Chapitre 9

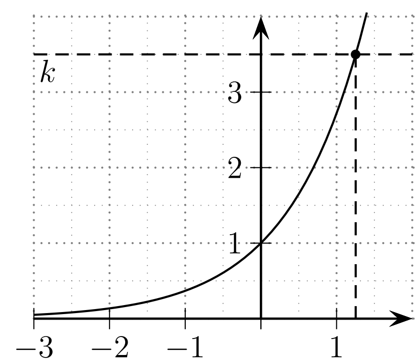
Logarithme népérien

9.1 Définition

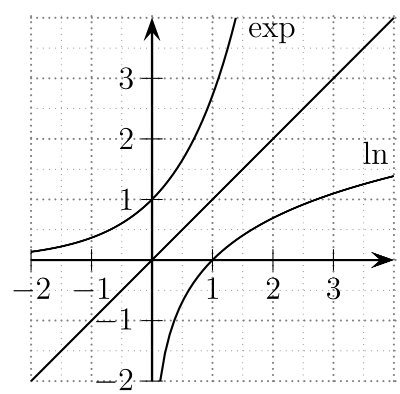
La fonction exponentielle est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, et

$$\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0 \text{ et } \lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty.$$

Ainsi, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $\mathrm{e}^x = k$ avec $k \in \mathbb{R}_+^*$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$.



Définition 9.1. *On appelle fonction* ***logarithme népérien****, notée* ln*, la fonction définie sur* $]0\,;+\infty[$ *qui à tout nombre réel strictement positif* x *associe l'unique solution de l'équation* $\mathrm{e}^y = x$ *d'inconnue* y*. On définit ainsi* $y = \ln(x)$*.*



Remarque : Dans un repère orthonormé, les courbes représentatives des fonctions ln et exp sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

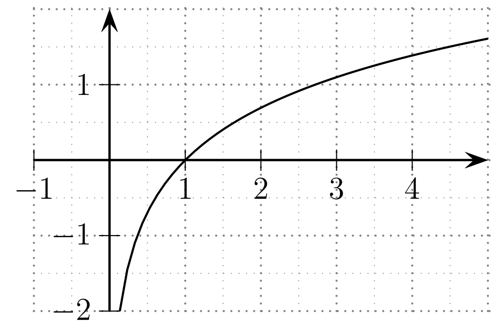
Remarques : On a donc $\ln(x) = y \iff x = \mathrm{e}^y$. On en déduit les résultats suivants :

1. $\ln(1) = 0$.
2. $\ln(\mathrm{e}) = 1$.
3. $\ln\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right) = -1$.
4. $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \mathrm{e}^{\ln(x)} = x$ et $\ln(\mathrm{e}^x) = x$.

9.2 Propriétés de la fonction logarithme

Proposition 9.1. *La fonction* ln *est strictement croissante sur* $]0\,;+\infty[$.

Démonstration. Soient x_1 et $x_2 \in \mathbb{R}_+^*$, tels que $0 < x_1 < x_2$. On a alors $0 < \mathrm{e}^{\ln(x_1)} < \mathrm{e}^{\ln(x_2)}$ puisque $x = \mathrm{e}^{\ln(x)}$ pour tout $x > 0$. Or, la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc $\ln(x_1) < \ln(x_2)$, autrement dit ln est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. □



Corollaire 9.1. *On a pour tous réels x_1 et x_2 strictement positifs :*

1. $\ln(x_1) = \ln(x_2) \iff x_1 = x_2$,

2. $\ln(x_1) < \ln(x_2) \iff x_1 < x_2$.

Démonstration. Conséquence de la stricte croissance de ln. □

Corollaire 9.2. *La fonction* ln *est :*

1. strictement négative sur $]0\,;1[$,

2. strictement positive sur $]1\,;+\infty[$.

Démonstration. Conséquence de la stricte croissance de ln et du fait que $\ln(1) = 0$. □

Exemples :

1. Résolvons l'équation $\mathrm{e}^{x+1} = 7$. On applique le logarithme à cette égalité : pour tout réel x,

$$\mathrm{e}^{x+1} = 7 \iff \ln(\mathrm{e}^{x+1}) = \ln(7) \iff x + 1 = \ln(7) \iff x = \ln(7) - 1.$$

2. Résolvons l'inéquation $\ln(-x + 6) > \ln(5x + 10)$. Il faut d'abord vérifier sur quel ensemble cette équation est définie. Puisque la fonction ln est définie sur $]0\,;+\infty[$, il faut que $-x+6 > 0$ et $5x + 10 > 0$. On a :

$$-x + 6 > 0 \iff x < 6 \quad \text{et} \quad 5x + 10 > 0 \iff x > -2.$$

Ainsi, cette inéquation est à résoudre sur l'intervalle $]-2\,;6[$. Alors, pour tout $x \in\,]-2\,;6[$,

$$\ln(-x + 6) > \ln(5x + 10) \iff -x + 6 > 5x + 10 \iff -6x > 4 \iff x < -\frac{2}{3}.$$

Or, $]-2\,;6[\,\cap \left]-\infty\,;-\frac{2}{3}\right[= \left]-2\,;-\frac{2}{3}\right[$, donc l'unique solution de cette inéquation est $\left]-2\,;-\frac{2}{3}\right[$.

Proposition 9.2. *Les limites de la fonction* ln *en* 0^+ *et* $+\infty$ *sont*

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \ln(x) = -\infty \quad \textit{et} \quad \lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty.$$

L'axe des ordonnées est une asymptote verticale à la courbe de ln.

Proposition 9.3. *La fonction* ln *est dérivable et continue sur* $]0\,;+\infty[$, *et pour tout réel* $x > 0$, $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$.

Démonstration. On admet que la fonction ln est dérivable sur $]0\,;+\infty[$. On cherche à montrer que $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$. Soit la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = \mathrm{e}^{\ln(x)}$. f est de la forme $u \circ v$, sa dérivée est donc de la forme $v' \times u'(v)$: pour tout $x \in \,]0\,;+\infty[$, on a

$$f'(x) = \ln'(x) \times \mathrm{e}^{\ln(x)} = \ln'(x) \times x.$$

Or, on a aussi $f(x) = x$ par définition et donc $f'(x) = 1$. On en déduit que $1 = \ln'(x) \times x$ et donc $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$. $\square$

Exemple : Soit la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = x\ln(x)$. Démontrons que f admet un minimum sur $]0\,;+\infty[$.

Étudions les variations de f. Cette fonction est un produit de fonctions : $f = u \times v$ avec $u(x) = x$ et $v(x) = \ln(x)$; $u'(x) = 1$ et $v'(x) = \dfrac{1}{x}$. Comme $f' = u'v + v'u$, on a alors, pour tout $x \in \,]0\,;+\infty[$,

$$f'(x) = \ln(x) + x \times \frac{1}{x} = \ln(x) + 1.$$

Étudions maintenant le signe de $f'(x)$. On a :

$$\ln(x) + 1 \geqslant 0 \iff \ln(x) \geqslant -1 \iff x \geqslant \mathrm{e}^{-1}.$$

On obtient alors le tableau de variations

x	0		e^{-1}		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ 0^-.	$\searrow$	$-\mathrm{e}^{-1}$	$\nearrow$	$+\infty$

f admet donc un minimum en e^{-1} qui vaut $-\mathrm{e}^{-1}$.

Remarque : la limite de f en 0 est *a priori* une forme indéterminée et sera justifiée par les croissances comparées en fin de chapitre.

Corollaire 9.3. *La fonction* ln *est concave sur* $\mathbb{R}_+^*$.

Démonstration. On a donc $\ln''(x) = -\dfrac{1}{x^2}$ qui est une fonction strictement négative sur $]0\,;+\infty[$. La fonction ln est donc concave sur $]0\,;+\infty[$. □

Corollaire 9.4. *Soit u une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I. La fonction* $\ln(u)$ *est alors dérivable sur I et* $(\ln(u))' = \dfrac{u'}{u}$.

Exemple : Soit la fonction f définie par $f : x \mapsto \ln(-5x+7)$. Déterminons son domaine de définition et ses variations.

La fonction ln est définie sur $]0\,;+\infty[$. Il faut donc que $-5x+7$ soit strictement positif :

$$-5x+7 > 0 \iff -5x > -7 \iff x < \frac{7}{5}.$$

f est donc définie sur $\left]-\infty\,;\dfrac{7}{5}\right[$. Dérivons à présent f afin d'obtenir ses variations. f est de la forme $\ln(u)$ avec $u(x) = -5x+7$. Puisque $u'(x) = -5$, on a

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = -\frac{5}{5x+7}.$$

f' est strictement négative sur $\left]-\infty\,;\dfrac{7}{5}\right[$ donc la fonction f est strictement décroissante sur $\left]-\infty\,;\dfrac{7}{5}\right[$.

Exercices : 9.1 à 9.10 ; 9.27 à 9.32.

9.3 Propriétés algébriques du logarithme

Proposition 9.4. *Soient a et b deux réels strictement positifs, n un entier relatif. On a :*

1. $\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$;
2. $\ln\left(\dfrac{1}{a}\right) = -\ln(a)$;
3. $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$;
4. $\ln(a^n) = n\ln(a)$;
5. $\ln(\sqrt{a}) = \dfrac{1}{2}\ln(a)$.

Remarques :

— Le logarithme transforme la multiplication en addition, la division en soustraction et la puissance en multiplication.

— L'exponentielle transforme l'addition en multiplication, la soustraction en division et la multiplication en puissance.

Démonstration. Soient a et b deux réels strictement positifs, n un entier relatif.

1. On a $\mathrm{e}^{\ln(ab)} = ab = \mathrm{e}^{\ln(a)}\mathrm{e}^{\ln(b)} = \mathrm{e}^{\ln(a)+\ln(b)}$ et donc $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$.
2. On a $a \times \dfrac{1}{a} = 1$ donc $\ln\left(a \times \dfrac{1}{a}\right) = \ln(1) = 0$. Par *1.* on obtient : $\ln(a) + \ln\left(\dfrac{1}{a}\right) = 0$ et donc $\ln\left(\dfrac{1}{a}\right) = -\ln(a)$.
3. On a $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln\left(a \times \dfrac{1}{b}\right) = \ln(a) + \ln\left(\dfrac{1}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$.
4. On a $\ln(a^n) = \ln(a \times a \times \cdots \times a) = \ln(a) + \ln(a) + \cdots + \ln(a) = n\ln(a)$.
5. On a d'une part $\ln\left((\sqrt{a})^2\right) = \ln(a)$ et d'autre part $\ln\left((\sqrt{a})^2\right) = 2\ln(\sqrt{a})$, donc $\ln(a) = 2\ln(\sqrt{a})$.

□

Exemples :

1. $\ln(10) = \ln(2 \times 5) = \ln(2) + \ln(5)$.
2. $\ln(25) = \ln(5^2) = 2\ln(5)$.
3. $\ln(16) - 2\ln(2) + \ln(8) = \ln(2^4) - 2\ln(2) + \ln(2^3) = 4\ln(2) - 2\ln(2) + 3\ln(2) = 5\ln(2)$.
4. $\ln(\sqrt{6}) = \dfrac{1}{2}\ln(6)$.

Exercices : 9.11 à 9.15 ; 9.33 à 9.35.

9.4 Croissances comparées

Proposition 9.5. *On a pour tout entier n strictement positif :*

1. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0^+$;

2. $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x\ln(x) = 0^-$;

3. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0^+$;

4. $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^n\ln(x) = 0^-$.

Démonstration.

1. On pose $X = \ln(x)$, on alors $x = \mathrm{e}^X$ et, comme $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$, $X \to +\infty$ lorsque $x \to \infty$. Ainsi
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = \lim_{X \to +\infty} \frac{X}{\mathrm{e}^X}.$$
Or, par croissance comparée, $\lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^X}{X} = +\infty$, donc
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0^+.$$
2. On pose $X = \dfrac{1}{x}$, on a alors $X \to +\infty$ lorsque $x \to 0^+$. Ainsi
$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x \ln(x) = \lim_{X \to +\infty} \frac{1}{X} \ln\left(\frac{1}{X}\right) = \lim_{X \to +\infty} -\frac{\ln(X)}{X} = 0^-$$
d'après 1.
3. Admis.
4. Admis.

$\square$

Exercices : 9.16 et 9.17 ; 9.36.

9.5 Capacités attendues

— Utiliser l'équation fonctionnelle de l'exponentielle ou du logarithme pour transformer une écriture, résoudre une équation, une inéquation.

— Dans le cadre d'une résolution de problème, utiliser les propriétés des fonctions exponentielle et logarithme.

9.6 Exercices

9.6.1 Progresser

Propriétés de la fonction logarithme

Exercice 9.1.

1. Compléter :

   (a) $\ln(1) = \dots$ (b) $\ln(\mathrm{e}) = \dots$ (c) $\ln(\mathrm{e}^{-0,5}) = \dots$ (d) $\mathrm{e}^{\ln(4)} = \dots$

2. Quel est l'ensemble de définition de la fonction ln ?
3. Donner le tableau de signes et le tableau de variations de ln.
4. Résoudre l'inéquation $\ln(x) < 0$.
5. Sans calculatrice, quel est le signe de

   (a) $\ln(3,1)$? (b) $\ln(0,9)$? (c) $\ln\left(\frac{9}{8}\right)$? (d) $\ln\left(\frac{6}{7}\right)$?

6. Sans faire de calculs, comparer :

   (a) $\ln(7)$ et $\ln(11)$ (b) $\ln\left(\frac{1}{5}\right)$ et $\ln\left(\frac{1}{6}\right)$ (c) $\ln(3)$ et $\ln(\mathrm{e})$.

Exercice 9.2. Déterminer les ensembles de définition des fonctions suivantes.

1. $f(x) = \ln(6x - 2)$.
2. $g(x) = \ln(2x + 3)$.
3. $h(x) = \ln(x^2 + 2x + 1)$.
4. $p(x) = \ln(x^2 - x - 6)$.

Exercice 9.3.

1. Résoudre les équations suivantes.

   (a) $\mathrm{e}^x = 1$. (b) $\mathrm{e}^x = 2$. (c) $\mathrm{e}^x = 0$. (d) $\ln(x) = 0$. (e) $\ln(x) = -2$.

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

   (a) $3\mathrm{e}^x + 2 = 14$. (b) $11 - \mathrm{e}^{2x+1} = 4$.

3. Résoudre dans $[0\,;+\infty[$ les équations suivantes.

   (a) $3\ln(x) = -6$. (b) $10 - 3\ln(4x) = 4$.

Exercice 9.4.

1. Résoudre les inéquations suivantes dans $\mathbb{R}$.

   (a) $e^x > 3$. (b) $e^{2x} < 7$. (c) $e^x + 1 > 5$.

2. Résoudre dans $]0\,;+\infty[$ les inéquations suivantes.

   (a) $\ln(x) \leqslant \ln(3x)$. (b) $1 + 2\ln(x) < 4$. (c) $\ln(x^2 + 9) > 0$.

Exercice 9.5.

1. Résoudre l'inéquation $4 - \ln(x) > 0$ et en déduire le signe de $4 - \ln(x)$ suivant les valeurs de x.
2. Après avoir déterminé les conditions d'existence déterminer le signe des expressions :

   (a) $\ln(x - 6)$. (b) $\ln(5 - 3x)$. (c) $\ln(4 - x) - 2$.

Exercice 9.6.

1. Calculer les dérivées des fonctions suivantes définies sur $]0;+\infty[$:

   (a) $f(x) = 3\ln(x)$.
   (b) $g(x) = -\ln(x)$.
   (c) $h(x) = \ln(x) + 5$.
   (d) $k(x) = \ln(x) + 2x$.
   (e) $m(x) = x\ln(x)$.
   (f) $p(x) = x\ln(x) - x$.

2. Soit la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = 2\ln(x) + 1$.
   (a) Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in]0;+\infty[$.
   (b) En déduire le sens de variation de f.
   (c) Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

Exercice 9.7. Déterminer les limites suivantes.

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} -5\ln(x)$.
2. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \ln(x) + 2$.
3. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} 2\ln(x) - 3$.
4. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} -\ln(x) + 3$.
5. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \ln(x) + x$.
6. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{\ln(x)}$.

Exercice 9.8. Soit la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = x - \ln(x)$.

1. Montrer que pour tout $x \in]0\,;+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{x-1}{x}$.
2. En déduire les variations de f.

Exercice 9.9. Étudier les variations de la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$ et étudier la limite en 0 de cette fonction.

Exercice 9.10. Soit la fonction g définie par $g(x) = \ln((3 - x)(1 + x))$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de g.
2. Calculer les limites de g aux bornes de son ensemble de définition et en déduire la présence d'éventuelles asymptotes à $\mathscr{C}_g$.
3. Étudier les variations de g.

Propriétés algébriques du logarithme

Exercice 9.11.

1. Exprimer $\ln(10)$ en fonction de $\ln(2)$ et $\ln(5)$.
2. Exprimer $\ln\left(\frac{7}{3}\right)$ en fonction de $\ln(7)$ et $\ln(3)$.
3. Exprimer $\ln(\sqrt{11})$ en fonction de $\ln(11)$.

Exercice 9.12. Écrire les réels suivants en utilisant une seule fois le symbole ln.

1. $\ln(2) + \ln(3) - \ln(5)$.
2. $5\ln(2) + \ln(8) - \ln(4)$.
3. $\ln\left(\frac{\mathrm{e}^2}{5}\right) + \ln(125)$.

Exercice 9.13. Utiliser les propriétés algébriques du logarithme pour résoudre, dans $]0\,;+\infty[$, les équations et inéquations suivantes.

1. $\ln(x) = \ln(3) + \ln(5)$.
2. $\ln(x) + \ln(6) = \ln(9)$.
3. $2\ln(x) = \ln(x) + \ln(3)$.
4. $\ln(x) + \ln(3x) > \ln(75)$
5. $2\ln(x) > -\ln\left(\frac{1}{4}\right)$.
6. $\ln(x) \leqslant 2\ln(2) + \ln(3)$.

Exercice 9.14. Résoudre les équations et inéquations suivantes.

1. $\ln(x+1) - \ln(x) = 1$.
2. $\ln(x+2) + \ln(x) = \ln(8)$.
3. $\ln(x+3) + \ln(2-x) \geqslant \ln(6)$.

Exercice 9.15.

1. Déterminer le plus petit entier n tel que $1,2^n > 10^6$.
2. Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $0,9^n \leqslant 0,1$.
3. Résoudre dans $\mathbb{N}$ l'inéquation $2^n - 10^{12} \geqslant 0$.

Croissances comparées

Exercice 9.16. Déterminer les limites suivantes.

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^3}$.
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^6}{\ln(x)}$.
3. $\lim\limits_{x\to0} \frac{\ln(x)}{x^4}$.
4. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{12}\ln(x)$.
5. $\lim\limits_{x\to0} x^3\ln(x)$.
6. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x^4)}{x+1}$.
7. $\lim\limits_{x\to0} x(\ln(x^5) - 1)$.
8. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 - \ln(x^2)$.
9. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x^3) - 3}{x^2+1}$.

Exercice 9.17. Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to0^+} \mathrm{e}^x\ln(x)$.
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{\mathrm{e}^x}$.
3. $\lim\limits_{x\to0^+} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}\ln(x)$.

9.6.2 Approfondir

Exercice 9.18. [Logarithme de base 10] On appelle logarithme de base 10 la fonction notée log et définie pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ par

$$\log(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)}.$$

1. Calculer $\log(1)$, $\log(10)$ et $\log(10^n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Déterminer les variations de la fonctions log.

Exercice 9.19. [Chimie] Pour quantifier l'acidité d'une solution, on mesure son potentiel Hydrogène (pH), lequel fait intervenir un logarithme de base 10 : $\text{pH} = -\log(C)$ où C est la concentration en ions hydrogène du liquide en $\text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$.

1. Quel est le pH d'une solution concentrée à $10^{-5}\text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$?
2. On dit qu'un liquide a un pH neutre lorsque son pH est compris entre 6,5 et 7,7. Donner un encadrement de la concentration en ions hydrogène pour un liquide de pH neutre.
3. Si le pH baisse de 1,079, par combien la concentration en ions hydrogène a-t-elle été multipliée ?

Exercice 9.20. [Physique] Le niveau de bruit d'une source sonore se mesure en décibels (dB). La formule qui donne le niveau de bruit en fonction de l'intensité I (en $\text{W} \cdot {}^{\text{m}-2}$) de la source est $N = 10 \log \left(\frac{I}{I_0}\right)$ où I_0 est l'intensité d'un bruit inaudible : $I_0 = 10^{-12}\text{W} \cdot {}^{\text{m}-2}$.

1. Quelle est l'intensité sonore d'un avion qui décolle avec un niveau de bruit de 120 dB ?
2. De combien de décibels le niveau de bruit augmente-t-il lorsque que l'intensité de la source double ?
3. Par combien faut-il multiplier l'intensité d'une source sonore pour que son niveau de bruit augmente de 10 dB ?

Exercice 9.21. [Physique et biologie] La proportion de carbone 14 contenue par un être vivant se met à décroître à la mort de celui-ci. La durée en année t écoulée depuis la mort de l'organisme peut être exprimée en fonction de la proportion C de carbone 14 dans ledit organisme au temps à l'aide de la formule : $t = \frac{1}{1,21 \times 10^{-4}} \ln\left(\frac{10^{-12}}{C}\right)$.

1. Depuis combien de temps un animal, dont la proportion en carbone 14 est $C = 2 \times 10^{13}$, est-il mort ?
2. Exprimer C en fonction de t.
3. Quelle proportion du carbone 14 initial reste-t-il dans le corps d'un être vivant mort depuis 10 000 ans ?
4. Si la quantité de carbone 14 dans un échantillon E_1 est le double de la quantité de carbone 14 dans un échantillon E_2, déterminer le temps écoulé entre la mort des deux êtres vivants à l'origine des deux échantillons.

Exercice 9.22. [Informatique] Dans les ordinateurs, les nombres sont représentés en notation binaire (ou base 2), i.e. uniquement avec des 0 et des 1. Le tableau ci-dessous donne la représentation binaire des premiers entiers en base 10.

Base 10	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Base 2	0	1	10	11	100	101	110	111	1000	1001	1010

Afin de connaître le nombre de chiffres binaires nécessaires à l'écriture d'un entier D strictement positif donné en base 10, on utilise la formule $B = \dfrac{\ln(D)}{\ln(2)} + 1$. On appelle partie entière de B le nombre entier $E(B)$ tel que $E(B) \leqslant B < E(B) + 1$. On admet que $E(B)$ est le nombre de chiffres nécessaires pour écrire D en binaire.

1. Calculer B pour les valeurs suivantes de D : 2, 4, 16, 18.
2. Combien de chiffres faut-il pour exprimer 12 en binaire ?
3. De combien de caractères l'écriture binaire de 2^{12} est-elle composée ?
4. Quels sont les nombres entiers positifs s'écrivant avec exactement cinq chiffres binaires ?

Exercice 9.23. [QCM : Métropole et Polynésie 2022] *Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Les cinq questions sont indépendantes.*

1. On considère la fonction g définie et dérivable sur $]0\,;+\infty[$ par : $g(x) = \ln\left(x^2 + x + 1\right)$. Pour tout nombre réel x strictement positif :

   (a) $g'(x) = \dfrac{1}{2x+1}$.

   (b) $g'(x) = \dfrac{1}{x^2+x+1}$.

   (c) $g'(x) = \ln(2x+1)$.

   (d) $g'(x) = \dfrac{2x+1}{x^2+x+1}$.

2. On considère la fonction g définie sur $]0\,;+\infty[$ par $g(x) = x^2[1 - \ln(x)]$. Parmi les quatre affirmations suivantes, laquelle est correcte ?

   (a) $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = +\infty$.

   (b) $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = -\infty$.

   (c) $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$.

   (d) La fonction g n'admet pas de limite en 0.

3. Les nombres entiers n solutions de l'inéquation $(0,2)^n < 0,001$ sont tous les nombres entiers n tels que :

   (a) $n \leqslant 4$. (b) $n \leqslant 5$. (c) $n \geqslant 4$. (d) $n \geqslant 5$.

4. La limite en $+\infty$ de la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{2\ln(x)}{3x^2+1}$ est égale à :

   (a) $\dfrac{2}{3}$. (b) $+\infty$. (c) $-\infty$. (d) 0.

Exercice 9.24. [Centre étranger, 2022] Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = x\ln(x) + 1$. On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère du plan.

1. Déterminer la limite de la fonction f en 0 ainsi que sa limite en $+\infty$.
2. (a) On admet que f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et on notera f' sa fonction dérivée. Montrer que pour tout réel x strictement positif : $f'(x) = 1 + \ln(x)$.
   (b) En déduire le tableau de variation de la fonction f sur $]0\,;+\infty[$. On y fera figurer la valeur exacte de l'extremum de f sur $]0\,;+\infty[$ et les limites.
   (c) Justifier que pour tout $x \in\,]0\,;1[\,,\ f(x) \in\,]0\,;1[$.
3. (a) Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1.
   (b) Étudier la convexité de la fonction f sur $]0\,;+\infty[$.
   (c) En déduire que pour tout réel x strictement positif : $f(x) \geqslant x$.
4. On définit la suite (u_n) par son premier terme u_0 élément de l'intervalle $]0\,;1[$ et pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = f(u_n)$.
   (a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a : $0 < u_n < 1$.
   (b) Déduire de la question 3. c. la croissance de la suite (u_n).
   (c) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

Exercice 9.25. [Limite usuelle] On cherche à déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$.

1. Soit $x \in \mathbb{R}^*$. On admet qu'il existe toujours $n \in \mathbb{N}^*$ suffisamment grand pour que $1 + \dfrac{x}{n} > 0$.
   (a) Démontrer que, pour n suffisamment grand, $\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n = \exp\left(x \times \dfrac{\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)}{\frac{x}{n}}\right)$.
   (b) Montrer que $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\ln(1+h)}{h} = 1$.
   (c) On pose $h = \dfrac{x}{n}$. Justifier alors que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \mathrm{e}^x$.
2. Étudier le cas $x = 0$.
3. Proposer un algorithme permettant de calculer une valeur approchée de e^4 à l'aide de ce résultat.

Exercice 9.26. [Fonction puissance] Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. On appelle **fonction puissance** de base α la fonction f définie, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, par $f(x) = \mathrm{e}^{\alpha\ln(x)}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose alors $f(x) = \alpha^x$.

1. Calculer $f(1)$ et $f(\mathrm{e})$.
2. Montrer que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Montrer que pour tous réels x_1 et x_2 strictement positifs, $f(x_1 \times x_2) = f(x_1) \times f(x_2)$.
4. Si $\alpha \in \mathbb{N}^*$, quel type de fonction retrouve-t-on ?
5. Montrer que cette définition permet écrire que, pour tout $x > 0$, $x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$.

9.6.3 S'entraîner

Propriétés de la fonction logarithme

Exercice 9.27. Déterminer les ensembles de définition des fonctions suivantes.

1. $f(x) = \ln(3x^2 + 5x + 2)$.
2. $g(x) = \ln\left(\mathrm{e}^2 - \dfrac{1}{2}x^2\right)$.

Exercice 9.28.

1. Résoudre chacune des équations suivantes.

   (a) $\ln(2x + 3) = \ln(x)$. (b) $2\ln(x) + 1 = 7$. (c) $3\mathrm{e}^x + 2 = 8$.

2. Résoudre chacune des inéquations suivantes.

   (a) $5\ln(x) < 10$. (b) $5 - 2\ln(x) \geqslant -1$. (c) $\mathrm{e}^{x-3} > 5$.

Exercice 9.29. Donner le tableau de signes de la fonction g définie sur $]0\,;+\infty[$ par $g(x) = (5 - x)\ln(x)$.

Exercice 9.30. Soit la fonction f définie sur $]0\,;1[$ par $f(x) = \dfrac{x+2}{\ln(x)}$. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition et montrer que la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de f admet une asymptote verticale dont on donnera l'équation.

Exercice 9.31. Soit la fonction g définie par $g(x) = \ln\left(\dfrac{2x+3}{x-2}\right)$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de g.
2. Calculer les limites de g aux bornes de son ensemble de définition et en déduire la présence d'éventuelles asymptotes à $\mathscr{C}_g$.
3. Étudier les variations de g.

Exercice 9.32. Soit la fonction g définie par $g(x) = \ln\left(\dfrac{2x}{x-3}\right)$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de g.
2. Calculer les limites de g aux bornes de son ensemble de définition et en déduire la présence d'éventuelles asymptotes à $\mathscr{C}_g$.
3. Étudier les variations de g.

Propriétés algébriques du logarithme

Exercice 9.33.

1. Exprimer en fonction de $\ln(2)$ et $\ln(3)$ les expressions suivantes.

   (a) $\ln(6)$.
   (b) $\ln\left(\dfrac{2}{3}\right)$
   (c) $\ln(2^5 \times 3^7)$.
   (d) $\ln\left(\dfrac{1}{12}\right)$.
   (e) $\ln(72)$.
   (f) $\ln\left(\dfrac{3\mathrm{e}^2}{2}\right)$.

2. Simplifier l'expression $A = \ln(\sqrt{3}-1) + \ln(\sqrt{3}+1)$.

Exercice 9.34.

1. Le parc Safari a reçu 3,5 millions de visiteurs cette année. On suppose qu'à partir de l'an prochain, la fréquentation de ce parc va diminuer de 2% par an. À partir de quelle année le parc Safari recevra-t-il moins de 3 millions de visiteurs ?
2. Le parc des Amis a reçu 1,7 million de visiteurs cette année. On suppose qu'à partir de l'an prochain, la fréquentation de ce parc va augmenter de $2,5\%$ par an. À partir de quelle année le parc des Amis recevra-t-il plus de 2,2 millions de visiteurs ?
3. À partir de quelle année le parc des Amis recevra-t-il plus de visiteurs que le parc Safari ?

Exercice 9.35. On considère ci-contre le script d'une fonction Python.

1. Compléter ce programme afin que `seuil()` retourne le plus petit entier naturel n_0 tel que $1,08^n \geqslant 10^4$.
2. Déterminer cet entier n_0 en résolvant une inéquation.

```
def seuil( ) :
    n = 0
    while .............. :
        n = .........
    return .........
```

Croissances comparées

Exercice 9.36. Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 - \ln(x)$.
2. $\lim\limits_{x\to 0^+} x^2(\ln(x^2)+1)$.
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} x - x\ln(x^3)$.

9.6.4 Le Flashback !

Flashback 9.1. Soient $A\,(-1\,;1\,;2)$, $B\,(1\,;2\,;0)$, $C\,(-3\,;0\,;1)$ et $D\,(2\,;1\,;0)$. Montrer que A, B et C forment un plan puis déterminer les coordonnées du projeté orthogonal de D sur celui-ci.