Chapitre 4

Limites de suites

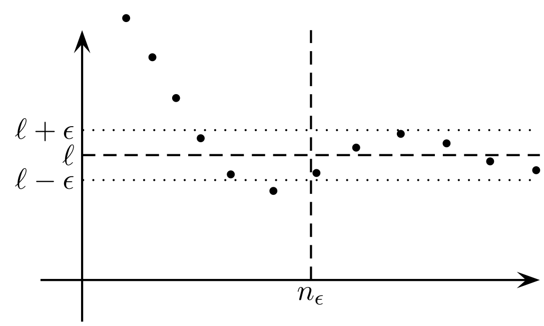
4.1 Suites convergentes et divergentes

4.1.1 Suite convergente

Définition 4.1. *On dit qu'une suite (u_n) a pour* ***limite*** *un réel ℓ lorsque tout réel positif ϵ, l'intervalle $]\ell-\epsilon\,;\ell+\epsilon[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang :*

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists n_\epsilon \in \mathbb{N} \ / \ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_\epsilon \implies |u_n - \ell| < \epsilon.$$

On note $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$.



Remarque : on peut aussi reformuler de la façon suivante : aussi petite soit la distance ϵ, on peut trouver un rang n_ϵ (dépendant de ϵ) tel que pour tout $n \geqslant n_\epsilon$, les termes de la suite (u_n) soient à une distance inférieure à ϵ de la limite ℓ : $|u_n - \ell| < \epsilon$.

Remarque : on a bien : $u_n \in \,]\ell-\epsilon\,;\ell+\epsilon[\iff |u_n-\ell| < \epsilon$. En effet,

$$\begin{aligned} |u_n - \ell| < \epsilon &\iff -\epsilon < u_n - \ell < \epsilon \\ &\iff \ell - \epsilon < u_n < \ell + \epsilon \\ &\iff u_n \in \,]\ell-\epsilon\,;\ell+\epsilon[\,. \end{aligned}$$

Proposition 4.1. ***[Admise]*** *La limite d'une suite, lorsqu'elle existe, est unique.*

Définition 4.2.

1. *Une* ***suite convergente*** *est une suite qui a pour limite un nombre réel ℓ. On dit aussi que la suite* ***converge vers*** *ℓ.*
2. *Une* ***suite divergente*** *est une suite qui ne converge pas (donc sans limite ou admettant $+\infty$ ou $-\infty$ pour limite).*

Exemple : Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \dfrac{1}{n}$. Montrons que la suite (u_n) a pour limite 0. Soit $\epsilon > 0$, cherchons les entiers naturels n tels que $u_n \in \left]0-\epsilon\,;0+\epsilon\right[= \left]-\epsilon\,;\epsilon\right[$:

$$u_n \in \left]-\epsilon\,;\epsilon\right[\iff -\epsilon < \frac{1}{n} < \epsilon \iff n > \frac{1}{\epsilon}.$$

Il suffit de prendre n_ϵ un entier supérieur à $\dfrac{1}{\epsilon}$, par exemple $E\left(\dfrac{1}{\epsilon}\right)+1$ (E désigne la partie entière). À partir de cet entier, tous les termes de la suite appartiennent à $\left]-\epsilon\,;\epsilon\right[$. (u_n) converge donc vers 0.

Exemples :

1. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^k} = 0,\ k \in \mathbb{N}^*.$
2. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0.$
3. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{-n} = 0.$

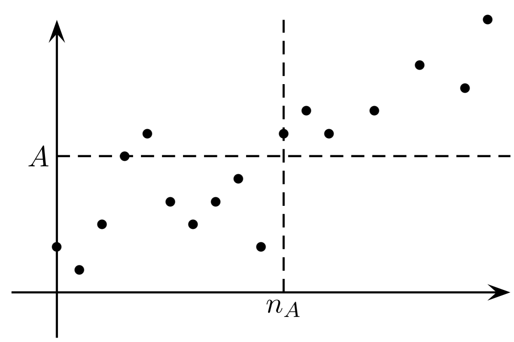
4.1.2 Suite divergente

Limite infinie

Définition 4.3. *On dit qu'une suite (u_n) a pour **limite** $+\infty$ lorsque, pour tout réel positif A, l'intervalle $[A\,;+\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang :*

$$\forall A > 0,\ \exists n_A \geqslant 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_A \implies u_n \geqslant A.$$

On note $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.



Remarque : on peut aussi reformuler de la façon suivante : aussi grand que soit seuil A, on peut trouver un rang n_A (dépendant de A) tel que pour tout $n \geqslant n_A$, les termes de la suite (u_n) soient au dessus du seuil A : $u_n \geqslant A$.

Exemple : Soit la suite (u_n) définie par $u_n = n^2$. Montrons que (u_n) tend vers $+\infty$. Soit A un réel. Cherchons les entiers n tels que u_n appartiennent à $]A\,;+\infty[$:

$$u_n \in \left]A\,;+\infty\right[\iff u_n > A \iff n^2 > A \iff n > \sqrt{A}.$$

Soit alors n_A un entier plus grand que $\sqrt{A}$, par exemple $E\left(\sqrt{A}\right)+1$. À partir du rang n_A, on a $u_n > A$. (u_n) diverge donc vers $+\infty$: $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Définition 4.4. *On dit qu'une suite (u_n) a pour **limite** $-\infty$ lorsque, pour tout réel positif A, l'intervalle $]-\infty\,;A[$ contient tous les termes de la suite à partir à partir d'un certain rang :*

$$\forall A < 0,\ \exists n_A \geqslant 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_A \implies u_n \leqslant A.$$

On note $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Exemples :

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} n^k = +\infty,\ k \in \mathbb{N}^*.$
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty.$
3. $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{e}^n = +\infty.$

Absence de limite

Une suite peut diverger sans pour autant tendre vers $\pm\infty$ si elle n'a pas de limite.

Exemple : la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = (-1)^n$ n'a pas de limite. On a deux cas :

— si n est pair, $u_n = 1$;

— si n est impair, $u_n = -1$.

La suite oscille constamment entre les valeurs -1 et 1, il n'existe aucun ℓ tel que pour tout ϵ, tous les termes de la suite appartiennent à l'intervalle $]\ell - \epsilon\,;\ell + \epsilon[$ à partir d'un certain rang. Elle ne converge donc pas. Par ailleurs, il est évident qu'elle ne diverge pas vers $\pm\infty$.

Exemples : les suites de termes généraux $\cos(n)$ et $\sin(n)$ n'ont pas de limites.

Exercices : 4.1 à 4.5 ; 4.28 à 4.31.

4.2 Opérations sur les limites

Tous les résultats suivants sont admis. Soient (u_n) et (v_n) deux suites convergentes ou divergeant vers l'infini. Soient ℓ_1 et ℓ_2 deux nombres réels.

4.2.1 Limite d'une somme

$\lim u_n$	ℓ_1			$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim v_n$	ℓ_2	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim(u_n + v_n)$	$\ell_1 + \ell_2$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I.

Exemple : Soit la suite (v_n) définie par $v_n = n^2 + \dfrac{1}{n}$.

— $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty.$

— $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0.$

Par somme de limites, $\lim\limits_{n\to+\infty} 3n^2 + \dfrac{1}{n} = +\infty.$

Remarque : F.I. signifie « Forme Indéterminée ». On ne peut pas conclure le calcul de limite : tous les résultats sont possibles. Voici trois exemples où $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ donnent trois résultats différents :

1. Si $u_n = 2n$ et $v_n = -n$. On a $u_n + v_n = n$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n + v_n = +\infty$.
2. Si $u_n = n$ et $v_n = -n$. On a $u_n + v_n = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n + v_n = 0$.
3. Si $u_n = n$ et $v_n = -2n$. On a $u_n + v_n = -n$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n + v_n = -\infty$.

Exercice : 4.6.

4.2.2 Limite d'un produit

$\lim u_n$	ℓ_1	$\ell_1 > 0$		$\ell_1 < 0$		$+\infty$		$-\infty$	0
$\lim v_n$	ℓ_2	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
$\lim(u_n \times v_n)$	$\ell_1 \times \ell_2$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I.

Exemple : Soit $u_n = -5n^2\sqrt{n}$.

- $\lim\limits_{n\to+\infty} -5n^2 = -\infty$.
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$.

Donc par produit de limites : $\lim\limits_{n\to+\infty} -5n^2\sqrt{n} = -\infty$.

Remarque : Comme pour la somme, on peut avoir des formes indéterminéées. Voici trois exemples où $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ donnent trois résultats différents :

1. Si $u_n = n^2$ et $v_n = \dfrac{1}{n}$. On a $u_n \times v_n = n$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \times v_n = +\infty$.
2. Si $u_n = n$ et $v_n = \dfrac{1}{n}$. On a $u_n \times v_n = 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \times v_n = 1$.
3. Si $u_n = n$ et $v_n = \dfrac{1}{n^2}$. On a $u_n \times v_n = \dfrac{1}{n}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \times v_n = 0$.

Exercice : 4.7.

4.2.3 Limite d'un quotient

Dans les tableaux suivants :

- 0^+ désigne une convergence vers 0 par valeurs positives ;
- 0^- désigne une convergence vers 0 par valeurs négatives.

Cas où la limite de (v_n) n'est pas nulle

$\lim u_n$	ℓ_1		$+\infty$		$-\infty$		$\pm\infty$
$\lim v_n$	$\ell_2 \neq 0$	$\pm\infty$	$\ell_2 > 0$	$\ell_2 < 0$	$\ell_2 > 0$	$\ell_2 < 0$	$\pm\infty$
$\lim \dfrac{u_n}{v_n}$	$\dfrac{\ell_1}{\ell_2}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I.

Cas où la limite de (v_n) est nulle

$\lim u_n$	$\ell_1 > 0$ ou $+\infty$	$\ell_1 < 0$ ou $-\infty$	0
$\lim v_n$	$0^{\pm}$	$0^{\pm}$	0
$\lim \dfrac{u_n}{v_n}$	$\pm\infty$	$\mp\infty$	F.I.

Exemples :

1. Soit la suite (u_n) définie par : $u_n = \dfrac{-1 + \frac{2}{n}}{3\sqrt{n}}$.

   — $\lim\limits_{n\to+\infty} -1 + \dfrac{2}{n} = -1$.

   — $\lim\limits_{n\to+\infty} 3\sqrt{n} = +\infty$.

   Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0^-$.

2. Soit la suite (v_n) définie par : $v_n = \dfrac{-7n^2}{-\frac{1}{n}}$.

   — $\lim\limits_{n\to+\infty} -7n^2 = -\infty$.

   — $\lim\limits_{n\to+\infty} -\dfrac{1}{n} = 0^-$.

   Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

Exercices : 4.8 à 4.13 ; 4.32 à 4.34.

4.3 Théorèmes de comparaison

4.3.1 Théorèmes

Théorème 4.1. *Soient (u_n) et (v_n) deux suites telles que, à partir d'un certain rang, $u_n \leqslant v_n$.*

1. *Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.*
2. *Si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.*

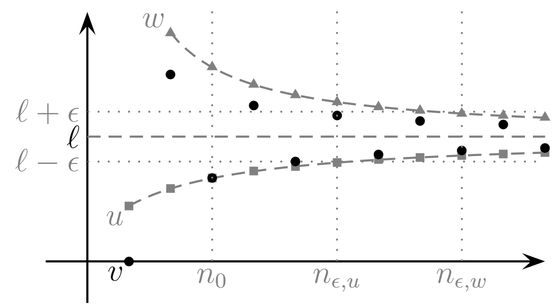
Démonstration.

1. Par hypothèse il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n \leqslant v_n$. De plus si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ alors par définition pour tout réel A, il existe n_A tel que pour tout $n \geqslant n_A$, $u_n \geqslant A$. Donc en choisissant $N = \max(n_0 ; n_A)$ on a les deux propriétés vérifiées. Ainsi pour tout réel A, il existe N tel que pour tout $n \geqslant N$, $v_n \geqslant u_n \geqslant A$, i.e. $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.
2. Exercice.

□

Théorème 4.2. ***[Admis]*** *Soient (u_n) et (v_n) deux suites convergeant respectivement vers ℓ_1 et ℓ_2. Si à partir d'un certain rang, $u_n \leqslant v_n$, alors on a $\ell_1 \leqslant \ell_2$.*

Théorème 4.3. ***[Théorème des gendarmes]*** *Soient (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites telles que à partir d'un certain rang n_0, on ait $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$. Si (u_n) et (w_n) convergent vers une même limite ℓ, alors (v_n) converge aussi vers ℓ.*



Exemple : On cherche à déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{\sin(n)}{n}\right)$. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on a

$$\begin{aligned} -1 \leqslant \sin(n) \leqslant 1 &\iff \frac{-1}{n} \leqslant \frac{\sin(n)}{n} \leqslant \frac{1}{n} \\ &\iff 1-\frac{1}{n} \leqslant 1+\frac{\sin(n)}{n} \leqslant 1+\frac{1}{n}. \end{aligned}$$

En posant :

— $u_n = 1-\dfrac{1}{n}$,

— $v_n = 1-\dfrac{\sin(n)}{n}$,

— $w_n = 1+\dfrac{1}{n}$,

on a pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$. Par ailleurs, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n} = 0$ et donc

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} w_n = 1.$$

Les hypothèses du théorème des gendarmes sont vérifiées, on a donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{\sin(n)}{n}\right) = 1$.

Démonstration. Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ le rang à partir duquel $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$, autrement dit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $n \geqslant n_0$, alors $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$. On en déduit que pour $n \geqslant n_0$,

$$u_n - \ell \leqslant v_n - \ell \leqslant w_n - \ell.$$

Soit $\epsilon > 0$, ils existent $n_{\epsilon,u} \in \mathbb{N}$ et $n_{\epsilon,w} \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

— $n \geqslant n_{\epsilon,u} \implies |u_n - \ell| < \epsilon$,

— $n \geqslant n_{\epsilon,w} \implies |w_n - \ell| < \epsilon$.

En particulier, on a

— $n \geqslant n_{\epsilon,u} \implies -\epsilon < u_n - \ell$,

— $n \geqslant n_{\epsilon,w} \implies w_n - \ell < \epsilon$.

Posons $N = \max(n_0\,; n_{\epsilon,u}\,; n_{\epsilon,w})$. Pour tout $n \geqslant N$, on a alors

$$-\epsilon < u_n - \ell \leqslant v_n - \ell \leqslant w_n - \ell < \epsilon$$

et donc en particulier $-\epsilon \leqslant v_n - \ell < \epsilon$, autrement dit

$$|v_n - \ell| < \epsilon.$$

Donc la suite (v_n) converge vers ℓ. □

Exercices : 4.14 à 4.19 ; 4.35 à 4.38.

4.3.2 Cas de la suite (q^n)

Proposition 4.2. *Soit q un nombre réel.*

— *Si $q < -1$ alors la suite (q^n) diverge.*

— *Si $-1 < q < 1$ alors la suite (q^n) converge vers 0.*

— *Si $q = 1$ la suite (q^n) est constante et converge vers 1.*

— *Si $q > 1$ alors la suite (q^n) tend vers $+\infty$.*

Démonstration. Démontrons que si $q > 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$.

Première étape : on démontre par récurrence que, si a est un nombre réel strictement positif, alors, pour tout entier n, on a $(1+a)^n \geqslant 1 + na$.

- Initialisation : pour $n = 0$, $(1+a)^n = 1$ et $1 + na = 1$, donc l'inégalité est vraie au rang 0.
- Hérédité : on suppose que pour un entier naturel n, on ait $(1+a)^n \geqslant 1 + na$. On a : $(1+a)^{n+1} = (1+a)^n \times (1+a)$, et $1 + a > 0$, donc :

$$\begin{aligned}(1+a)^n &\geqslant 1 + na\\ (1+a)^n \times (1+a) &\geqslant (1+na) \times (1+a)\\ (1+a)^{n+1} &\geqslant 1 + (n+1)a + a^2.\end{aligned}$$

Or, un carré étant positif, $1 + (n+1)a + a^2 \geqslant 1 + (n+1)a$, donc

$$(1+a)^{n+1} \geqslant 1 + (n+1)a.$$

L'inégalité est vraie au rang $n+1$, donc la propriété est héréditaire.

Finalement, pour tout entier naturel n, on a $(1+a)^n \geqslant 1 + na$.

Deuxième étape : $q > 1$, donc q peut s'écrire $q = 1 + a$, avec $a > 0$. D'après la première étape, on a, pour tout entier naturel n, $(1 + a)^n \geqslant 1 + na$, et puisque $a > 0$,

$$\lim_{n\to+\infty} 1 + na = +\infty.$$

Donc, par théorème de comparaison, on a $\lim_{n\to+\infty} (1 + a)^n = +\infty$, c'est à dire

$$\lim_{n\to+\infty} q^n = +\infty.$$

□

Exercice : 4.20

4.4 Convergence et suites monotones

4.4.1 Suites majorées, minorées, bornées

Définition 4.5. *Soit $n_0 \in \mathbb{N}$.*

- *La suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ est dite* ***majorée*** *si il existe un réel M tel que pour tout entier $n \geqslant n_0$, on ait $u_n \leqslant M$.*
- *La suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ est dite* ***minorée*** *si il existe un réel m tel que pour tout entier $n \geqslant n_0$, on ait $u_n \geqslant m$.*
- *La suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ est dite* ***bornée*** *si elle est majorée et minorée.*

Exemple :

- La suite (u_n) définie par $u_n = \cos(n)$ est minorée par -1 et majorée par 1, elle est donc bornée.
- Soit (u_n) définie par $u_n = 1 - n^2$ est majorée par 1.

4.4.2 Convergence et suites monotones

Proposition 4.3. ***[Admise]***

1. *Toute suite croissante majorée est convergente.*
2. *Toute suite décroissante minorée est convergente.*

Exemple : Soit (u_n) la suite définie par

$$u_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}.$$

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{(n+1)^2}$, donc $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$. Donc la suite (u_n) est croissante.

— Pour tout $k \in \{2\,; \cdots; n\}$,

$$\frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}.$$

On en déduit que

$$u_n \leqslant 1 + \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right),$$

donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n \leqslant 1 + 1 - \frac{1}{n} \leqslant 2.$$

La suite (u_n) est donc majorée par 2.

La suite (u_n) est croissante et majorée, donc elle converge.

4.4.3 Divergence et suites monotones

Proposition 4.4.

1. *Toute suite croissante non majorée admet pour limite $+\infty$.*
2. *Toute suite décroissante non minorée admet pour limite $-\infty$.*

Démonstration.

1. Soit A un réel. (u_n) est non majorée, donc il existe un entier n_A tel que $u_{n_A} \geqslant A$. De plus (u_n) est croissante, donc pour tout entier $n \geqslant n_A$, on a $u_n \geqslant u_{n_A} \geqslant A$. Donc, tout intervalle de la forme $[A\,; +\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.
2. Exercice.

□

Exercices : 4.21 à 4.24 ; 4.39 à 4.41.

4.5 Capacités attendues

— Établir la convergence d'une suite, ou sa divergence vers $+\infty$ ou $-\infty$.

— Raisonner par récurrence pour établir une propriété d'une suite.

— Étudier des phénomènes d'évolution modélisables par une suite.

4.6 Exercices

4.6.1 Progresser

Suites convergentes et divergentes

Exercice 4.1. Soit (w_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $w_n = 2 + \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

1. Déterminer le plus petit entier n_ϵ tel que $n \geqslant n_0 \implies w_n \in]1,99\,;2,01[$.
2. Soit $\epsilon > 0$ un réel, déterminer le plus petit entier n_ϵ tel que $n > n_\epsilon \implies w_n \in]2-\epsilon\,;2+\epsilon[$.
3. En déduire la limite la suite (w_n).

Exercice 4.2. Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 3n - 4$.

1. Déterminer le plus petit n_A tel que pour tout $n \geqslant n_A$, on a $u_n \geqslant 100$, puis $u_n \geqslant 1\,000$.
2. Même question pour un réel A quelconque.
3. En déduire la limite de la suite (u_n).

Exercice 4.3. Soit (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = -5n^2$.

1. Déterminer le plus petit n_A tel que pour tout $n \geqslant n_A$, on a $v_n \leqslant -720$, puis $v_n \leqslant -3\,125$.
2. Même question pour un réel A quelconque.
3. En déduire la limite de la suite (v_n).

Exercice 4.4. Que fait l'algorithme suivant ?

Algorithme 1 : Recherche de seuil

$n \leftarrow 1$
$u \leftarrow 1$
Tant que $u > 0.001$ **:**
    $n \leftarrow n + 1$
    $u \leftarrow 1/n^2$
Renvoyer : n

Exercice 4.5. [Démonstration] Soient (u_n) une suite et $\ell \in \mathbb{R}$. Démontrer en utilisant la définition d'une limite que :

1. si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} -u_n = -\infty$;
2. si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} -u_n = -\ell$.

Opérations sur les limites

Exercice 4.6. [Sommes de limites] Déterminer les limites des suites suivantes lorsque n tend vers $+\infty$.

1. $u_n = n$.
2. $v_n = -n^3$.
3. $w_n = \dfrac{1}{n^4}$.
4. $x_n = -\dfrac{1}{\sqrt{n}}$.
5. $y_n = 67n^2$.
6. $a_n = n^2 + 5$.
7. $b_n = \dfrac{1}{n} + 3$.
8. $c_n = -n^5 - 12$.
9. $d_n = \dfrac{5}{n^2}$.
10. $e_n = \dfrac{1}{n+1}$.
11. $f_n = -7 - \dfrac{1}{n^2}$.
12. $g_n = -n^2 - n$.

Exercice 4.7. [Produits de limites] Déterminer les limites de chacune des suites ci-dessous.

1. $a_n = \left(2 + \dfrac{1}{n}\right)\left(-4 - \dfrac{8}{n^2}\right)$.
2. $b_n = \left(-2 - \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)(5 + n^2)$.
3. $c_n = \dfrac{4}{n^2}\left(-8 - \dfrac{1}{n^3}\right)$.
4. $d_n = 75n^2\left(7 - n^3\right)$.
5. $e_n = (-n^3 + 3)\left(-5 + \dfrac{1}{n^2}\right)$.
6. $f_n = (-56n + 1)(-\sqrt{n} + 12)$.

Exercice 4.8. [Quotients de limites] Déterminer les limites de chacune des suites ci-dessous.

1. $a_n = \dfrac{-5 - \dfrac{5}{n}}{-20 + n}$.
2. $b_n = \dfrac{7n^2}{3 - \dfrac{1}{n}}$.
3. $c_n = \dfrac{8 + \dfrac{1}{n^2}}{-2 - \dfrac{1}{n^2}}$.
4. $d_n = \dfrac{\dfrac{1}{n}}{-n^3 - 5}$.
5. $e_n = \dfrac{-9n^2 + 2}{-2 + \dfrac{1}{n^2}}$.
6. $f_n = \dfrac{\dfrac{1}{n^3} + \dfrac{1}{\sqrt{n}}}{3 - \dfrac{1}{\sqrt{n}}}$.
7. $g_n = \dfrac{6}{\frac{1}{n^2}}$.
8. $h_n = \dfrac{5 + \dfrac{1}{n}}{\frac{1}{n}}$.
9. $j_n = \dfrac{-n^2}{\frac{1}{\sqrt{n}}}$.
10. $k_n = \dfrac{-n^6}{-\frac{1}{n^2}}$.

Exercice 4.9. [Forme indéterminée : polynôme] Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par

$$u_n = -n^3 - 3n^2 + 2n - 1.$$

1. Peut-on calculer directement la limite de (u_n) ?
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_n = n^3\left(-1 - \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2} - \frac{1}{n^3}\right).$$

3. En déduire la limite de (u_n).

Exercice 4.10. [Forme indéterminée : quotient] Soit la suite (v_n) définie par

$$v_n = \frac{5n^3 - n^2}{-2n + 1}.$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
$$v_n = n^2 \frac{5 - \frac{1}{n}}{-2 + \frac{1}{n}}.$$
2. Calculer $\lim_{n \to +\infty} v_n$.

Exercice 4.11. [Python] Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_n = -n^2 + n + 1$.

1. Montrer que (u_n) diverge et donner sa limite ℓ.
2. Compléter le script Python ci-dessous afin qu'il renvoie la première valeur de n telle que $u_n \leqslant -1\,000$.

```
n = .....
u = .....
while .............. :
     n = .........
     u = ..................

print(.....)
```

Exercice 4.12. [Formes indéterminées] Calculer les limites des suites suivantes en levant l'indétermination.

1. $u_n = 3n^4 - 2n^2 + n - 1$.
2. $v_n = -4n^3 + 4n^2 - 1$.
3. $w_n = \dfrac{-4n^2 + n - 1}{n + 3}$.
4. $h_n = \dfrac{6n^2 - 2n}{-2n^2 + 5}$.
5. $o_n = \dfrac{5n - 1}{7n^2 + 3n - 8}$.

Exercice 4.13. [Formes indéterminées] Donner des exemples de suites (u_n) et (v_n) convergeant vers 0 de façon à ce que l'on ait :

1. $\lim_{n\mapsto+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = +\infty$;
2. $\lim_{n\mapsto+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 1$;
3. $\lim_{n\mapsto+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 0$.

Théorèmes de comparaison

Exercice 4.14.

1. Soit (u_n) telle que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \geqslant n^2 - 27$. Déterminer la limite de (u_n).
2. Soit (v_n) telle que pour tout $n \in \mathbb{N}, v_n \leqslant -3n + 5\,000$. Déterminer la limite de (v_n).

Exercice 4.15. Soit (v_n) une suite telle que pour tout entier naturel n non nul,

$$2 - \frac{3}{n+1} \leqslant v_n \leqslant 2 - \frac{1}{n}.$$

Déterminer la limite de (v_n).

Exercice 4.16. Étudier la limite des suites suivantes à l'aide du théorème des gendarmes.

1. $u_n = \dfrac{\sin(n)}{n}$.
2. $h_n = 6 + \dfrac{(-1)^n}{n}$.
3. $v_n = \dfrac{1 - 2\cos(2n)}{n} + 3$.
4. $w_n = \dfrac{2n + \sin(n)}{n-1}$.

Exercice 4.17. Soit (s_n) la suite définie par $s_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $s_{n+1} = s_n^2 + s_n + 4$. Prouver par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}, s_n \geqslant n$. En déduire la limite de la suite (s_n).

Exercice 4.18. (t_n) est la suite définie par $t_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $t_{n+1} = t_n + n$

1. Justifiez que (t_n) est croissante.
2. Démontrer par l'absurde que la suite (t_n) n'est pas majorée.
3. Déterminer la limite de (t_n).

Exercice 4.19. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$.
2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}*$, $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$.
3. Quelle est la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

Cas de la suite (q^n)

Exercice 4.20. Déterminer les limites des suites suivantes (si elles existent).

1. $u_n = 5^n$.
2. $v_n = (0,3)^n$.
3. $w_n = (-4)^n$.
4. $x_n = (-0,5)^n$.
5. $y_n = -0,5 \times (1,2)^n$.
6. $z_n = -1000 \times (0,9)^n + 1$.
7. $a_n = \dfrac{4}{5}\left(\dfrac{9}{10}\right)^n - 6$.
8. $b_n = -5\pi^n + 12$.
9. $c_n = \dfrac{-n}{\left(\dfrac{3}{4}\right)^n}$.
10. $d_n = \dfrac{\left(\dfrac{3}{5}\right)^n}{\left(\dfrac{3}{2}\right)^n}$.

Convergence et suites monotones

Exercice 4.21. Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + 1$.

1. Montrer par récurrence que (u_n) est majorée par 2 puis que (u_n) est croissante. En conclure la convergence de la suite (u_n).
2. Montrer que la suite (v_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}, v_n = u_n - 2$ est une suite géométrique.
3. En déduire l'expression de v_n en fonction, de n.
4. Étudier la limite de la suite (v_n) en déduire la limite de la suite (u_n).

Exercice 4.22. Soit f une fonction croissante sur $\mathbb{R}$ telle que $f(30) = 38$ et $f(50) = 50$. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 30$ et pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 50$
2. En déduire que (u_n) converge vers un réel ℓ.

Exercice 4.23. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0,4$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n - u_n^2$.

1. Conjecturer la monotonie, un majorant ou un minorant de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Déterminer une fonction f telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
3. Donner les variations de f sur $\left[0\,;\dfrac{1}{2}\right]$.
4. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{2}$.
5. En déduire la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 4.24. [Python] On considère la suite (u_n) définie par $u_n = 1 + \dfrac{(-1)^n}{n}$.

1. Montrer que (u_n) converge et donner sa limite ℓ.
2. Écrire une script Python donnant le premier entier n tel que $|u_n - \ell| < 0,001$.

4.6.2 Approfondir

Exercice 4.25. La Multinationale a prévu de réduire ses émissions de CO_2 de 6% chaque année. En 2020, elle émet 45 000 tonnes de CO_2. On note u_n le nombre de tonnes de CO_2 émis par l'entreprise en $2020 + n$, avec $n \in \mathbb{N}$. Ainsi, $u_0 = 45\,000$.

1. Quelle est la nature de la suite ? Exprimer u_n en fonction de n.
2. Quelle est la tendance à long terme des émissions de CO_2 de cette entreprise ?
3. On note S_n le nombre total de tonnes de CO_2 émit par l'entreprise de 2020 à $2020 + n$. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

Exercice 4.26. [Suites adjacentes] Deux suites (u_n) et (v_n) sont dites **adjacentes** lorsque l'une est croissante, l'autre décroissante et que $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0$.

Montrons que si (u_n) et (v_n) sont **adjacentes**, alors elles convergent vers la même limite. Pour cela, supposons (u_n) croissante, (v_n) décroissante et $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0$.

1. (a) Montrer que $(u_n - v_n)$ est décroissante.
   (b) En déduire, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \leqslant v_n$.
2. Montrons que (u_n) et (v_n) convergent.
   (a) Montrer que (u_n) est majorée.
   (b) En déduire que (u_n) converge.
   (c) Avec un raisonnement analogue, faire de même pour v_n.
3. (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite. On note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell_1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell_2$.
   (a) Exprimer en fonction de ℓ_1 et ℓ_2 $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - v_n)$.
   (b) En déduire que $\ell_1 = \ell_2$. Conclure.
4. **[Application]** Soient (u_n) et (v_n) deux suites définies pour tout entier $n \geqslant 1$ par

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \qquad \text{et} \qquad v_n = u_n + \frac{1}{n! \times n}.$$

   (a) Montrer que (u_n) et (v_n) sont adjacentes.
   (b) Compléter l'algorithme suivant afin qu'il détermine une valeur approchée à 10^{-6} de la limite de (u_n) et (v_n).

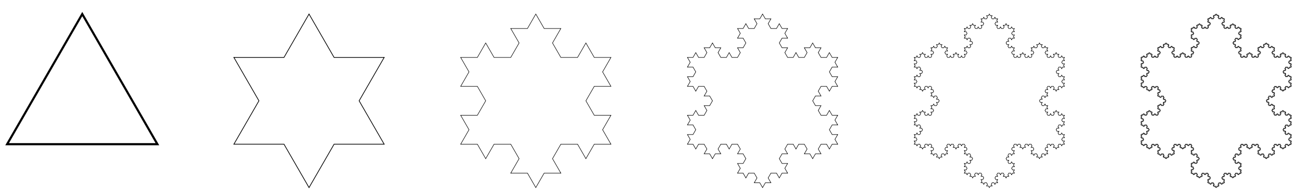
Algorithme 2 : Approximation

$n \leftarrow \ldots\ldots$
$u \leftarrow \ldots\ldots$
$v \leftarrow \ldots\ldots$
Tant que $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ **:**
    $n \leftarrow \ldots\ldots\ldots\ldots$
    $u \leftarrow \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
    $v \leftarrow \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
Renvoyer : $\ldots\ldots$

   (c) Programmer cet algorithme en Python sur la calculatrice ou l'ordinateur et déterminer cette valeur. À quoi fait-elle penser ?

Exercice 4.27. [Flocon de Koch] Le flocon de Koch est une figure fractale, i.e. un motif se répétant à l'infini à partir d'un triangle équilatéral. Chacun des côtés du triangle se voit découper en trois sections égales et on construit sur la section centrale un nouveau triangle équilatéral avant de la supprimer. La figure ci-dessous représente ces opérations sur l'un des cotés du triangle.

En réitérant à plusieurs reprises ce processus sur chacun des nouveaux côtés, on obtient la suite de figures suivantes (avec n nombres de fois où le processus a été exécuté).



$n = 0$ $\quad$ $n = 1$ $\quad$ $n = 2$ $\quad$ $n = 3$ $\quad$ $n = 4$ $\quad$ $n = 5$

À partir de la quatrième figure, on reconnaît la forme d'un flocon de neige que l'on nomme alors flocon de Koch.

Dans la suite de l'exercice on notera, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, c_n le nombre de cotés à l'étape n, l_n la longueur d'un coté à l'étape n et p_n le périmètre du flocon à l'étape n.

1. **[Nombres de côtés]**
   (a) En combien de segments égaux un segment est-il partagé d'une étape à l'autre ?
   (b) En déduire que (c_n) est une suite géométrique et préciser ces caractéristiques.
   (c) Exprimer c_n en fonction de n.
2. **[Périmètre du flocon]**
   (a) Montrer que (l_n) est une suite géométrique et préciser ces caractéristiques.
   (b) Exprimer l_n en fonction de n.
   (c) Montrer que $p_n = 3l_0 \times \left(\dfrac{4}{3}\right)^n$.
   (d) En déduire la limite du périmètre du flocon lorsque n tend vers $+\infty$.
3. **[Aire du flocon]** Déterminer la suite dont le terme général donne l'aire du flocon et montrer que cette suite converge. En quoi cela peut-il surprendre ?

4.6.3 S'entraîner

Suites convergentes et divergentes

Exercice 4.28. Soit (e_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $e_n = \dfrac{10}{n+1}$.

1. Démontrer que $n \geqslant 100 \implies e_n \in]-0,1;0,1[$.
2. Soit $\epsilon > 0$ un réel, déterminer le plus petit entier n_ϵ tel que $n > n_\epsilon \implies |e_n| < \epsilon$.
3. Conclure sur la limite de la suite (e_n).

Exercice 4.29. Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 3\sqrt{n} - 40$.

1. Déterminer le plus petit n_A tel que pour tout $n \geqslant n_A$, on a $u_n \geqslant 100$ puis $u_n \geqslant 1\,000$
2. Même question pour un réel A quelconque.
3. En déduire la limite de la suite (u_n).

Exercice 4.30. Soit (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = -(n+3)^2 + 7$.

1. Déterminer le plus petit n_A tel que pour tout $n \geqslant n_A$, on a $v_n \leqslant -720$ puis $v_n \leqslant -3\,000$.
2. Même question pour un réel A quelconque.
3. En déduire la limite de la suite (v_n).

Exercice 4.31. Que fait l'algorithme suivant ?

Algorithme 3 : Recherche de seuil

$n \leftarrow 1$
$u \leftarrow 1$
Tant que $u < 1000$ **:**
  $n \leftarrow n + 1$
  $u \leftarrow n^3$
Renvoyer : n

Opérations sur les limites

Exercice 4.32. Déterminer les limites de chacune des suites ci-dessous.

1. $a_n = n^5 + 5\sqrt{n}$.
2. $b_n = \dfrac{5}{n^2} - n^2$.
3. $c_n = -n^3 - n^2 + 1$.
4. $d_n = n^2 + 2 - \dfrac{7}{n}$.
5. $e_n = -75n + \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.
6. $f_n = 100$.

Exercice 4.33. Déterminer les limites suivantes.

1. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{5n^6}{-3+\frac{1}{n}} - \frac{56+\frac{1}{\sqrt{n}}}{n^3-8} \right)$.
2. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{-7-\dfrac{1}{n^2}}{n^4+1} \times \left(-5+\frac{1}{n}\right) \right)$.

Exercice 4.34. [Formes indéterminées] Étudier la limite de chaque suite.

1. $s_n = \dfrac{2}{n^2-4}$.
2. $t_n = \dfrac{4-\dfrac{1}{\sqrt{n}}}{\dfrac{1}{n^3}-6}$.
3. $u_n = \dfrac{n^3}{4+\dfrac{1}{n}}$.
4. $v_n = \dfrac{1}{\left(\dfrac{4}{3}\right)^n}$.
5. $w_n = \dfrac{12n^2}{7n^5}$.
6. $x_n = \dfrac{n^2-1}{n+1}$.
7. $y_n = \dfrac{n^2+7n+5}{n+5}$.
8. $z_n = \dfrac{3n^2+7n+5}{5n^2+3n+2}$.
9. $d_n = \dfrac{n^2+n+1}{n^3}$.

Théorèmes de comparaison

Exercice 4.35.

1. Soit (u_n) telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-u_n \geqslant n-13$. Déterminer la limite de (u_n).
2. Soit (v_n) telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-13+v_n \leqslant 50\sqrt{n}(8-n)$. Déterminer la limite de (v_n).

Exercice 4.36. Soit (u_n) la suite définie par $u_n = \mathrm{e}^{\frac{8}{n}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Démontrer que la fonction f définie par $f(x) = \mathrm{e}^x - 4x - 1$ est décroissante sur $[0\,;1]$.
2. En déduire que pour tout $x \in [0\,;1]$, $1 \leqslant \mathrm{e}^x \leqslant 1+4x$.
3. Montrer que pour tout $n \geqslant 8$, $1 \leqslant u_n \leqslant 1 + \dfrac{1}{2n}$.
4. En déduire la limite de (u_n).

Exercice 4.37. [Python] Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_n = 1 + \dfrac{\sin(n)}{n}$.

1. Montrer que (u_n) converge et donner sa limite.
2. Compléter le script Python ci-dessous afin qu'il renvoie la première valeur de n telle que $|u_n - 1| \leqslant 0,001$.

```
from math import abs, sin

n = .....
u = ..............
while  ...................  :
     n = ..........
     u =  ...................

print(.....)
```

Exercice 4.38. [Python] On considère la suite (u_n) définie par $u_n = 1 + \dfrac{\cos(n)}{n^2}$.

1. Montrer que (u_n) converge et donner sa limite ℓ.
2. Écrire un script Python donnant le premier entier n tel que $|u_n - \ell| < 0,01$.

Convergence et suites monotones

Exercice 4.39. Soit la suite (v_n) définie par

$$\begin{cases} v_0 &= 100, \\ v_{n+1} &= 0,4v_n + 40. \end{cases}$$

1. Démontrer par récurrence que (v_n) est décroissante et minorée par 65.
2. Que peut-on dire de la limite de (v_n) ?

Exercice 4.40. Soit $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $w_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} = \sqrt{2w_n + 3}$.

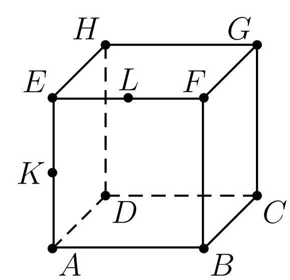
1. Déterminer une fonction f telle que $w_{n+1} = f(w_n)$.
2. Déterminer les variations de f sur $[0\,;3]$.
3. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant w_{n+1} \leqslant w_n \leqslant 3$.
4. En déduire la convergence de $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et l'éventuelle limite de $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 4.41. [Vrai ou faux ?] Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite. Indiquer en justifiant si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.

1. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante à partir d'un certain rang.
2. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et majorée, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.
3. S'il existe un intervalle ouvert contenant 0 et toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

4.6.4 Le Flashback !

Flashback 4.1. On considère le cube $ABCDEFGH$ représenté ci-contre. Soient K le milieu de $[AE]$ et L le milieu de $[EF]$.



1. Justifier que K appartient au plan (ADH).
2. Que peut-on dire des droites (AD) et (KH) ?
3. À l'aide d'un raisonnement par l'absurde, montrer que (AC) et (KH) ne sont pas parallèles.

Flashback 4.2. On considère les points $A\,(1\,;1\,;2)$ et $B\,(-1\,;3\,;4)$ et les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}$.

1. Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont coplanaires.
2. Soit M, le point du plan défini par $\overrightarrow{AM} = 2\vec{u} + 4\vec{v}$. Les points A, B et M sont-ils alignés ?