Chapitre 6

Limites de fonctions

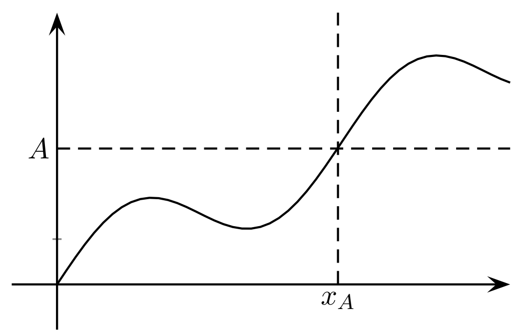
6.1 Limite en l'infini

6.1.1 Limite infinie en $+\infty$ ou en $-\infty$

Définition 6.1. *Une fonction f a pour limite $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ lorsque, pour tout réel A, l'intervalle l'intervalle $[A\,;+\infty[$ contient tous les images de la fonction f à partir d'un certain rang :*

$$\forall A > 0,\ \exists x_A \geqslant 0,\ \forall x \in \mathbb{R},\ x \geqslant x_A \implies f(x) \geqslant A.$$

On note $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.



Remarque : On définit de façon similaire : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$. Par exemple, dire que f a pour limite $-\infty$ quand x tend vers $-\infty$ signifie que pour tout réel A, l'intervalle $]-\infty\,;A]$ contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x assez petit.

Proposition 6.1. ***[Fonctions de référence]***

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n = +\infty$ *pour* $n \in \mathbb{N}^*$.
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$.
3. $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n = +\infty$ *si n est pair.*
4. $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n = -\infty$ *si n est impair.*

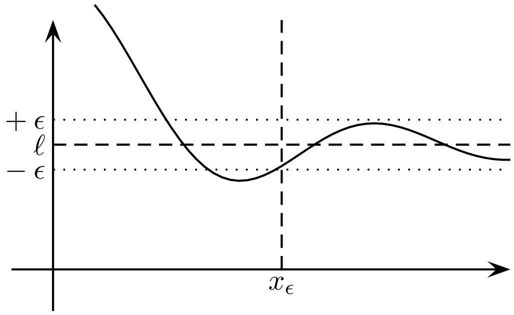
Démonstration. Exercice. $\square$

6.1.2 Limite finie en $+\infty$ ou en $-\infty$

Définition 6.2. *Une fonction f a pour **limite** quand x tend vers $+\infty$ un réel ℓ lorsque tout réel positif ϵ, l'intervalle $]\ell-\epsilon\,;\ell+\epsilon[$ contient toutes les images de la fonction f à partir d'un certain rang :*

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists x_\epsilon \in \mathbb{R}_+ \ /\ \forall x \in \mathbb{R},\ x \geqslant x_\epsilon \implies |f(x)-\ell| < \epsilon.$$

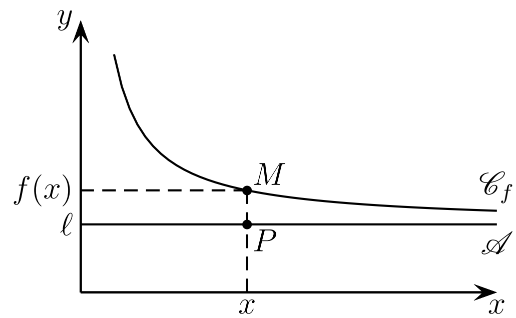
On note $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$.



Définition 6.3. *Lorsque $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$ (avec $\ell \in \mathbb{R}$), on dit que la droite $\mathscr{A}$ d'équation $y = \ell$ est une **asymptote horizontale** en $+\infty$ à la courbe représentative de f.*

Remarques :

- Cela signifie qu'en notant $M\,(x\,;f(x))$ un point de la courbe $\mathscr{C}_f$ et $P\,(x\,;\ell)$ un point de l'asymptote $\mathscr{A}$, la distance MP tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$.
- On définit de même une asymptote horizontale en $-\infty$ lorsque $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \ell$.



Proposition 6.2. ***[Limites de référence]***

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0.$
2. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x} = 0.$
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = 0.$
4. *Pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0.$

Démonstration. Exercice. □

Proposition 6.3. *Les limites en l'infini de la fonction exponentielle sont :*

$$\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0 \quad \textit{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty.$$

Démonstration. Exercice. □

Exercices : 6.1 et 6.2 ; 6.25 et 6.26.

6.2 Limite en un réel x_0

Soit f une fonction définie sur $\mathcal{D}$ (intervalle ou réunion d'intervalles). On étudie la limite en un nombre réel x_0 lorsque x_0 est soit dans $\mathcal{D}$, soit une borne d'un intervalle de $\mathcal{D}$.

Exemple : On peut étudier la limite en 0 de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ car 0 est une borne de $\mathcal{D} =]-\infty\,;0[\cup]0\,;+\infty[$.

6.2.1 Limite infinie en un réel x_0

Définition 6.4. *Une fonction f a pour limite $+\infty$ quand x tend vers x_0 lorsque, pour tout réel A, l'intervalle l'intervalle $[A\,;+\infty[$ contient tous les images de la fonction f pour x assez proche de x_0 :*

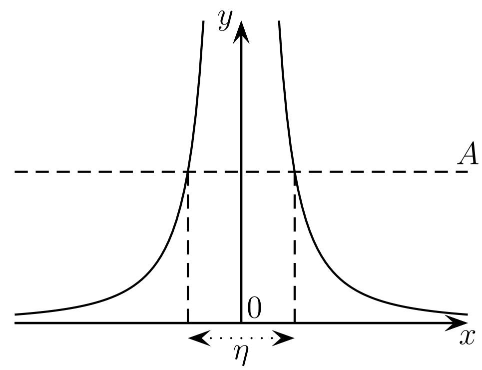
$$\forall A > 0,\ \exists \eta > 0 \ /\ \forall x \in \mathbb{R},\ |x - x_0| < \eta \implies f(x) \geqslant A.$$

On note $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$.

Exemple : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$. Pour tout réel $A > 0$,

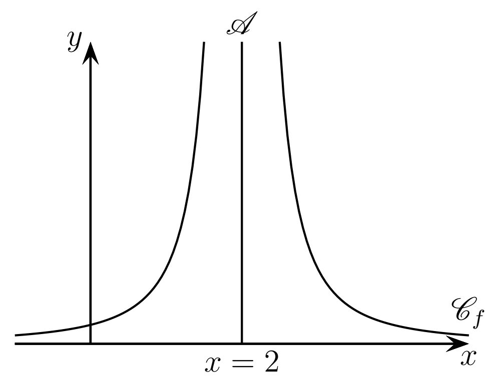
$$\frac{1}{x^2} > A \iff 0 < x^2 < \frac{1}{A} \iff \frac{-1}{\sqrt{A}} < x < \frac{1}{\sqrt{A}} \text{ et } x \neq 0.$$

Donc l'intervalle $]A\,;+\infty[$ contient toutes les valeurs de x pour x à une distance inférieure à $\eta = \dfrac{1}{\sqrt{A}}$ de 0, et $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$.



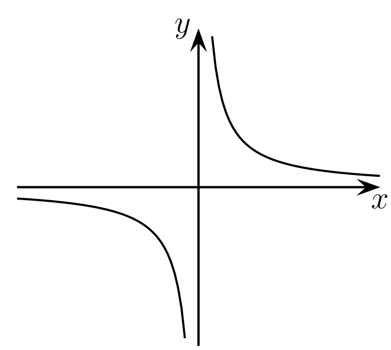
Définition 6.5. *Lorsqu'une fonction f a pour limite $+\infty$ ou $-\infty$ en un nombre réel x_0, éventuellement à droite ou à gauche, on dit que la droite $\mathscr{A}$ d'équation $x = x_0$ est une **asymptote verticale** à la courbe représentative de f.*

Exemple : La fonction $f(x) = \dfrac{1}{(x-2)^2}$ représentée ci-contre possède une asymptote verticale d'équation $x = 2$.



Remarque : il est possible d'avoir des limites différentes lorsque $x < x_0$ et $x > x_0$, i.e. **à gauche** et **à droite** de x_0.
Exemple : La fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$ admet deux limites différentes en 0 :

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{1}{x} = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x} = +\infty.$$



— Sur $\mathbb{R}_+^* =]0\,;+\infty[$, pour un nombre réel $A > 0$ fixé : $\dfrac{1}{x} > A \iff 0 < x < \dfrac{1}{A}$. Ainsi, l'intervalle $]A\,;+\infty[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que x est positif et suffisamment proche de 0. On dit que f a pour **limite $+\infty$ à droite** en 0 et on note $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{1}{x} = +\infty$.

— Sur $\mathbb{R}_-^* =]-\infty\,;0[$, pour un nombre réel $A < 0$ fixé : $\dfrac{1}{x} < A \iff 0 > x > \dfrac{1}{A}$. Ainsi l'intervalle $]-\infty\,;A[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ lorsque x est négatif et suffisamment proche de 0. On dit que g a pour **limite $-\infty$ à gauche** en 0 et on note $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \dfrac{1}{x} = -\infty$.

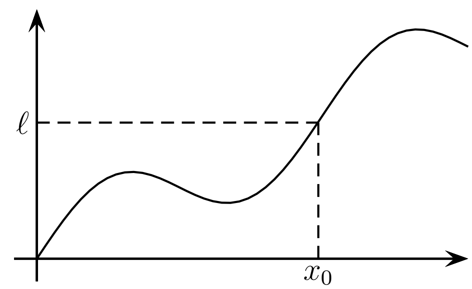
La droite d'équation $x = 0$ est donc une asymptote verticale à la courbe représentative de f. Intuitivement : $\mathscr{C}_f$ se rapproche infiniment de l'axe des ordonnée lorsque x se rapproche de 0.

6.2.2 Limite finie en un nombre réel x_0

Définition 6.6. *Une fonction f a pour limite ℓ en x_0 si et seulement si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x assez proche de x_0 :*

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \eta > 0 \ /\ \forall x \in \mathbb{R},\ |x - x_0| < \eta \implies |f(x) - \ell| < \epsilon.$$

On note $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell$.



Remarque : Si $x_0 \in \mathcal{D}$ et si f a une limite ℓ en x_0, alors $f(x_0) = \ell$.

Exercices : 6.3 et 6.4 ; 6.27.

6.3 Opération sur les limites

Soient f et g deux fonctions, ℓ_1 et ℓ_2 deux réels.

6.3.1 Limite d'une somme

$\lim f$	ℓ_1			$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim g$	ℓ_2	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim(f+g)$	$\ell_1+\ell_2$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I.

6.3.2 Limite d'un produit

$\lim f$	ℓ_1	$\ell_1 > 0$		$\ell_1 < 0$		$+\infty$		$-\infty$	0
$\lim g$	ℓ_2	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
$\lim(f\times g)$	$\ell_1\times\ell_2$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I.

6.3.3 Limite d'un quotient

Dans les tableaux suivants :

— 0^+ désigne une convergence vers 0 par valeurs positives ;

— 0^- désigne une convergence vers 0 par valeurs négatives.

Cas où la limite de g n'est pas nulle

$\lim f$	ℓ_1		$+\infty$		$-\infty$		$\pm\infty$
$\lim g$	$\ell_2 \neq 0$	$\pm\infty$	$\ell_2 > 0$	$\ell_2 < 0$	$\ell_2 > 0$	$\ell_2 < 0$	$\pm\infty$
$\lim \dfrac{f}{g}$	$\dfrac{\ell_1}{\ell_2}$	$0^{\pm}$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I.

Cas où la limite de g est nulle

$\lim f$	$\ell_1 > 0$ ou $+\infty$	$\ell_1 < 0$ ou $-\infty$	0
$\lim g$	$0^{\pm}$	$0^{\pm}$	0
$\lim \dfrac{f}{g}$	$\pm\infty$	$\mp\infty$	F.I.

6.3.4 Exemples

Proposition 6.4. *En $+\infty$ et $-\infty$, une fonction polynôme $x \mapsto a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ a la même limite que son monôme de plus haut degré $a_n x^n$.*

Démonstration. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et P une fonction polynôme définie pour tout réel x par :

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

Pour tout $x \neq 0$, on a en factorisant par x^n chacun des monôme ;

$$P(x) = x^n \left(a_n + a_{n-1}\frac{1}{x} + \cdots + a_1 \frac{1}{x^{n-1}} + a_0 \frac{1}{x^n} \right).$$

On sait que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$. Donc

$$\lim_{x \to \pm\infty} \left(a_n + a_{n-1}\frac{1}{x} + \cdots + a_1 \frac{1}{x^{n-1}} + a_0 \frac{1}{x^n} \right) = a_n.$$

Donc, par produit, P a la même limite en $\pm\infty$ que $a_n x^n$. □

Proposition 6.5. *Soient P une fonction polynôme dont $a_p x^p$ est le monôme de plus haut degré, et Q une fonction polynôme dont $a_q x^q$ est le monôme de plus haut degré, $p,\ q \in \mathbb{N}$. Alors :*

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{a_p x^p}{a_q x^q} \right) = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{a_p}{a_q} x^{p-q} \right).$$

Démonstration. Exercice. □

Remarque : Pour étudier la limite de polynômes, de produits ou de quotients de polynôme, il suffit donc de n'étudier que les termes de plus haut degré.

Exemple : Soit la fonction f définie sur $]-\infty\,;0[$ par $f(x)=\dfrac{-3}{x}-x$. Étudions les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

— $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-3}{x}=0^+$, et $\lim\limits_{x\to-\infty}-x=+\infty$, donc par somme $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$.

— $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}}\dfrac{-3}{x}=+\infty$, et $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}}-x=0^+$. Donc, par somme, $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}}f(x)=+\infty$.

Ainsi, la courbe représentative de f admet asymptote verticale d'équation $x=0$.

Exemple : Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=x^3-12x$.

— En $-\infty$ comme en $+\infty$, la limite de g est une forme indéterminée (de la forme $+\infty-\infty$). On la factorise par son terme de plus haut degré :

$$g(x)=x^3-12x=x^3\left(1-\frac{12}{x^2}\right).$$

— Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty}x^3=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{12}{x^2}\right)=1$, on a par produit $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$.

— Puisque $\lim\limits_{x\to-\infty}x^3=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1-\dfrac{12}{x^2}\right)=1$, on a par produit $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=-\infty$.

— Par ailleurs, on peut vérifier que $g'(x)=3x^2-12=3(x-2)(x+2)$. On en déduit le tableau de signes de g' puis le tableau de variations de g :

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	16	$\searrow$	-16	$\nearrow$	$+\infty$

Exercices : 6.5 à 6.14 ; 6.28 à 6.34.

6.4 Théorèmes de comparaison

Théorème 6.1. *Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Soit x_0 un réel appartenant à I ou l'une de ses bornes (x_0 peut être $\pm\infty$ en fonction de I).*

1. *Si, pour tout $x\in I$, $f(x)\geqslant g(x)$ et $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=+\infty$, alors $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=+\infty$.*
2. *Si, pour tout $x\in I$, $f(x)\leqslant g(x)$ et $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=-\infty$, alors $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=-\infty$.*

Démonstration.

1. On suppose que pour tout $x \in I$, $f(x) \geqslant g(x)$ et $\lim_{x \to x_0} g(x) = +\infty$.

   1^er^ cas, $x_0 = +\infty$: Soit A un réel quelconque. Par définition de la limite, il existe $x_A \in I$ tel que, pour tout $x \in I$, si $x \geqslant x_A$ alors $g(x) > A$. Or pour tout $x \in I, f(x) \geqslant g(x)$. Donc, pour tout $x \in I$, si $x \geqslant x_A$, alors $f(x) > A$. Autrement dit $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

   2^e^ cas, $x_0 \in I$: on adapte le premier cas avec la définition de la limite en un réel.

2. Même méthode.

□

Exemple : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x + \sin(x)$. La fonction sinus n'admet pas de limite en $+\infty$ (elle est périodique), mais puisque $\sin(x) \leqslant 1$, on a $f(x) \leqslant -2x + 1$. Or $\lim_{x \to +\infty} -2x + 1 = -\infty$ donc par comparaison, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

Théorème 6.2. *[Théorème des gendarmes]* *Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Soient x_0 un réel appartenant à I ou l'une de ses bornes (x_0 peut être $\pm\infty$ en fonction de I) et ℓ un réel. Si :*

1. *pour tout $x \in I$, $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$;*
2. *g et h ont la même limite ℓ en x_0 ;*

alors : $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$.

Démonstration. Exercice. □

Exemple : Soit la fonction g définie sur $]0\,;+\infty[$ par $g(x) = \dfrac{\cos(x)}{x}$. On a pour tout réel x, $-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$, donc

$$-\frac{1}{x} \leqslant \frac{\cos(x)}{x} \leqslant \frac{1}{x}.$$

Or, $\lim_{x \to +\infty} \pm\dfrac{1}{x} = 0$. Donc, d'après le théorème des gendarmes, $\lim_{x \to +\infty} g(x) = 0$.

Théorème 6.3. *[Croissance comparée - Admis]* *Pour tout $n \in \mathbb{N}$:*

- $\lim_{x \to -\infty} x^n \mathrm{e}^x = 0$;
- $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x^n} = +\infty$.

Remarque : On pourra retenir que « en l'infini, l'exponentielle l'emporte sur les puissances ».

Exercices : 6.15 à 6.21 ; 6.35 à 6.37.

6.5 Capacités attendues

— Déterminer dans des cas simples la limite d'une suite ou d'une fonction en un point, en $\pm\infty$, en utilisant les limites usuelles, les croissances comparées, les opérations sur les limites, des majorations, minorations ou encadrements, la factorisation du terme prépondérant dans une somme.

— Faire le lien entre l'existence d'une asymptote parallèle à un axe et celle de la limite correspondante.

6.6 Exercices

6.6.1 Progresser

Limite en l'infini

Exercice 6.1. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = \sqrt{x}$.

1. Démontrer que pour tout réel $A > 0$, l'intervalle $]A\,;+\infty[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez grand.
2. Que peut-on en déduire pour la fonction f ?

Exercice 6.2. Soit g la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $g(x) = \dfrac{1}{x}$.

1. Montrer que pour tout réel $\epsilon > 0$, l'intervalle $]0\,;\epsilon[$ contient toutes les valeurs de $g(x)$ pour x suffisamment grand.
2. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$. Que peut-on en déduire pour $\mathscr{C}_g$?

Limite en un réel x_0

Exercice 6.3. Soit la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = -5 + \dfrac{-5}{\sqrt{x}}$.

1. Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
2. Que peut-on en déduire graphiquement ?

Exercice 6.4. Pour chacune des trois fonctions suivantes, dire si la courbe représentative de cette fonction admet une ou plusieurs asymptotes.

1.

x	$-\infty$		-12		$+\infty$
$f(x)$	2	$\searrow$	0	$\nearrow$	5

2.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	-5

3.

x	$-\infty$		-3		2		6
$h(x)$	-4	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

Opération sur les limites

Exercice 6.5. Déterminer, **en justifiant**, les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2-5$;
2. $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2-5$;
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} -5x^3-2x+1$;
4. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-5}{x}-5x$;
5. $\lim\limits_{x\to-\infty} -5x^3-2x+1$;
6. $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3\left(-5-\dfrac{\sqrt{2}}{x}\right)$;
7. $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x-\dfrac{1}{x}+4$;
8. $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x-7$;
9. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x^3}$;
10. $\lim\limits_{x\to-\infty} 7\mathrm{e}^x-8x^5+1$;
11. $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x\left(-6x^3+\dfrac{1}{x}\right)$;
12. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^7-9}{\dfrac{1}{x^2}-4}$.

Exercice 6.6. Déterminer la limite (éventuellement à gauche / droite) des fonctions suivantes lorsque x tend vers x_0.

1. $f_1(x)=x^3+x-2,\ x_0=-\infty$.
2. $f_2(x)=\sqrt{x}+\dfrac{1}{x},\ x_0=+\infty$.
3. $f_3(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}+2},\ x_0=+\infty$.
4. $f_4(x)=\dfrac{-3}{x^2+x},\ x_0=+\infty$.
5. $f_5(x)=\dfrac{1}{x-4}+\sqrt{x},\ x_0=4$.
6. $f_6(x)=\dfrac{1+\dfrac{1}{x}}{\sqrt{x}-1},\ x_0=+\infty$.
7. $f_7(x)=\dfrac{x^3-2x^2}{(x-1)^2},\ x_0=1$.
8. $f_8(x)=\dfrac{2}{\sqrt{x}-2},\ x_0=4$.

Exercice 6.7. Déterminer la limite en $+\infty$ et en $-\infty$ des fonctions suivantes.

1. $f_1(x)=x^2-3x+1$.
2. $f_2(x)=-x^5+10x^4+x^2+x$.
3. $f_3(x)=\dfrac{x^2+2x-3}{x+1}$.
4. $f_4(x)=\dfrac{-x^3+x-1}{2x+1}$.
5. $f_5(x)=\dfrac{4x^2-3}{x^7-5x^4+x^2-3}$.

Exercice 6.8. [Limite usuelle avec une exponentielle] Soit f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{x}$.

1. Donner l'expression du taux d'accroissement de la fonction exponentielle entre 0 et x.
2. Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

Exercice 6.9. [Limite usuelle avec un sinus] Soit f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$.

1. Donner l'expression du taux d'accroissement de la fonction sinus entre 0 et x.
2. Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

Exercice 6.10. Soit f la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par : $f(x) = \sqrt{x+2} - \sqrt{x}$.

1. Montrer que pour tout $x \in [0\,;+\infty[$, $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}$.
2. Déterminer la limite de $x \mapsto \sqrt{x+2}$ en $+\infty$ et en déduire la limite de f en $+\infty$.
3. De la même façon, calculer la limite en $+\infty$ de $g(x) = \sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2+1}$.

Exercice 6.11. Soient f, g et h trois fonctions définies par

$$f(x) = \frac{x^2+x-2}{2x+1}, \quad g(x) = \frac{x^2+x+1}{x^2+2x-3} \quad \text{et} \quad h(x) = \mathrm{e}^x - \frac{1}{x}.$$

Pour chacune de ces fonctions, déterminer l'ensemble de définition, les limites aux bornes de l'ensemble de définition, les asymptotes éventuelles ainsi que les variations.

Exercice 6.12. En décomposant le problème, déterminer :

$$\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-3x+4} \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{6x^2+x}{x^2+1}}.$$

Exercice 6.13. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$. En décomposant le problème, déterminer la limite de f aux bornes de son ensemble de définition.

Exercice 6.14. Dans chaque cas, déterminer deux fonctions f et g telles que :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - g(x)) = 2\,;$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) \times g(x)) = 0\,;$
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) \times g(x)) = +\infty\,;$
4. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 3$.

Théorèmes de comparaison

Exercice 6.15. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3\cos(x) - x^2 + 4$

1. Montrer que pour tout réel x, $1 - x^2 \leqslant f(x) \leqslant 7 - x^2$.
2. En déduire $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

Exercice 6.16. À l'aide de théorèmes de comparaisons ou du théorème des gendarmes, déterminer les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ des fonctions définies par :

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{1+x^2} \quad \text{et} \quad g(x) = x^2 - 3\cos(x).$$

Exercice 6.17. [Limites de la fonction exponentielle] On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \mathrm{e}^x - x$.

1. Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.
2. En déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) > 0$.
3. En déduire que $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$.
4. En posant $X = -x$ démontrer que $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = 0$.

Exercice 6.18. [Croissances comparées] Déterminer les limites suivantes.

1. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x^2}$.
2. $\lim\limits_{x \to +\infty} (\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})$.
3. $\lim\limits_{x \to -\infty} x(1 + \mathrm{e}^{-x})$.
4. $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x - x^2$.
5. $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{2x} - x\mathrm{e}^x$.
6. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{3x}}{x}$.

Exercice 6.19. [Croissances comparées] Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que pour tout réel x, $\mathrm{e}^x \geqslant x + 1$ (on pourra se ramener à l'étude de la fonction $f : x \mapsto \mathrm{e}^x - x - 1$).
2. Montrer que pour tout réel x, $\mathrm{e}^{\frac{x}{n+1}} \geqslant \dfrac{x}{n+1}$.
3. En utilisant une propriété de la fonction exponentielle ($\mathrm{e}^{ax} = (\mathrm{e}^x)^a$), montrer que pour tout $x \geq 0$,
$$\mathrm{e}^x \geqslant \left(\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} x^{n+1}.$$
4. En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x^n}$.

Exercice 6.20. [Croissances comparées] Déterminer la limite de chaque fonction lorsque x tend vers a.

1. $f : x \mapsto x^2\mathrm{e}^x + x - 1, \quad a = -\infty$.
2. $g : x \mapsto \mathrm{e}^{-x} + x^2 - x, \quad a = +\infty$.
3. $h : x \mapsto x^2\mathrm{e}^{-x} + x - 1, \quad a = +\infty$.
4. $i : x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^x - x}{\mathrm{e}^x + 1}, \quad a = +\infty$.
5. $j : x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{2x} - x^3\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + x}, \quad a = +\infty$.

Exercice 6.21. [Théorème des gendarmes] Soient f, g et h trois fonctions définies sur $I =]A\,; +\infty[$ où A est soit un réel soit $-\infty$. On suppose que, pour tout $x \in I$, $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$ et que g et h ont la même limite $\ell \in \mathbb{R}$ en $+\infty$.

1. Soit $\epsilon > 0$. Expliquer pourquoi il existe m_g tel que pour tout $x \in I$, si $x > m_g$, alors $\ell - \epsilon < g(x) < \ell + \epsilon$.
2. Déterminer le même type d'inégalité pour h.
3. Démontrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$.

6.6.2 Approfondir

Exercice 6.22. Soient m un nombre réel quelconque et f la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f(x) = (x+1)\mathrm{e}^x$.

1. Calculer la limite de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. Montrer que la dérivée de f sur $\mathbb{R}$ est $f'(x) = (x+2)\mathrm{e}^x$.
3. Déterminer le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.
4. On définit la fonction g_m sur $\mathbb{R}$ par $g_m(x) = x + 1 - m\mathrm{e}^{-x}$ et on note $\mathscr{C}_m$ la courbe représentative de g_m.
   (a) Démontrer que $g_m(x) = 0$ si, et seulement si, $f(x) = m$.
   (b) Déduire des questions précédentes, sans justifier, le nombre de point d'intersection de la courbe $\mathscr{C}_m$ avec l'axe des abscisses en fonction du réel m.
   (c) Étudier les positions relatives de la courbe $\mathscr{C}_m$ par rapport à la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = x + 1$ suivant les valeur de m.

Exercice 6.23. [Théorie de la relativité] Dans sa théorie de la relativité, Einstein a montré que la longueur d'un objet en mouvement – vu par un observateur immobile – et sa masse dépendent de sa vitesse.

On note L_0 la longueur de l'objet au repos (en m), m_0 la masse de l'objet au repos (en kg), v la vitesse de l'objet (en m.s^{-1}) et c la vitesse de la lumière (environ 3×10^8 m.s^{-1}).

1. La fonction L donnant la longueur de l'objet est définie sur $[0\,;c[$ par
$$L(v) = L_0\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$
   (a) Calculer $L'(v)$ pour tout réel v de $[0\,;c[$.
   (b) En déduire le sens de variation de la fonction L.
   (c) Calculer la limite de L en c.
2. La fonction m donnant la masse de l'objet est définie sur $[0\,;c[$ par
$$m(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}.$$
   (a) Étudier les variations de m.
   (b) Que vaut $\lim\limits_{v \to c} m(v)$?

Exercice 6.24. [**] Pour tout nombre réel x, il existe un unique entier n tel que $n \leqslant x < n+1$. On appelle cet entier partie entière de x, notée $\lfloor x \rfloor$. Donc $\lfloor x \rfloor = n$ signifie que $x \in [n\,;n+1[$. Déterminer la limite de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{\lfloor x \rfloor}{x}$ lorsque x tend vers $+\infty$.

6.6.3 S'entraîner

Limite en l'infini

Exercice 6.25. Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -x^2$.

1. Démontrer que pour tout réel $A < 0$, l'intervalle $]-\infty\,; A[$ contient toutes les valeurs de $g(x)$ pour x suffisamment petit (négatif et grand en valeur absolue).
2. Que peut-on en déduire pour la fonction g ?

Exercice 6.26. Démontrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$. Que peut-on en déduire graphiquement ?

Limite en un réel x_0

Exercice 6.27. Soit la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ par $f(x) = \dfrac{5}{x-2}$.

1. Déterminer les limites en $\pm\infty$.
2. Déterminer les limites de f à gauche et à droite en $x = 2$.
3. Que peut-on en déduire graphiquement ?

Opération sur les limites

Exercice 6.28. Déterminer, en justifiant, les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to-\infty} (1+x)(2x^2-3)$;
2. $\lim\limits_{x\to-3} \dfrac{-5+x}{x^2+1}$;
3. $\lim\limits_{x\to5} \dfrac{25-x^2}{x+1}$;
4. $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{-3+x}{x}$;
5. $\lim\limits_{x\to4^-} (3-x) \times \dfrac{5}{x-4}$;
6. $\lim\limits_{x\to-7} \dfrac{-3}{(x+7)^2} \times \dfrac{x+1}{x^2-51}$.

Exercice 6.29. Déterminer la limite (éventuellement à gauche / droite) des fonctions suivantes lorsque x tend vers x_0.

1. $f_1(x) = \dfrac{1}{x-2}$, $x_0 = 2$.
2. $f_2(x) = \dfrac{1}{x-4} + \sqrt{x}$, $x_0 = 4$.
3. $f_3(x) = \dfrac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{x}-1}$, $x_0 = +\infty$.
4. $f_4(x) = \dfrac{1}{x} + 5$, $x_0 = 0$.
5. $f_5(x) = \dfrac{5x+2}{x+4}$, $x_0 = -4$.
6. $f_6(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$, $x_0 = -1$.

Exercice 6.30. Déterminer la limite en $+\infty$ et en $-\infty$ des fonctions suivantes.

1. $f(x) = 3x^4 - 3x^2 + 5x + 1$.
2. $g(x) = \dfrac{3x^2-1}{x^2-2}$.
3. $h(x) = \dfrac{x^2+x+1}{5x^2+2}$.

Exercice 6.31. Soit f définie par $f(x) = \dfrac{3x^2 + x - 2}{x^2 - 1}$. Déterminer don ensemble de définition, des limites aux bornes de l'ensemble de définition, ses asymptotes éventuelles ainsi que ses variations.

Exercice 6.32. [Limite usuelle avec un cosinus] Soit f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{\cos(x) - 1}{x}$.

1. Donner l'expression du taux d'accroissement de la fonction cosinus entre 0 et x.
2. Déterminer $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.

Exercice 6.33. Calculer les limites en $+\infty$ des fonctions définies sur $\mathbb{R}_+$ par :

1. $f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$;
2. $g(x) = \sqrt{x^3 + x^2} - \sqrt{x^3 + x}$.

Exercice 6.34. Dans chaque cas, déterminer deux fonctions f et g telles que :

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - g(x)) = +\infty$;
2. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) \times g(x)) = 5$;
3. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = +\infty$;
4. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$.

Théorèmes de comparaison

Exercice 6.35. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 3 + 2\sin(x)$

1. Montrer que pour tout réel x, $x^2 + 1 \leqslant f(x) \leqslant x^2 + 5$.
2. En déduire les limites de f en plus $-\infty$ et $+\infty$.

Exercice 6.36. À l'aide de théorèmes de comparaisons ou du théorème des gendarmes, déterminer les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ des fonctions définies par :

$$f(x) = \cos(x)\mathrm{e}^{-x^2} \quad \text{et} \quad g(x) = \sin(x)\mathrm{e}^{x}.$$

Exercice 6.37. Déterminer la limite de chaque fonction lorsque x tend vers a.

1. $f : x \mapsto x^3\mathrm{e}^x, \quad a = -\infty.$
2. $g : x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^x}{x^4}, \quad a = +\infty.$
3. $h : x \mapsto x\mathrm{e}^x + \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{x^2}, \quad a = -\infty.$
4. $i : x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^x - \frac{\mathrm{e}^{2x}}{x^2}}{\mathrm{e}^x + x}, \quad a = +\infty.$

6.6.4 Le Flashback !

Flashback 6.1. $A\,(-5\,;5\,;-3)$, $B\,(-8\,;-5\,;-6)$, $C\,(-2\,;-8\,;-2)$ et $D\,(1\,;2\,;1)$ sont des points dans l'espace muni d'un repère orthonormé.

1. Montrer que $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont égaux.
2. Calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}$
3. En déduire la nature du quadrilatère $ABCD$.

Flashback 6.2. $A\,(5\,;-1\,;0)$, $B\,(0\,;-1\,;2)$ et $C\,(2\,;0\,;-2)$ sont des points dans l'espace muni d'un repère orthonormé.

1. Montrer que A, B et C définissent un plan.
2. Déterminer un vecteur normal au plan (ABC).