminer les valeurs de a et b.
2. (a) On donne $\mathbb{V}(10Z) = 54\,853{,}32$. Les variables aléatoires X et Y peuvent-elles être indépendantes ?
   (b) On donne $\mathbb{V}(T) = 89,058$. Les variables aléatoires X et Y peuvent-elles être indépendantes ?

Exercice 14.11. [Additivité de la variance] Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un univers Ω. Soit Z la variable aléatoire définie par $Z = X + Y$.

1. Appliquer la formule de Huygens-König à Z.
2. En déduire que $\mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 + \mathbb{E}(Y^2) - \mathbb{E}(Y)^2 + 2\mathbb{E}(XY) - 2\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.
3. En admettant le résultat de l'exercice 14.6 : si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes, alors $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$; montrer que si X et Y sont indépendantes, alors

$$\mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y).$$

Variables aléatoires identiquement distribuées

Exercice 14.12. On considère deux rencontres successives de pokémons. Sur chacune des deux rencontres, on a deux possibilités : soit on rencontre un Chochodile, soit on n'en rencontre pas.

— À la première rencontre, il y a 10% de chances de rencontrer un Chochodile.

— À la seconde rencontre, si le pokémon était un Chochodile lors de la première rencontre, les chances d'en rencontrer un à nouveau sont de 55%. Sinon, les chances d'en rencontrer un sont de 5%.

On note X_1, respectivement X_2, la variable aléatoire correspondant au nombre de Chochodile rencontrés lors de la première, respectivement deuxième, rencontre. On note

— C_1 l'événement « on a rencontré un Chochodile lors de la première rencontre » ;

— C_2 l'événement « on a rencontré un Chochodile lors de la deuxième rencontre ».

1. Construire un arbre pondéré adapté à la situation.
2. En déduire les lois de probabilités des variables aléatoires X_1 et X_2.
3. Les variables aléatoires X_1 et X_2 sont-elles identiquement distribuées ? Justifier.
4. Calculer $\mathbb{P}(\{X_1 = 0\} \cap \{X_2 = 0\})$ et $\mathbb{P}(X_1 = 0) \times \mathbb{P}(X_2 = 0)$. Les variables aléatoires X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ? Justifier.
5. Dans un autre lieu, les probabilités de rencontres sont différentes : que ce soit la première ou la seconde rencontre, il y a 10% de chances de rencontrer un Chochodile. On note Y_1, respectivement Y_2, la variable aléatoire correspondant au nombre de Chochodile rencontrés lors de la première, respectivement deuxième, rencontre.
   (a) Déterminer les lois de probabilités de Y_1 et Y_2.
   (b) Ces variables aléatoires sont-elles identiquement distribuées ? Indépendantes ? Justifier.

Échantillonnage

Exercice 14.13. On considère dix variables aléatoires X_1,..., X_{10} définies sur un même univers Ω. On suppose que ces variables aléatoires sont identiquement distribuées et indépendantes. On donne ci-dessous la loi de X_1.

x_i	-5	0	1	3
$\mathbb{P}(X_1 = x_i)$	0,4	0,3	0,2	0,1

1. On pose S_{10} la variable aléatoire définie par $S_{10} = X_1 + \cdots + X_{10}$.
   (a) Calculer $\mathbb{E}(S_{10})$.
   (b) Calculer $\mathbb{V}(S_{10})$ et $\sigma(S_{10})$. On arrondira la valeur de $\sigma(S_{10})$ au centième.
2. On pose M_{10} la variable aléatoire définie par $M_{10} = \dfrac{S_{10}}{10}$.
   (a) Calculer $\mathbb{E}(M_{10})$.
   (b) Calculer $\mathbb{V}(M_{10})$ et $\sigma(M_{10})$. On arrondira la valeur de $\sigma(S_{10})$ à 10^{-4} près.

Exercice 14.14. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et X_1,..., X_n n variables aléatoires identiquement distribuées et indépendantes. On donne ci-dessous la loi de X_k pour tout $k \in \{1\,;\ldots\,;n\}$.

x_i	4	10	12
$\mathbb{P}(X_k = x_i)$	0,25	0,5	0,25

On pose S_n la variable aléatoire définie par $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

1. Quelle est la valeur minimale de n pour laquelle $\mathbb{E}(S_n) \geqslant 2\,453$?
2. Quelle est la valeur maximale de n pour laquelle $\sigma(S_n) \leqslant 60$?

Exercice 14.15. La majorité des contraventions liées aux infractions au code de la route concernent les contraventions de 4e catégorie : utilisation du téléphone au volant, feu rouge grillé, non respect du port de la ceinture, chevauchement d'une ligne blanche continue, etc.

Le tarif forfaitaire d'une telle contravention s'élève à 135€. Il est cependant possible de payer la contravention moins chère si on procède rapidement au paiement, elle s'élève alors à 90€ et on parle d'amende minorée. À l'inverse, en cas de retard de paiement, elle s'élève à 345€ et on parle d'amende majorée.

Une préfecture transmet les informations suivantes concernant ces contraventions.

Montant de l'amende (en €)	90	135	375
Fréquence observée (en %)	79	15	6

Afin d'étudier de manière plus précise ces données, on prélève cent dossiers concernant les amendes de 4e classe. On suppose que le nombre d'amendes est suffisamment important pour assimiler cette expérience avec un tirage avec remise.

Pour tout entier $k \in \{1\,;\ldots\,;100\}$, on appelle X_k la variable aléatoire correspondant au montant payé par le k-ième dossier prélevé.

1. On note S_{100} la variable aléatoire correspondant au montant total payé par les cent contrevenants. Exprimer S_{100} en fonction des variables aléatoires X_k.
2. En moyenne, sur cent contrevenants, quel est le montant total payé ?
3. Calculer $\sigma(S_{100})$. Arrondir au millième.
4. On note M_{100} la variable correspondant au paiement moyen par amende des cents contrevenants choisis. Calculer $\sigma(M_{100})$. Arrondir au millième.

Exercice 14.16. Soient $q \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On considère le jeu suivant se déroulant en n étapes :

— on lance à chaque étape un dé six équilibré ;

— si, à la première étape, on obtient 4, on remporte 6€ ; sinon, on ne remporte rien ;

— si, à la deuxième étape, on obtient 4, on remporte $6q$€ ; sinon, on ne remporte rien ;

— si, à la troisième étape, on obtient 4, on remporte $6q^2$€ ; sinon, on ne remporte rien ;

— ...

— si, à la n-ième étape, on obtient 4, on remporte $6q^{n-1}$€ ; sinon, on ne remporte rien.

Pour tout entier $k \in \{1 ; \ldots ; n\}$, on note K_k la variable aléatoire correspondant au gain obtenu lors de la k-ième étape. On admet que ces variables aléatoires sont indépendantes.

1. Déterminer, pour tout entier $k \in \{1 ; \ldots ; n\}$, la loi de probabilité de la variable aléatoire X_k.
2. Soit Y_n la variable aléatoire correspondant au gain total obtenu à l'issue de la partie. Exprimer Y_n en fonction des variables aléatoires X_k.
3. Déterminer une expression de $\mathbb{E}(Y_n)$ en fonction de q et n. Différencier les cas $q \neq 1$ et $q = 1$.
4. Dans cette question, on suppose que $q = 2$. Déterminer le nombre d'étapes nécessaires pour que le gain théorique moyen dépasse 1 000€ à l'issue de la partie.
5. Dans cette question, on suppose que $q = 0,5$. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{E}(Y_n)$ puis interpréter le résultat obtenu.

14.5.2 S'entraîner

Sommes de variables aléatoires

Exercice 14.17. Soient X et Y deux variables aléatoires dont on donne les lois de probabilités ci-dessous.

x_i	-4	1	20
$\mathbb{P}(X = x_i)$	0,1	0,35	0,55

y_i	-2	5
$\mathbb{P}(Y = y_i)$	0,27	0,73

1. Soit Z la variable aléatoire définie par $Z = X + Y$. Quelles sont les valeurs prises par Z ?
2. Peut-on déterminer la loi de Z à partir des données de l'énoncé ? Si oui, donner cette loi.

Exercice 14.18. Robert, gérant de casino, décide de tester ses différents jeux : une fois la roulette et deux fois le black jack. Il note X la variable aléatoire correspondant au gain total remporté.

1. Pour faciliter l'étude, il écrit $X = X_1 + X_2 + X_3$. À quoi les variables aléatoires X_1, X_2 et X_3 peuvent-elles correspondre ?
2. Sharon, une connaissance proche de Robert, souhaite écrire X sous la forme $X = X_1 + 2X_2$. A-t-elle raison ? Justifier.

Espérance d'une somme de variables aléatoires

Exercice 14.19. Soient X et Y les deux variables aléatoires de l'exercice 14.17. Calculer $\mathbb{E}(3X)$, $\mathbb{E}(X + Y)$ et $\mathbb{E}(3X - Y)$.

Variables aléatoires indépendantes

Exercice 14.20. Soient X_1, X_2, Y_1 et Y_2 quatre variables aléatoires telles que :

$\mathbb{P}(\{X_1 = x_i\} \cap \{Y_1 = y_i\})$

x_i \ y_i	2	3
0	0,03	0,07
1	0,27	0,63

$\mathbb{P}(\{X_2 = x_i\} \cap \{Y_2 = y_i\})$

x_i \ y_i	2	3
0	0,2	0,2
1	0,24	0,36

1. (a) Déterminer les lois de X_1 et Y_1.
   (b) X_1 et Y_1 sont-elles indépendantes ? Justifier.
2. Mêmes questions avec X_2 et Y_2.

Variance d'une somme de variables aléatoires

Exercice 14.21. Soient X et Y les deux variables aléatoires de l'exercice 14.17. On suppose par ailleurs que X et Y sont indépendantes.

1. Calculer $\mathbb{V}(3X)$ et $\mathbb{V}(2X - 4Y)$.
2. En déduire $\sigma(3X)$ et $\sigma(2X - 4Y)$. On arrondira à 10^{-4} près.

Échantillonnage

Exercice 14.22. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et X_1,..., X_n n variables aléatoires identiquement distribuées et indépendantes. On donne ci-dessous la loi de X_k pour tout $k \in \{1\,;\dots;n\}$.

x_i	-2	1	8	10
$\mathbb{P}(X_k = x_i)$	0,35	0,225	0,125	0,3

On pose S_n la variable aléatoire définie par $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. On donne $\mathbb{E}(S_n) = 423$. Déterminer la valeur de n.

Exercice 14.23. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et X_1,..., X_n n variables aléatoires identiquement distribuées et indépendantes. On donne ci-dessous la loi de X_1.

x_i	5	10	15
$\mathbb{P}(X_1 = x_i)$	0,2	0,4	0,4

On pose M_n la variable aléatoire définie par $M_n = \dfrac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$. On donne $\sigma(M_n) = \sqrt{2}$. Déterminer la valeur de n.

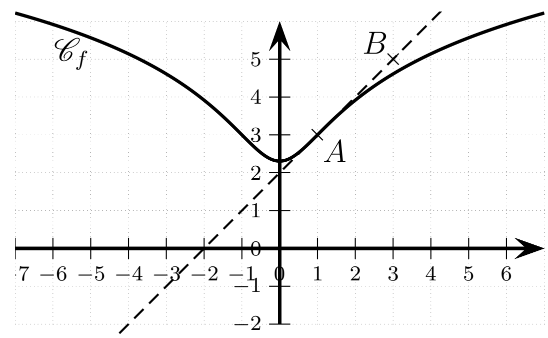
14.5.3 Le Flashback !

Flashback 14.1.

1. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, on a $(n+1)^2 \leqslant 3n^2$.
2. Montrer alors par récurrence que, pour tout entier naturel $n \geqslant 5$, on a $2^n + 5n^2 \leqslant 3^n$.

Flashback 14.2. [Asie, mai 2022]

Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On considère les points $A\,(1\,;3)$ et $B\,(3\,;5)$.
On donne ci-contre $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal du plan, ainsi que la tangente (AB) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A.



Les trois parties de l'exercice peuvent être traitées de manière indépendante.

Partie A

1. Déterminer graphiquement les valeurs de $f(1)$ et $f'(1)$.
2. La fonction f est définie par l'expression $f(x) = \ln(ax^2+1)+b$, où a et b sont des nombres réels positifs.
   (a) Déterminer l'expression de $f'(x)$.
   (b) Déterminer les valeurs de a et b à l'aide des résultats précédents.

Partie B On admet que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(x^2+1)+3-\ln(2)$.

1. Montrer que f est une fonction paire.
2. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
3. (a) Déterminer l'expression de $f'(x)$.
   (b) Dresser le tableau des variations de f en y faisant figurer la valeur exacte du minimum ainsi que les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.
4. À l'aide du tableau des variations de f, donner les valeurs du réel k pour lesquelles l'équation $f(x) = k$ admet deux solutions.
5. Résoudre l'équation $f(x) = 3+\ln(2)$.

Partie C On rappelle que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(x^2+1)+3-\ln(2)$.

1. Conjecturer, par lecture graphique, les abscisses des éventuels points d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}_f$.
2. Montrer que, pour tout nombre réel x, on a : $f''(x) = \dfrac{2\,(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$.
3. En déduire le plus grand intervalle sur lequel la fonction f est convexe.