Chapitre 11

Primitives et équations différentielles

11.1 Équation différentielle

Définition 11.1. *Soit f une fonction définie sur un intervalle de $\mathbb{R}$. Une* ***équation différentielle du premier ordre*** *est une équation dont :*

- *l'inconnue est une fonction y, dérivable sur un intervalle I ;*
- *la forme est celle d'une relation entre la fonction y et sa dérivée y' : $y' = f(y)$.*

La relation $y' = f(y)$ signifie que pour tout $x \in I$, on a $y'(x) = f(y(x))$.

Exemple : Soit l'équation $(E) : y' = 3y$.

- (E) est une équation différentielle. Résoudre cette équation revient à déterminer toutes les fonctions y dérivables sur $\mathbb{R}$ vérifiant pour tout réel x : $y'(x) = 3y(x)$.
- La fonction y_0 définie sur $\mathbb{R}$ par $y_0(x) = \mathrm{e}^{3x}$ est une solution de (E). En effet, y_0 est dérivable sur $\mathbb{R}$, et on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$y_0'(x) = 3\mathrm{e}^{3x} = 3y_0(x).$$

Remarques :

- Une équation différentielle est un cas particulier d'**équation fonctionnelle**, i.e. une équation dont l'inconnue n'est pas un ou des réels mais une fonction.
- La relation $y' = f(y)$ est à prendre dans un sens large, la fonction f peut tout à fait être constante au sens où elle ne dépend pas de y (mais tout de même être une fonction), ce qui donne $y' = c$.
- On parle de premier ordre lorsque la fonction est liée à sa dérivée première. Il est toutefois possible de la lier à n'importe quelle combinaison de ses dérivées (si elle est dérivable plusieurs fois) et donc d'avoir des équations différentielles d'ordre quelconque. Par exemple, $y'' + y = 0$ et $y'' + 2y + y = 0$ sont des équations différentielles du second ordre.

Exercices : 11.1 à 11.5 ; 11.33 à 11.35.

11.1.1 Primitive d'une fonction continue sur un intervalle

Dans toute la suite, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$.

Définition 11.2. *Soit f une fonction définie sur I. On appelle* ***primitive*** *de f sur I, toute fonction F dérivable sur I telle que $F' = f$: pour tout $x \in I$, $F'(x) = f(x)$. Autrement dit, une primitive de f sur I est une fonction solution de l'équation différentielle $y' = f$.*

Remarque : chercher une primitive F de f, ou « primitiver » f, c'est d'une certaine façon effectuer l'inverse de la dérivation.

$$F \quad \underset{\text{Primitiver}}{\overset{\text{Dériver}}{\rightleftarrows}} \quad f = F'$$

Exemple : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$.

— La fonction F_0 définie sur $\mathbb{R}$ par $F_0(x) = x^3 - x^2 + x$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$ puisque $F_0'(x) = 3x^2 - 2x + 1 = f(x)$.

— Cette primitive n'est pas unique, par exemple la fonction F_1 définie par $F_1(x) = x^3 - x^2 + x + 1$ vérifie également $F_1'(x) = f(x)$, donc est également une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

— On dit que F_0 et F_1 sont deux solutions de l'équation différentielle $y' = f$.

Théorème 11.1.

1. *Toute fonction continue sur I admet des primitives sur I.*
2. *Soit f une fonction continue sur I, et F_0 une primitive de f sur I.*
   (a) *f admet une infinité de primitive sur I.*
   (b) *Toutes les primitives F de f sur I sont les fonctions $F : x \mapsto F_0(x) + c$, où $c \in \mathbb{R}$. On dit que deux primitives d'une même fonction diffèrent d'une constante : $F - F_0 = c$.*

Démonstration.

1. Admis.
2. Soit f une fonction continue sur I et soit F_0 une primitive de f sur I.
   (a) Alors toute fonction de la forme $x \mapsto F_0(x) + c$ où c est une constante quelconque est également de dérivée f donc est également une primitive de f. Il y a donc une infinité de primitive de f sur I.
   (b) Soit F une autre primitive de f sur I. On définit la fonction g sur I par : $g(x) = F(x) - F_0(x)$. Alors g est dérivable sur I et, pour tout $x \in I$,

   $$g'(x) = F'(x) - F_0'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

   La dérivée de g est nulle donc g est constante sur I : il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in I$, $g(x) = c$, autrement dit $F(x) - F_0(x) = c$, ou encore $F(x) = F_0(x) + c$.

□

Exemple : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^x + 2x$.
- f est continue sur $\mathbb{R}$ donc admet une infinité de primitive.
- La fonction F_0 définie sur $\mathbb{R}$ par $F_0(x) = \mathrm{e}^x + x^2$ est une primitive de f.
- Les primitives de f sur $\mathbb{R}$ sont donc toutes les fonctions de la forme $x \mapsto \mathrm{e}^x + x^2 + c$, où c est une constante réelle.
- L'équation différentielle $y' = \mathrm{e}^x + 2x$ admet donc une infinité de solutions sur $\mathbb{R}$ qui sont toutes les primitives de f.

Proposition 11.1. *Soient f une fonction continue sur un intervalle I, $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$ fixés. Alors il existe une* ***unique primitive*** *F de f sur I telle que $F(x_0) = y_0$.*

Démonstration. f est continue sur I, elle admet donc une infinité de primitives. Soient F_1 et F_2 deux primitives de f vérifiant $F_1(x_0) = y_0$ et $F_2(x_0) = y_0$. Montrons que $F_1 = F_2$. Comme toutes les primitives diffèrent d'une constante, il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in I$, $F_2(x) = F_1(x) + c$. Donc, en particulier, on a

$$F_2(x_0) = y_0 \iff F_1(x_0) + c = y_0 \iff c = y_0 - F_1(x_0) \iff c = 0.$$

On a donc, pour tout $x \in I$, $F_2(x) = F_1(x)$, ce qui prouve l'unicité. □

Exemple : Reprenons l'exemple précédent : $f(x) = \mathrm{e}^x + 2x$. Il existe une **unique** primitive F de f telle que $F(0) = 2$. F est de la forme $F(x) = \mathrm{e}^x + x^2 + c$ avec $c \in \mathbb{R}$. On a :

$$F(0) = 2 \iff \mathrm{e}^0 + 0^2 + c = 2 \iff c = 1.$$

Ainsi, $F(x) = \mathrm{e}^x + x^2 + 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Remarques :
- La condition $F(x_0) = y_0$ est parfois appelée condition initiale en référence à certaines situations rencontrées en physique.
- Il existe des fonctions continues qui n'admettent pas de primitives explicites, c'est le cas de la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{-x^2}$ pour laquelle il est impossible de donner l'expression d'une primitive.

Exercices : 11.6 à 11.8 ; 11.36.

11.1.2 Primitives des fonctions de référence

Soient $k \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}^*$.

$f : x \mapsto$	k	x^n, $n \neq -1$	$\dfrac{1}{x}$	$\dfrac{1}{\sqrt{x}}$	e^x	$\cos(x)$	$\sin(x)$
$\mathcal{D}_f$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}_+$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$

$F : x \mapsto$	kx	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$	$\ln(x)$	$2\sqrt{x}$	e^x	$\sin(x)$	$-\cos(x)$
$\mathcal{D}_F$	$\mathbb{R}$	$n > 0 : \mathbb{R}$; $n < -1 : \mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}_+^*$	$\mathbb{R}_+^*$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$

Remarque : il faut faire attention au cas de la fonction inverse qui est définie sur $\mathbb{R}^*$ mais dont le logarithme n'est la primitive que sur $\mathbb{R}_+^*$.

11.1.3 Opérations sur les primitives

Proposition 11.2. *Soient u et v sont deux fonctions continues sur un intervalle I, k est un nombre réel. Soient U et V deux primitives respectives de u et v. Alors :*

1. *$U+V$ est une primitive de $u+v$.*
2. *kU est une primitive de ku.*

Démonstration.

1. $(U+V)' = U' + V' = u + v$.
2. $(kU)' = kU' = ku$.

□

Exemple : Les primitives de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 3x + 1$ sont les fonctions F définies sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + x + c$ avec $c \in \mathbb{R}$.

Proposition 11.3. *Soient v une fonction définie et dérivable sur un intervalle I et u une fonction définie et dérivable sur un intervalle J à valeurs dans I : $\forall x \in J,\ u(x) \in I$. Alors $v \circ u$ est une primitive de $u' \times (v' \circ u)$ sur I.*

Démonstration. Soient v une fonction définie et dérivable sur un intervalle I et u une fonction définie et dérivable sur un intervalle J à valeurs dans I. Alors $v \circ u$ est dérivable et $(v \circ u)' = u' \times (v' \circ u)$. □

Dans le tableau suivant u est une fonction dérivable sur I, $n \in \mathbb{Z} \backslash \{-1\}$ et $c \in \mathbb{R}$.

Fonction f	Primitive F	Condition sur u
$u'\mathrm{e}^u$	$\mathrm{e}^u + c$	partout où u est définie
$u'u$	$\frac{1}{2}u^2 + c$	partout où u est définie
$u'u^n$	$\frac{1}{n+1}u^{n+1} + c$	$u(x) \neq 0$ pour tout x de I si $n \leqslant -2$
$\frac{u'}{u^2}$	$-\frac{1}{u} + c$	$u(x) \neq 0$ pour tout x de I
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u} + c$	$u(x) > 0$ pour tout x de I
$\frac{u'}{u}$	$\ln(u) + c$	$u(x) > 0$ pour tout x de I
$\cos(u)$	$\sin(u) + c$	partout où u est définie
$\sin(u)$	$-\cos(u) + c$	partout où u est définie

Exemples :

1. La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2(2x+1)(x^2+x)$ est de la forme $2u'u$ où $u(x) = x^2+x$.
   — Les primitives de f sur $\mathbb{R}$ sont donc les fonctions F définies par :
   $$F(x) = (x^2+x)^2 + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$
   — Il existe une unique primitive F de f telle que $F(1) = 1$. Déterminons là :
   $$F(1) = 1 \iff (1+1)^2 + c = 1 \iff 4 + c = 1 \iff c = -3.$$
   Cette primitive est donc définie par $F(x) = (x^2+x)^2 - 3$.
2. Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \mathrm{e}^{2x+1}$.
   — Pour faire apparaître une dérivée de e^u, on écrit :
   $$h(x) = \mathrm{e}^{2x+1} = \frac{1}{2} \times 2\mathrm{e}^{2x+1}.$$
   Ainsi, $x \mapsto 2\mathrm{e}^{2x+1}$ est de la forme $u'\mathrm{e}^u$ où $u(x) = 2x+1$.
   — Les primitives de g sont donc les fonctions G de la forme :
   $$G(x) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x+1} + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$
3. Soit la fonction h définie sur $[0\,;+\infty[$ par $h(t) = \dfrac{1}{(3t+1)^2}$.
   — On remarque que h est bien définie et continue sur $[0\,;+\infty[$ puisque $3t+1 \neq 0$ pour tout $t \in [0\,;+\infty[$. h admet donc des primitives sur cet intervalle.
   — Nous aimerions que h soit de la forme $\dfrac{u'}{u^2}$ avec $u(t) = 3t+1$ et donc $u'(t) = 3$.
   — On écrit alors :
   $$h(t) = \frac{1}{3} \times \frac{3}{(3t+1)^2}.$$
   Les primitives de h sur $[0\,;+\infty[$ sont donc les fonctions H de la forme :
   $$H(t) = -\frac{1}{3} \times \frac{1}{3t+1} + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Exercices : 11.9 à 11.18 ; 11.37 à 11.41.

11.2 Équations différentielles

11.2.1 L'équation différentielle $y' = ay$

Définition 11.3. *L'équation différentielle* (E_h) : $y' = ay$ *(pouvant aussi s'écrire* $y' - ay = 0$*) est appelée* ***équation différentielle linéaire homogène du premier ordre à coefficients constants****.*

Exemples : $y' = 5y$ et $2y' + 9y = 0$ sont des équations différentielles linéaires homogènes du premier ordre à coefficients constants où a vaut respectivement 5 et $-\dfrac{9}{2}$.

Théorème 11.2. *Soit* a *un nombre réel fixé.*

1. *On note* y_h *la fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *par* $y_h(x) = \mathrm{e}^{ax}$*. Les solutions de l'équation différentielle* (E_h) : $y' = ay$ *sont les fonctions définies sur* $\mathbb{R}$ *par* $y(x) = c \times y_h(x) = c\mathrm{e}^{ax}$*, où* c *est une constante réelle.*
2. *Pour tous réels* x_0 *et* y_0*,* (E_h) *admet une unique solution* y *telle que* $y(x_0) = y_0$*.*

Exemples :

1. Les solutions de l'équation différentielle $y' = 2y$ sont les fonctions y définies sur $\mathbb{R}$ par : $y(x) = c\mathrm{e}^{2x}$, où c est une constante réelle.
   Par exemple, la fonction y définie par $y(x) = 3\mathrm{e}^{2x}$ est une solution de cette équation. En effet :
   $$y'(x) = 3 \times 2\mathrm{e}^{2x} = 2y(x).$$
   C'est aussi l'unique solution vérifiant $y(0) = 3$.
2. L'équation différentielle (E) : $2y' + y = 0$ est équivalente à l'équation
   $$y' = -\frac{1}{2}y$$
   dont les solutions sont les fonctions y définies sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = c\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}$ où c est une constante réelle.
   Elle admet une unique solution vérifiant $y(4) = 1$, c'est celle définie par $y(x) = \mathrm{e}^2 \times \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x} = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x+2}$.

Démonstration.

1. Montrons que y est solution de (E_h) : $y' = ay$ si et seulement si $y(x) = c\mathrm{e}^{ax}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   $\Longleftarrow$ **:** Soient $c \in \mathbb{R}$ et y la fonction définie par $y(x) = c\mathrm{e}^{ax}$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $y'(x) = ca\mathrm{e}^{ax} = ay(x)$, autrement dit, y est solution de (E_h).
   $\Longrightarrow$ **:** Soient y une solution de (E_h) et g la fonction définie par $g(x) = y(x)\mathrm{e}^{-ax}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit et composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a, puisque y est solution de (E_h) :

$$g'(x) = y'(x) \times \mathrm{e}^{-ax} + y(x) \times (-a)\mathrm{e}^{-ax} = (y'(x) - ay(x))\mathrm{e}^{-ax} = (ay(x) - ay(x))\mathrm{e}^{-ax} = 0.$$

On en déduit que g est une fonction constante : il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = c$, ou encore, $y(x)\mathrm{e}^{-ax} = c$, et donc finalement $y(x) = c\mathrm{e}^{ax}$.

2. Soient y_1 et y_2 deux solutions de (E_0) vérifiant que $y_1(x_0) = y_0$ et $y_2(x_0) = y_0$. On a alors d'après 1 l'existence de deux réels c_1 et c_2 tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $y_1(x) = c_1 \times y_h(x)$ et $y_2(x) = c_2 \times y_h(x)$. On a alors

$$\begin{aligned}
& y_1(x_0) - y_2(x_0) = y_0 - y_0 \\
\iff & c_1 \times y_h(x_0) - c_2 \times y_h(x_0) = 0 \\
\iff & (c_1 - c_2)y_h(x_0) = 0 \\
\iff & (c_1 - c_2)\mathrm{e}^{ax_0} = 0 \\
\iff & c_1 - c_2 = 0 \\
\iff & c_1 = c_2.
\end{aligned}$$

Donc $y_1(x) = y_2(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, autrement dit $y_1 = y_2$, on a bien l'unicité.

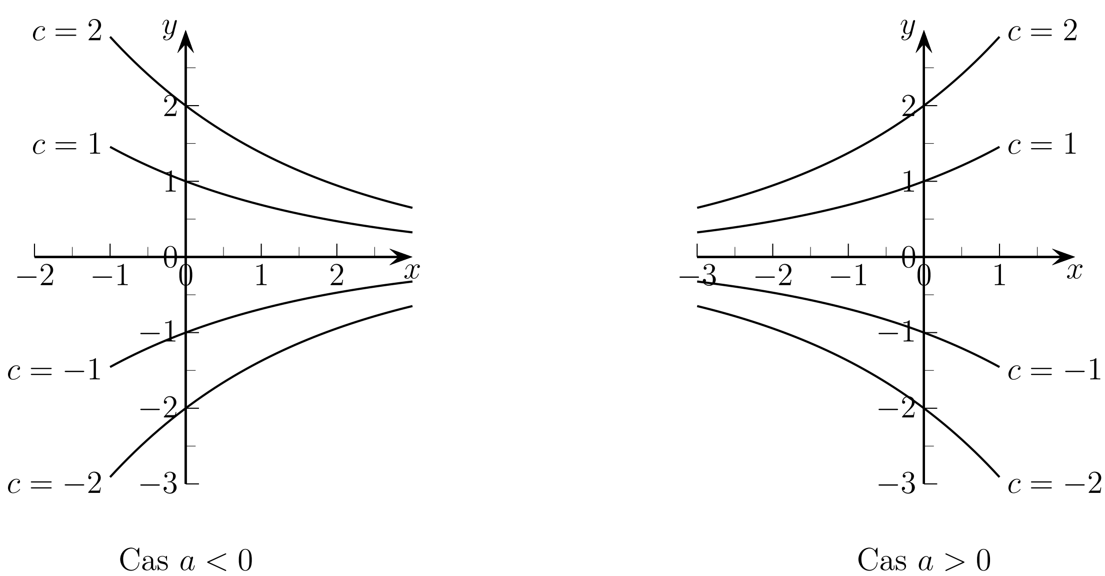
$\square$

Remarques :

— L'équation différentielle $y' = ay$, sans condition initiale du type $y(x_0) = y_0$, admet une infinité de solutions. À chaque valeur de c correspond une solution particulière.

— La fonction y_h forme une base de l'ensemble des solutions de la même façon qu'un vecteur directeur engendre une droite.

Allure des courbes des fonctions solutions selon les signes de a et de k



Proposition 11.4. ***[Linéarité]*** *Soient y_1 et y_2 deux solutions de (E_h) et $k \in \mathbb{R}$. Alors $y_1 + y_2$ et ky_1 sont des solutions de (E_h).*

Démonstration. Exercice. □

Exercices : 11.19 à 11.22 ; 11.42.

11.2.2 L'équation différentielle $y' = ay + b$

Définition 11.4. *L'équation différentielle $(E) : y' = ay + b$ (pouvant aussi s'écrire $y' - ay = 0$) est appelée* ***équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants avec second membre****.*

Théorème 11.3. *Soient $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$.*

1. *L'équation différentielle $(E) : y' = ay + b$ admet une unique* ***solution particulière*** *constante : $y_p : x \mapsto -\dfrac{b}{a}$.*
2. *Les solutions de l'équation différentielle $(E) : y' = ay + b$ sont les fonctions y définies sur $\mathbb{R}$ par*
$$y(x) = c \times y_h(x) + y_p(x) = c\mathrm{e}^{ax} - \frac{b}{a}, \quad c \in \mathbb{R}.$$
3. *Pour tous réels x_0 et y_0, (E) admet une unique solution y telle que $y(x_0) = y_0$.*

Remarques :

— Comme précédemment, l'équation différentielle $y' = ay + b$ admet donc une infinité de solution.

— La solution particulière constante est la solution de l'équation $ax + b = 0$.

Démonstration. Soit (E) l'équation différentielle $y' = ay + b$ avec $a \neq 0$.

1. Il est évident que la fonction $y_p : x \mapsto -\dfrac{b}{a}$ est solution de (E). Réciproquement, si y est une solution constante de (E), alors il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on ait $y(x) = k$. Comme y est solution de (E), on a alors :
$$y' = ay + b \iff 0 = ak + b \iff k = -\frac{b}{a}.$$
2. Montrons que y est solution de (E) si et seulement si $y(x) = cy_h(x) + y_p(x) = c\mathrm{e}^{ax} - \dfrac{b}{a}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

   $\underline{\Longleftarrow}$ **:** Soient y_h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $y_h(x) = \mathrm{e}^{ax}$, solution de (E_h), y_p la solution particulière de (E) et y la fonction définie par $y = cy_h + y_p$. On a alors
$$y' = (cy_h + y_p)' = cy_h' + y_p' = cay_h + ay_p + b = a(cy_h + y_p) + b = ay + b.$$

$\underline{\Longrightarrow :}$ Soient y une solution de (E) et y_p la solution particulière de (E). On pose $g = y - y_p$; g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a

$$g' = (y - y_p)' = y' - y_p' = ay + b - (ay_p + b) = ay - ay_p = a(y - y_p) = ag.$$

On en déduit que g est solution de (E_h) : $g' = ag$. Donc il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = cy_h = c\mathrm{e}^{ax}$. Donc $cy_h = y - y_p$, ou encore $y = cy_h + y_p$.

3. Soient y_1 et y_2 deux solutions de (E) vérifiant que $y_1(x_0) = y_0$ et $y_2(x_0) = y_0$. On a alors d'après 2 l'existence de deux réels c_1 et c_2 tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $y_1 = c_1y_h + y_p$ et $y_2(x) = c_2y_h + y_p$. On a alors

$$\begin{aligned}
& y_1(x_0) - y_2(x_0) = y_0 - y_0 \\
\Longleftrightarrow\ & c_1y_h(x_0) + y_p(x_0) - (c_2y_h(x_0) + y_p(x_0)) = 0 \\
\Longleftrightarrow\ & c_1y_h(x_0) - c_2y_h(x_0) = 0 \\
\Longleftrightarrow\ & (c_1 - c_2)y_h(x_0) = 0 \\
\Longleftrightarrow\ & c_1 = c_2.
\end{aligned}$$

Donc $y_1(x) = y_2(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, autrement dit $y_1 = y_2$, on a bien l'unicité.

$\square$

Exemple : On considère l'équation différentielle (E) : $2y' + 3y = 6$. Résolvons cette équation :

$$2y' + 3y = 6 \iff 2y' = -3y + 6 \iff y' = -\frac{3}{2}y + 3.$$

L'équation (E) est bien une équation différentielle de la forme $y' = ay + b$ avec $a = -\dfrac{3}{2}$ et $b = 3$.

Solution particulière : La fonction définie par $y_p(x) = -\dfrac{b}{a} = -3 \times \left(-\dfrac{2}{3}\right) = 2$ est solution particulière de (E).

Solution générale : D'après le théorème, les solutions de (E) sont donc les fonctions y définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$y(x) = c\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}x} + 2, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Détermination de la constante : Si une condition initiale est donnée, il est possible de déterminer la constante comme précédemment. Prenons par exemple la condition initiale $y(2) = 3$. On a alors

$$y(2) = 3 \iff c\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}\times 2} + 2 = 3 \iff c\mathrm{e}^{-3} = 1 \iff c = \frac{1}{\mathrm{e}^{-3}} = \mathrm{e}^3.$$

La solution est alors définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par $y(x) = \mathrm{e}^{-\frac{3}{2}x+3} + 2$.

On a représenté ci-contre les courbes de cinq fonctions solutions de (E) pour différentes valeurs de la constante c définies sur $\mathbb{R}$ par :

— $y_p(x) = 2$, la solution particulière de courbe $\mathscr{C}_p$;

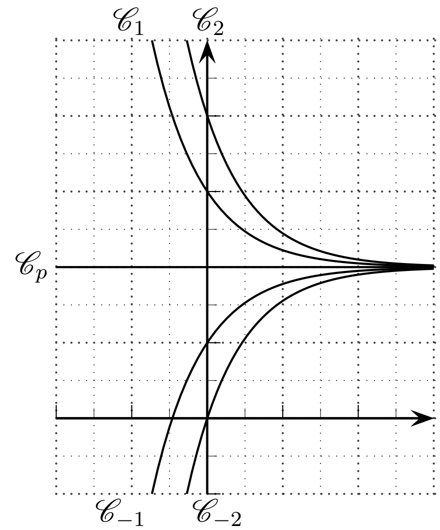
— $y_1(x) = \mathrm{e}^{-\frac{3}{2}x} + 2$ de courbe $\mathscr{C}_1$;

— $y_{-1}(x) = -\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}x} + 2$ de courbe $\mathscr{C}_{-1}$;

— $y_2(x) = 2\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}x} + 2$ de courbe $\mathscr{C}_2$;

— $y_{-2}(x) = -2\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}x} + 2$ de courbe $\mathscr{C}_{-2}$.

On remarque que toutes ces solutions de (E) ont pour limite 2 en $+\infty$.



Exercices : 11.23 et 11.24 ; 11.43 et 11.44.

11.2.3 L'équation différentielle $y' = ay + f$

Théorème 11.4. *Soient $a \in \mathbb{R}^*$ et f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.*

1. *L'équation différentielle $(E) : y' = ay + f$ admet une unique* ***solution particulière*** *y_p.*
2. *Les solutions de l'équation différentielle $(E) : y' = ay + b$ sont les fonctions y définies sur $\mathbb{R}$ par*
$$y = c \times y_h + y_p, \quad c \in \mathbb{R}.$$
3. *Pour tous réels x_0 et y_0, (E) admet une unique solution y telle que $y(x_0) = y_0$.*

Remarques :

— Comme précédemment, l'équation différentielle $y' = ay + f$ admet donc une infinité de solution.

— Il n'y a pas de méthode générique pour déterminer la solution particulière ; en général, on la cherche dans la même famille de fonctions que f : si f est une fonction affine, on cherchera une fonction affine, si f est un polynôme de degré 2, on cherchera un polynôme de degré 2, etc.

— Le fait que l'ensemble des solutions soient de la forme $y = c \times y_h + y_p$ est appelé **principe de superposition**. D'une certaine façon, c'est l'équivalent de la représentation paramétrique des droites pour les équations différentielles linéaires.

Démonstration. Exercice. ☐

Exemple : On considère l'équation différentielle $(E) : 2y' + 3y = 6x + 1$. Résolvons cette équation :

$$2y' + 3y = 6x + 1 \iff 2y' = -3y + 6x + 1 \iff y' = -\frac{3}{2}y + 3x + \frac{1}{2}.$$

L'équation (E) est bien une équation différentielle de la forme $y' = ay + f$ avec $a = -\dfrac{3}{2}$ et $f(x) = 3x + \dfrac{1}{2}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Solution particulière : La fonction f est affine, cherchons une solution particulière sous cette forme. Soit y_p la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $y_p(x) = mx + p$, m et p deux réels à déterminer. y_p est solution de (E) si et seulement si , pour tout $x \in \mathbb{R}$.

$$2y_p'(x) + 3y_p(x) = 6x + 1 \iff 2m + 3(mx + p) = 6x + 1 \iff 3mx + (2m + 3p) = 6x + 1.$$

Par identification, on en déduit que :

$$\left\{\begin{array}{rcl} 3m & = & 6 \\ 2m + 3p & = & 1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} m & = & 2 \\ 4 + 3p & = & 1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} m & = & 2 \\ p & = & -1 \end{array}\right. .$$

La solution particulière définie sur $\mathbb{R}$ est donc $y_p(x) = 2x - 1$;

Solution générale : D'après le théorème, les solutions de (E) sont donc les fonctions y définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$y(x) = c\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}x} + 2x - 1, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Détermination de la constante : Si une condition initiale est donnée, il est possible de déterminer la constante comme précédemment. Prenons par exemple la condition initiale $y(2) = 4$. On a alors

$$y(2) = 4 \iff c\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}\times 2} + 2 \times 2 - 1 = 4 \iff c\mathrm{e}^{-3} = 1 \iff c = \frac{1}{\mathrm{e}^{-3}} = \mathrm{e}^3.$$

La solution est alors définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par $y(x) = \mathrm{e}^{-\frac{3}{2}x+3} + 2x - 1$.

Exercices : 11.25 à 11.28 ; 11.45 et 11.46.

11.3 Capacités attendues

— Calculer une primitive en utilisant les primitives de référence et les fonctions de la forme $(v' \circ u) \times u'$.

— Pour une équation différentielle $y' = ay + b (a \neq 0)$, déterminer une solution particulière constante ; utiliser cette solution pour déterminer toutes les solutions.

— Pour une équation différentielle $y' = ay + f$, à partir de la donnée d'une solution particulière, déterminer toutes les solutions.

11.4 Exercices

11.4.1 Progresser

Équation différentielle

Exercice 11.1. Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 3x + 1$ est solution de l'équation différentielle $(E) : y'(x) = 3x^2 + 3$.

Exercice 11.2. On considère l'équation différentielle $(E) : y' + 5y = 0$. Est ce que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \mathrm{e}^{-5x+3}$ est solution de (E) ?

Exercice 11.3. Montrer que la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ est une solution de l'équation différentielle $xy' + y = -\dfrac{1}{x^2}$.

Exercice 11.4. On sait que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$ vérifie l'équation différentielle $xy' - 2y = 5x + 6$. Déterminer a et b.

Exercice 11.5. On considère les équations différentielles $(E) : y' + y = \mathrm{e}^{-x}$ et $(E') : y' + y = 0$.

1. Montrer que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x\mathrm{e}^{-x}$ est une solution de (E).
2. Soit f une solution de (E). Montrer que la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = f(x) - g(x)$ est une solution de l'équation différentielle (E').

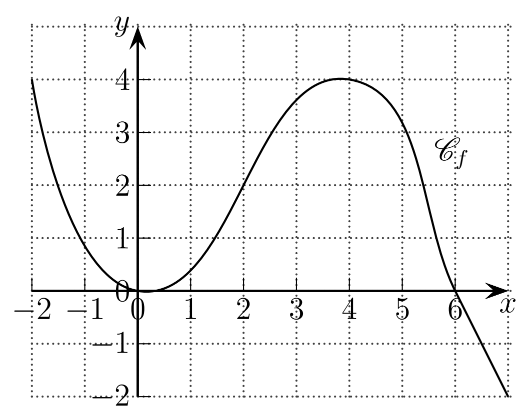
Primitive d'une fonction continue

Exercice 11.6. Montrer que F est une primitive de f dans chaque cas.

1. $F(x) = x^3 - 3x^2 - 24x + 5$ et $f(x) = 3x^2 - 6x - 24$ sur $\mathbb{R}$.
2. $F(x) = \dfrac{2}{3}x\sqrt{x} + 5$ et $f(x) = \sqrt{x}$ sur $]0\,;+\infty[$.

Exercice 11.7. La courbe $\mathscr{C}_f$ ci-dessous est la courbe représentative d'une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$. Soit F une primitive de f sur $\mathbb{R}$. Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse.

1. F est décroissante sur $[4\,;+\infty[$.
2. F est croissante sur $[-2\,;6]$.
3. F admet un minimum en 0.
4. F est convexe sur $[1\,;3]$.
5. La courbe représentative de F admet des tangentes horizontales aux points d'abscisses 0 et 6.
6. Le coefficient directeur de la tangente à la courbe de F au point d'abscisse 2 est 2.



Exercice 11.8. Soit la fonction F définie sur $]-\infty\,;2[$ par $F(x) = (x-2)\sqrt{2-x}$.

1. Calculer $F'(x)$.
2. En déduire une primitive sur $]-\infty\,;2[$ de la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{2-x}$.

Opérations sur les primitives

Exercice 11.9. Déterminer une primitive des fonctions suivantes :

1. $f(x) = 3x^2 - 2x + 3$;
2. $g(x) = x^2 + x - 7$;
3. $h(x) = 16x^3 - 72x^2 - 2$;
4. $i(x) = x^5 - 45x^2$;
5. $j(x) = \dfrac{1}{2}(x^4 - 4)$;
6. $k(x) = (x^2 - 3)(3x + 4)$.

Exercice 11.10. Déterminer les primitives des fonctions suivantes, on précisera leur ensemble de validité.

1. $f(x) = -\dfrac{5}{2\sqrt{x}} - 4x^{45}$.
2. $g(x) = \mathrm{e}^x + \dfrac{1}{x^2}$.
3. $h(x) = 2\cos(x) - 3\sin(x)$.
4. $i(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x^3}$.

Exercice 11.11. Déterminer une primitive des fonctions suivantes. On précisera l'ensemble de validité.

1. $f(x) = \mathrm{e}^{-8x}$.
2. $g(x) = 3\mathrm{e}^{3x-5}$.
3. $h(x) = x\mathrm{e}^{-x^2}$.
4. $i(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2x+1}}$.
5. $j(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$.
6. $k(x) = -3\cos(5x - 1)$.
7. $l(x) = (2x + 1)\sin(x^2 + 2x + 1)$.

Exercice 11.12. Soit g la fonction exponentielle.

1. Déterminer la primitive G_0 de la fonction g vérifiant $G_0(0) = 2$.
2. Déterminer la primitive G_5 de la fonction g vérifiant $G_5(5) = 8$.

Exercice 11.13. Déterminer une primitive des fonctions suivantes. On précisera l'ensemble de validité.

1. $f(x) = \dfrac{2}{(-3x+12)^2}$.
2. $g(x) = -x\mathrm{e}^{x^2-1}$.
3. $h(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.
4. $i(x) = -\dfrac{3x^2}{x^3+1}$.
5. $j(x) = -5x^3\left(x^4 - 1\right)^4$.
6. $k(x) = (2x^2 - 1)(2x^3 - 3x)^5$.
7. $l(x) = \dfrac{2x+1}{(x+1)^2}$.
8. $m(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$.
9. $n(x) = \mathrm{e}^x \sin(\mathrm{e}^x)$.
10. $o(x) = \dfrac{\cos(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$.

Exercice 11.14. Dans chaque cas, déterminer la primitive F de la fonction f sur I vérifiant la condition initiale.

1. $f(x) = \dfrac{1}{x^2} - 1$, $F(1) = -1$ et $I = \mathbb{R}^{+*}$.
2. $f(x) = (2x-3)^2$, $F(-3) = 0$ et $I = \mathbb{R}$.
3. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$, $F(-1) = 0$ et $I = \mathbb{R}$.
4. $f(x) = x^2 \mathrm{e}^{x^3-1}$, $F(1) = 0$ et $I = \mathbb{R}$.

Exercice 11.15. Dans chaque cas, déterminer la solution g de l'équation différentielle proposée vérifiant la condition indiquée.

1. $y' = 3x^2\mathrm{e}^{x^3} + 1$ et $g(0) = -2$.
2. $y' = -x\mathrm{e}^{x^2-1}$ et $g(1) = 1$.
3. $y' + 2(x+1)(x^2+2x-3) = 0$ et $g(0) = 2$.

Exercice 11.16. Soit f la fonction définie sur $]1\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x^2-2x}{(x-1)^2}$.

1. Déterminer les réels a et b tels que, pour tout $x \in \,]1\,;+\infty[$,
$$f(x) = a + \frac{b}{(x-1)^2}.$$
2. En déduire les solutions de l'équation différentielle $y' = f$.

Exercice 11.17. Soit f la fonction définie sur $]-2\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{2x^3+9x^2+12x+2}{(x+2)^2}$.

1. Déterminer les réels a et b tels que, pour tout $x \in \,]-2\,;+\infty[$,
$$f(x) = ax + b + \frac{c}{(x+2)^2}.$$
2. En déduire les solutions de l'équation différentielle $y' = f$.

Exercice 11.18. Résoudre les équations différentielles suivantes en précisant l'ensemble de définition des solutions.

1. $y'' = 2x - 1$.
2. $y'' = \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}$.
3. $x^3 y = -2$.
4. $\mathrm{e}^{2x} y'' = 4$.

L'équation différentielle $y' = ay$

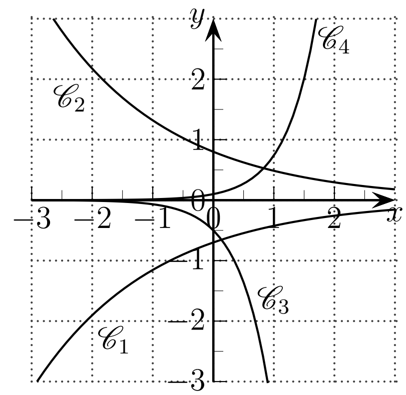
Exercice 11.19. Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y' = 5y$;
2. $y' = -y$;
3. $3y' + y = 0$;
4. $0,5y' - 36y = 0$.

Exercice 11.20. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant les propriétés suivantes :
- f est solution d'une équation différentielle $y' = ay$ où a est un nombre réel ;
- la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ représentative de f au point $A\,(0\,;2)$ passe par le point $B\,(-3\,;1)$.

1. Déterminer $f(0)$ et $f'(0)$.
2. En déduire la valeur de a.
3. Exprimer $f(x)$ en fonction de x.

Exercice 11.21. Dans le repère ci-contre, les courbes représentent des solutions d'équations différentielles du type $y' = ay$. Associer à chacune de ces courbes aux équations différentielles suivantes.
- $(E_1) : y' = 2y$.
- $(E_2) : y' + 0,5y = 0$.



Exercice 11.22. [Démonstration] On considère l'équation différentielle $(E_h) : y' = ay$, $a \in \mathbb{R}$.
1. Soient y_1 et y_2 deux solutions de (E_h). Montrer que $y_1 + y_2$ est aussi solution de (E_h).
2. Soient y une solution de (E_h) et k un réel. Montrer que ky est aussi solution de (E_h).

L'équation différentielle $y' = ay + b$

Exercice 11.23. Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y' = -3y + 2$;
2. $2y' - 3y = 1$;
3. $y' = \dfrac{1}{2}y - \dfrac{3}{4}$;
4. $-y' + y - 2 = 0$.

Exercice 11.24. Dans chaque cas, déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) vérifiant la condition indiquée.

1. $5y' - 3y = 2$ et $y(1) = -1$.
2. $-2y' = 4y - 3$ et $y'(5) = -3$.

L'équation différentielle $y' = ay + f$

Exercice 11.25. Soit (E) l'équation différentielle $y' + 2y = 3x + 1$.
1. Déterminer une solution particulière de (E) sous la forme d'une fonction affine.
2. En déduire la solution générale de (E).
3. Déterminer la solution vérifiant $y(0) = 4$.

Exercice 11.26. Soit (E) l'équation différentielle $y' - 5y = x^2 + x + 1$.

1. Déterminer une solution particulière de (E) sous la forme d'un polynôme de degré 2.
2. En déduire la solution générale de (E).
3. Déterminer la solution vérifiant $y(0) = 1$.

Exercice 11.27. Soit (E) l'équation différentielle $y' - 5y = \sin(x)$.

1. Déterminer une solution particulière de (E) sous la forme $y_p(x) = a\cos(x) + b\sin(x)$ avec a et b deux réels.
2. En déduire la solution générale de (E).
3. Déterminer la solution vérifiant $y(0) = \dfrac{1}{2}$.

Exercice 11.28. [Démonstration] On considère l'équation différentielle $(E_h) : y' = ay + f$ où $a \neq 0$ et f est une fonction définie et continue sur un intervalle I. Soit y_p une fonction dérivable sur I solution particulière de (E). Montrer que y est solution de (E) si et seulement si $y - y_p$ est solution de $(E_h) : y' = ay$.

11.4.2 Approfondir

Exercice 11.29. [Physique] Lors de la chute d'un objet de masse m sur Terre, une force de frottement due à la résistance de l'air s'applique à cet objet. L'intensité est modélisée comme proportionnelle à la vitesse instantanée v de l'objet. Si la chute est verticale, la deuxième loi de Newton permet d'écrire la relation

$$ma(t) = mg - kv(t)$$

où a et v sont l'accélération et la vitesse de l'objet à l'instant t, k une constance positive.

On rappelle que, pour tout $t \geqslant 0$, on a $a(t) = v'(t)$.

1. (a) Déterminer une équation différentielle (E) de la forme $y' = \alpha y + \beta$ vérifiée par v (α et β réels).
   (b) Résoudre cette équation puis exprimer v en fonction de t.
2. Que devient la relation donnée par la seconde loi de Newton dans le vide, i.e. lorsqu'il n'y a plus de frottements ? En déduire l'expression de z en fonction de t où z est l'altitude de l'objet à l'instant t. *Indication :* on a $z' = v$.
3. Dans le vide, combien de temps met à atteindre le sol un objet lâché à 10 m de hauteur avec une vitesse initiale nulle ? Même question avec une vitesse initiale de 1 m/s.

Exercice 11.30. [Biologie] Une colonie de 2 000 bactéries est placée dans une enceinte close dont le milieu nutritif est renouvelé en permanence. On admet que l'évolution en fonction du temps t en heure du nombre d'individus $N(t)$ de cette colonie sui l'équation différentielle

$$(E) \quad N'(t) = 3N(t) - 0,005N(t)^2.$$

Pour déterminer N, on propose de remplacer (E) par une équation plus simple puis de la résoudre.

1. On suppose que la fonction N ne s'annule pas sur $[0\,;+\infty[$ et on définit sur cet intervalle la fonction g par $g(t) = \dfrac{1}{N(t)}$. Déterminer $g'(t)$.
2. Montrer que N est solution de (E) si et seulement si g est solution de (E') : $y' = -3y + 0,005$.
3. Résoudre (E') puis (E).
4. (a) Déterminer la solution de (E) vérifiant la condition initiale de l'énoncé.
   (b) Calculer le nombre de bactéries présentes au bout de deux heures. Arrondir à l'unité.

Exercice 11.31. [Dynamique des populations] On considère deux territoires A et B occupés par une espèce. Une partie des individus de cette dernière peuvent :

— soit rester sur leur territoire ;
— soit passer d'un territoire à l'autre ;
— soit quitter les deux territoires pour en explorer d'autres.

On appelle respectivement $A(t)$ et $B(t)$ le nombre d'individus en milliers sur les territoires A et B à l'instant t. On a initialement 10 000 individus sur le territoire A et aucun sur le B (ils viennent de le découvrir).

On admet que A et B sont définies et dérivables sur $[0\,;+\infty[$ et vérifient le système d'équations différentielles :

$$\left\{\begin{array}{lcl} A'(t) & = & -5A(t) + 2B(t) \\ B'(t) & = & 2A(t) - 2B(t) \end{array}\right. .$$

1. On définit sur $[0\,;+\infty[$ deux fonctions f et g par $f(t) = A(t) + 2B(t)$ et $g(t) = -2A(t) + B(t)$.
   (a) Calculer $f(0)$ et $g(0)$.
   (b) Déterminer, pour tout $t \in [0\,;+\infty[$, $f'(t)$ et $g'(t)$ puis en déduire que f et g sont solutions de deux équations différentielles de la forme $y' = ay$.
   (c) Résoudre ces deux équations et déterminer, pour tout $t \in [0\,;+\infty[$, $f(t)$ et $g(t)$.
   (d) En déduire, pour tout $t \in [0\,;+\infty[$, $A(t)$ et $B(t)$.
2. Déterminer à quel moment les deux territoires auront le même nombre d'individus dont on arrondira la valeur à l'unité.

Exercice 11.32. [Équation fonctionnelle] On souhaite déterminer les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ vérifiant l'équation fonctionnelle :

$$(\star) \quad f(x_1 + x_2) = f(x_1) \times f(x_2), \quad \forall x_1,\, x_2 \in \mathbb{R}.$$

1. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant $(\star)$. Montrer que f est solution de l'équation différentielle $y' = f'(0)y$. *Indication :* on pourra considérer x_2 comme une constante quelconque et passer à la dérivée dans $(\star)$ avant de choisir une valeur pour x_1 dans l'expression trouvée.
2. Résoudre l'équation différentielle $y' = f'(0)y$.
3. Montrer que si f vérifie $(\star)$ alors $f(0) = 0$ ou $f(0) = 1$.
4. Conclure quant aux fonctions vérifiant $(\star)$.

11.4.3 S'entraîner

Équation différentielle

Exercice 11.33. Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x + \dfrac{1}{2}$ est une solution de l'équation différentielle $(E) : y' + 2y = 4x + 3$.

Exercice 11.34. Soit l'équation différentielle $y' - xy^2 = 0$ pour x réel. Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{-2}{x^2+3}$ est une solution de cette équation.

Exercice 11.35. Soit l'équation différentielle pour x réel : $(E) : x^2y' + (x-1)y = 2x^2 - x$. Déterminer les réels a et b de façon que la fonction $h : x \mapsto ax + b$ soit une solution de cette équation.

Primitive d'une fonction continue

Exercice 11.36. Montrer que F est une primitive de f dans chaque cas.

1. $F(x) = \dfrac{1}{x^3+5x}$; $f(x) = -\dfrac{3x^2+5}{(x^3+5x)^2}$.
2. $F(x) = \sqrt{x^2+3x}$; $f(x) = \dfrac{2x+3}{2\sqrt{x^2+3x}}$.

Opérations sur les primitives

Exercice 11.37. Déterminer une primitive des fonctions suivantes. On précisera l'ensemble de validité.

1. $f(x) = 0$.
2. $g(x) = 8x^4 + 4x^3 - 3x^2$.
3. $h(x) = -3\mathrm{e}^x + 4x^2 - x$.
4. $i(x) = \dfrac{5}{x^2} - \dfrac{1}{2}x^5$.
5. $j(x) = 2(3x^2-4)(x^3-4x)$.
6. $k(x) = \dfrac{-6}{\sqrt{x}} + 8\sin(x) + 1$.
7. $l(x) = \dfrac{3}{x} - 14\cos(x)$.

Exercice 11.38. Déterminer une primitive des fonctions suivantes. On précisera l'ensemble de validité.

1. $f(x) = \dfrac{4x}{(2x^2+1)^2}$.
2. $g(x) = 2\mathrm{e}^{-0{,}5x+1}$.
3. $h(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+1)^2}$.
4. $i(x) = \dfrac{1}{\sqrt{3x-4}}$.
5. $j(x) = 10x\left(5x^2-5\right)^4$.
6. $k(x) = \left(x - \dfrac{1}{6}\right)\left(3x^2 - x\right)^3$.
7. $l(x) = \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}$.
8. $m(x) = \sin(x)\mathrm{e}^{\cos(x)}$.

Exercice 11.39. Déterminer la primitive F de la fonction f définie par $f(x) = 5x^2 - 3x + 2$ vérifiant :

1. $F(0) = 0$;
2. $F(1) = -\dfrac{3}{2}$.

Exercice 11.40. Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y' = -x^3 + x^2 + x - 1$;
2. $y' = -2\mathrm{e}^{-t} + 1$;
3. $y' = -2(1 - \mathrm{e}^{-2t+3})$;
4. $y' = -\dfrac{2}{x^2} + x^4 - 2$.

Exercice 11.41. Soit f la fonction définie sur $]0\,;1[$ par $f(x) = \dfrac{2x-1}{x^2(x-1)^2}$.

1. Déterminer les réels a et b tels que, pour tout $x \in\,]0\,;1[$,
$$f(x) = \frac{a}{x^2} + \frac{b}{(x-1)^2}.$$
2. En déduire les solutions de l'équation différentielle $y' = f$.

L'équation différentielle $y' = ay$

Exercice 11.42. Dans chaque cas, déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) vérifiant la condition indiquée.

1. $y' - y = 0$ et $y(0) = 45$.
2. $y' = 3y$ et $y'(0) = 2$.

L'équation différentielle $y' = ay + b$

Exercice 11.43. Déterminer la solution f de l'équation différentielle vérifiant la condition donnée :

1. $y' = \dfrac{1}{5}y$ et $y(0) = 3$.
2. $\dfrac{3}{7}y' + \dfrac{1}{2}y = 0$ et $y(3) = 5$.

Exercice 11.44. Déterminer la solution f de l'équation différentielle vérifiant la condition donnée :

1. $y' = y + 1$ et $y'(0) = 0$.
2. $5y' + 2y = -1$ et $y'(1) = 3$.

L'équation différentielle $y' = ay + f$

Exercice 11.45. Soit (E) l'équation différentielle $y' - \dfrac{1}{2}y = -4x + 7$.

1. Déterminer une solution particulière de (E) sous la forme d'une fonction affine.
2. En déduire la solution générale de (E).
3. Déterminer la solution vérifiant $y(1) = 2$.

Exercice 11.46. Soit (E) l'équation différentielle $y' + 3y = \cos(x)$.

1. Déterminer une solution particulière de (E) sous la forme $y_p(x) = a\cos(x) + b\sin(x)$ avec a et b deux réels.
2. En déduire la solution générale de (E).
3. Déterminer la solution vérifiant $y(0) = \dfrac{1}{2}$.

11.4.4 Le Flashback !

Flashback 11.1. [Amérique du Nord, 2025] *Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.*

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $\left(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k}\right)$. On considère la droite $\mathscr{D}$ dont une représentation paramétrique est :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 3-2t \\ y & = & -1 \\ z & = & 2-6t \end{array}\right. \quad , \quad t \in \mathbb{R}.$$

On considère également les points suivants :

— $A\,(3\,;-3\,;-2)$;

— $B\,(5\,;-4\,;-1)$;

— C le point de la droite $\mathscr{D}$ d'abscisse 2 ;

— H le projeté orthogonal du point B sur le plan $\mathscr{P}$ d'équation $x+3z-7=0$.

Affirmation 1 : La droite $\mathscr{D}$ et l'axe des ordonnées sont deux droites non coplanaires.

Affirmation 2 : Le plan passant par A et orthogonal à la droite $\mathscr{D}$ a pour équation cartésienne :

$$x+3z+3=0.$$

Affirmation 3 : Une mesure, exprimée en radian, de l'angle géométrique $\widehat{BAC}$ est $\dfrac{\pi}{6}$.

Affirmation 4 : La distance BH est égale à $\dfrac{\sqrt{10}}{2}$.