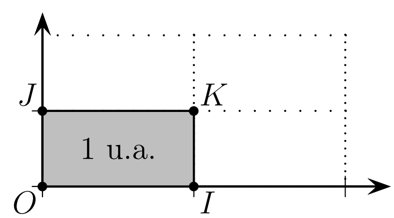
Chapitre 15

Intégration

15.1 Intégrale d'une fonction continue et positive

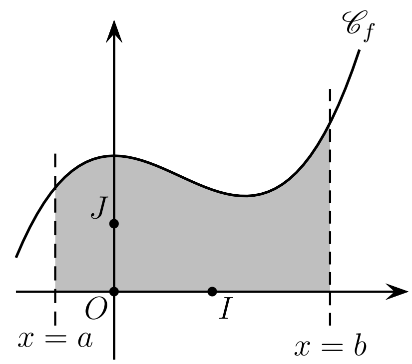
15.1.1 Aire sous une courbe

Définition 15.1. *Soient un repère orthogonal* $\left(O\,;\overrightarrow{OI}\,;\overrightarrow{OJ}\right)$ *et* K *le point de coordonnées* $(1\,;1)$ *dans ce repère. L'aire du rectangle* $OIKJ$ *est appelée* ***unité d'aire*** *et est notée* ***u.a.****.*



Définition 15.2. *Soient* f *une fonction* ***continue*** *et* ***positive*** *sur un intervalle* $[a\,;b]$ *et* $\mathscr{C}_f$ *sa courbe représentative dans le repère* $\left(O\,;\overrightarrow{OI}\,;\overrightarrow{OJ}\right)$*.* ***L'intégrale*** *de* f *sur l'intervalle* $[a\,;b]$ *est l'aire, exprimée en u.a., du domaine délimité par la courbe* $\mathscr{C}_f$*, l'axe des abscisses et les droites d'équations* $x = a$ *et* $x = b$*. On la note*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$



Remarques :

- Pour toute fonction continue et positive sur l'intervalle $[a\,;b]$, $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ est un nombre réel positif ou nul (c'est une aire).
- $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ ne dépend que de f et de $[a\,;b]$: il est indépendant du choix des unités sur les axes.
- On dit que x est une variable muette car elle n'intervient pas dans le résultat. On peut ainsi noter indifféremment

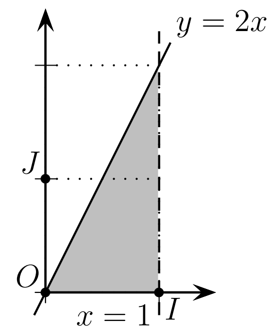
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u = \ldots$$

— L'aire sous la courbe entre a et a est nulle, on a par définition, que pour tout réel a,

$$\int_a^a f(x)\, \mathrm{d}x = 0.$$

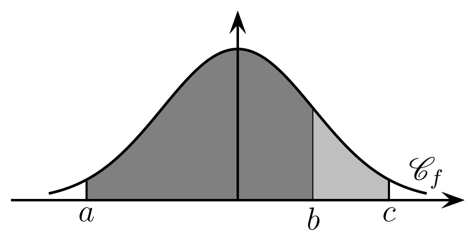
Exemple : Soit la fonction f définie sur $[0\,;1]$ par $f(x) = 2x$. La fonction f est continue et positive sur $[0\,;1]$. Sa courbe représentative est une droite passant par les points de coordonnées $(0\,;0)$ et $(1\,;2)$. L'intégrale de f entre 0 et 1 est égale à l'aire du triangle ci-contre, c'est à dire :

$$\int_0^1 2x\, \mathrm{d}x = \frac{1 \times 2}{2} = 1.$$



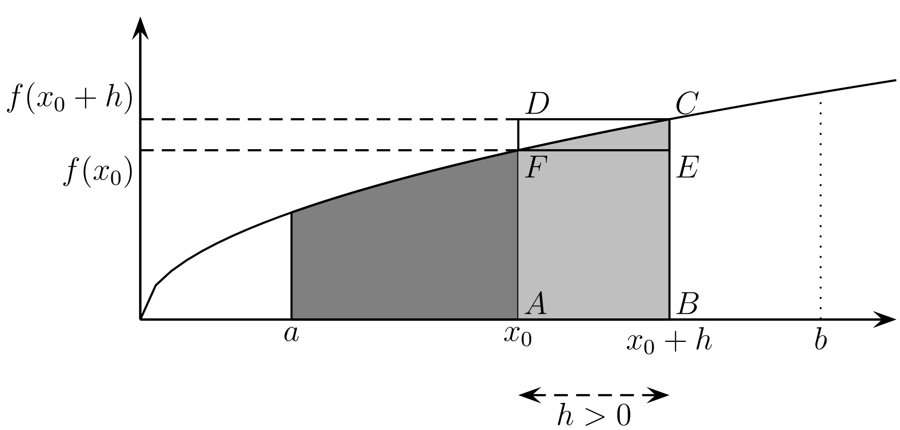
Proposition 15.1. ***[Relation de Chasles]*** *Soient f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a\,;c]$ et b un réel appartenant à l'intervalle $[a\,;c]$. On a :*

$$\int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\, \mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\, \mathrm{d}x.$$



Théorème 15.1. ***[Théorème fondamental]*** *Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a\,;b]$. Soit F_a la fonction définie sur $[a\,;b]$ par $F_a(x) = \int_a^x f(t)\, \mathrm{d}t$. La fonction F_a est dérivable sur $[a\,;b]$ et a pour dérivée la fonction f.*

Démonstration. On cherche à montrer que f est la dérivée de F_a sur l'intervalle $[a\,;b]$. On se limitera au cas où f est croissante sur $[a\,;b]$. Soient x_0 et $x_0 + h$ avec $h \neq 0$ deux, nombres réels de l'intervalle $[a\,;b]$.



Si $h > 0$ **:** alors en divisant en deux parties le domaine sous la courbe on obtient :

$$\int_a^{x_0+h} f(t)\ \mathrm{d}t = \int_a^{x_0} f(t)\ \mathrm{d}t + \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\ \mathrm{d}t \iff F_a(x_0+h) = F_a(x_0) + \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\ \mathrm{d}t$$
$$\iff F_a(x_0+h) - F_a(x_0) = \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\ \mathrm{d}t.$$

f est croissante sur $[a\,;b]$ donc pour tout $x \in [x_0\,;x_0+h]$ on a $f(x_0) \leqslant f(x) \leqslant f(x_0+h)$ et donc on peut encadrer $\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\ \mathrm{d}t$ par les aires des rectangles ($ABCD$ et $ABEF$ sur le schéma) de largeur h et de hauteur $f(x_0)$ et $f(x_0+h)$:

$$f(x_0) \times h \leqslant \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\ \mathrm{d}t \leqslant f(x_0+h) \times h.$$

Ainsi, en divisant par $h \neq 0$, on obtient :

$$f(x_0) \leqslant \frac{F_a(x_0+h) - F_a(x_0)}{h} \leqslant f(x_0+h).$$

Si $h < 0$ **:** on a le même raisonnement pour obtenir

$$f(x_0+h) \leqslant \frac{F_a(x_0+h) - F_a(x_0)}{h} \leqslant f(x_0).$$

Conclusion : comme f est continue en x_0, on a $\lim\limits_{h\to 0} f(x_0+h) = f(x_0)$, et en utilisant le théorème des gendarmes, on obtient

$$\lim_{h\to 0} \frac{F_a(x_0+h) - F_a(x_0)}{h} = f(x_0).$$

Ainsi F_a est dérivable en x_0 et $F_a'(x_0) = f(x_0)$ et donc F_a est une primitive de f sur $[a\,;b]$. Par ailleurs, elle est vérifie $F_a(a) = 0$, elle est donc unique.

□

Théorème 15.2. *Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a\,;b]$. Soit F une primitive de f sur $[a\,;b]$. On a alors*

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

Ce nombre se note également $[F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$.

Démonstration. D'après le théorème fondamental, la fonction F_a définie par $F_a(x) = \int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t$ est la primitive de f qui s'annule en a.

Soit F une autre primitive de f. Toutes les primitives de f diffèrent d'une constante, donc on peut écrire $F = F_a + k$ avec $k \in \mathbb{R}$. On a alors, puisque $F_a(a) = 0$,

$$F(b) - F(a) = F_a(b) + k - (F_a(a) + k) = F_a(b) - F_a(a) = \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t.$$

□

Remarques :

- Ce théorème permet de calculer l'aire sous la courbe d'une fonction continue et positive à l'aide d'une primitive de f.
- Le réel $F(b) - F(a)$ ne dépend pas de la primitive choisie pour f. En effet, soit G une autre primitive de f. Puisque F et G diffèrent d'une constante (on rappelle que toutes les primitives d'une même fonction sont les mêmes à une constante près), on a $G = F + k$ avec $k \in \mathbb{R}$, et donc :
$$G(b) - G(a) = F(b) + k - (F(a) + k) = F(b) - F(a).$$

Exemple : Soit la fonction $f : x \to x^2$. On note $\mathcal{A}$ l'aire sous la courbe de f sur $[2\,;3]$. On sait que la fonction $F : x \to \dfrac{x^3}{3}$ est une primitive de f, donc :

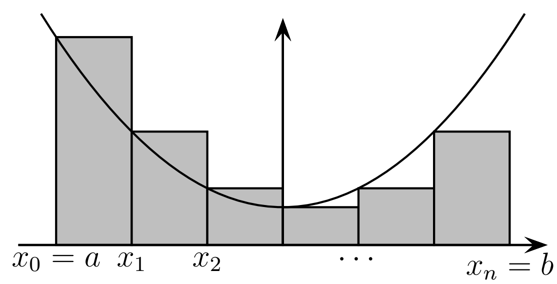
$$\mathcal{A} = \int_2^3 x^2 \,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3}\right]_2^3 = \frac{3^3}{3} - \frac{2^3}{3} = \frac{19}{3}.$$

Exercices : 15.1 à 15.5 ; 15.36 et 15.37.

15.1.2 Méthode des rectangles

La méthode des rectangles permet un calcul approché d'une intégrale. Soit f une fonction continue sur $[a\,;b]$ et n un entier naturel non nul.
On subdivise l'intervalle $[a\,;b]$ en n intervalles $[x_i\,;x_{i+1}]$ où, pour tout $i \in \{0\,;1\,;\cdots;n-1\}$,

$$x_i = a + i\frac{b-a}{n}.$$



On a donc $x_0 = a$ et $x_n = b$ et l'amplitude de chacun de ces sous intervalles est notée

$$\Delta x_i = x_{i+1} - x_i = \frac{b-a}{n}.$$

Ces intervalles servent de base (ou largeur) à la construction de rectangles de hauteur $f(x_i)$. L'aire de chacun de ces rectangles, en u.a., est donc

$$f(x_i) \times \Delta x_i = f(x_i) \times \frac{b-a}{n}.$$

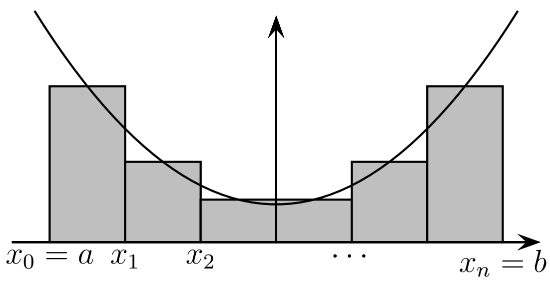
La somme des aires des rectangles vaut alors $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} f(x_i) \times \Delta x_i$. En augmentant le nombre de rectangles, on obtient une approximation de plus en plus précise de l'aire sous la courbe de f. Ainsi,

$$\sum_{i=0}^{n} f(x_i)\Delta x_i \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

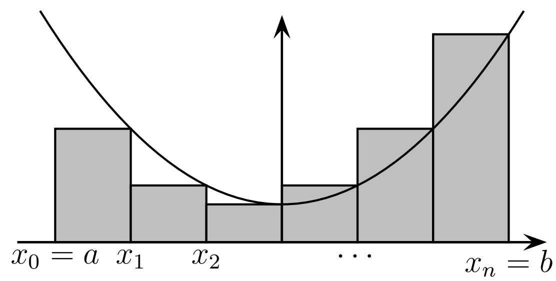
Remarques :

— D'une certaine façon, on peut remarquer que $\sum$ est devenu $\int$ et Δx_i est devenu $\mathrm{d}x$.

— Il existe de nombreuses déclinaisons de la méthode des rectangles. Celle présentée ci-dessus est dite à gauche car la hauteur du rectangle est définie par « la gauche » à l'aide de $f(x_i)$. Il est également possible de définir cette hauteur par « la droite » ou « le milieu » comme sur les figure ci-dessous. Il est également possible de définir des rectangles de largeurs variables, etc.



Méthode des milieux



Méthode des rectangles à droite

Exercices : 15.6

15.2 Intégrale d'une fonction continue

15.2.1 Primitives et calcul intégral

Définition 15.3. *Soient f une fonction continue sur un intervalle $[a\,;b]$. Soit F une primitive de f sur $[a\,;b]$. On définit **l'intégrale** de f sur $[a\,;b]$ par :*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

Remarques :

— La définition généralise l'intégrale d'une fonction continue strictement positive au cas d'une fonction continue de signe quelconque.

— L'intégrale d'une fonction continue de signe quelconque est un réel qui peut être positif ou négatif.

Exemple : Soit la fonction $g : x \mapsto -2x + 3$. On cherche à calculer l'intégrale de g entre 2 et 3. Remarquons que la fonction $G : x \mapsto -x^2 + 3x$ est une primitive de g. On a donc :

$$\int_2^3 g(x)\,\mathrm{d}x = [G(x)]_2^3 = -3^2 + 3 \times 3 - (-2^2 + 3 \times 2) = -2.$$

Exercices : 15.7 à 15.11 ; 15.38.

15.2.2 Propriétés de l'intégrale

Proposition 15.2. *Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a\,;b]$. Alors on a*

1. $\displaystyle\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0\,;$
2. $\displaystyle\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$

Démonstration. Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a\,;b]$. Soit F une primitive de f sur $[a\,;b]$ (dont l'existence est garantie puisque f est continue). On a :

1. $\displaystyle\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = F(a) - F(a) = 0$:
2. $\displaystyle\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = F(a) - F(b) = -(F(b) - F(a)) = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$

□

Proposition 15.3. ***[Linéarité de l'intégrale]*** *Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a\,;b]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a*

$$\int_a^b (\lambda f + g)(x)\,\mathrm{d}x = \lambda \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Démonstration. Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a\,;b]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Comme f et g sont continues sur I, elles admettent des primitives, on les note F et G. $\lambda F + G$ est alors une primitive de $\lambda f + g$. On a alors

$$\begin{aligned}
\int_a^b (\lambda f + g)(x)\,\mathrm{d}x &= [(\lambda F + G)(x)]_a^b \\
&= (\lambda F + G)(b) - (\lambda F + G)(a) \\
&= \lambda F(b) + G(b) - \lambda F(a) - G(a) \\
&= \lambda F(b) - \lambda F(a) + G(b) - G(a) \\
&= \lambda(F(b) - F(a)) + G(b) - G(a) \\
&= \lambda \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

□

Exemple :

$$\int_0^2 3\mathrm{e}^x - 2x\,\mathrm{d}x = 3\int_0^2 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x - \int_0^2 2x\,\mathrm{d}x = 3[\mathrm{e}^x]_0^2 - [x^2]_0^2 = 3\mathrm{e}^2 - 3 - 4 = 3\mathrm{e}^2 - 7.$$

Proposition 15.4. ***[Relation de Chasles]*** *Soient f une fonction continue sur un intervalle $[a\,;c]$ et b un réel appartenant à l'intervalle $[a\,;c]$. On a :*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Démonstration. Soient f une fonction continue sur un intervalle $[a\,;c]$ et b un réel appartenant à l'intervalle $[a\,;c]$. Comme f est continue sur $[a\,;c]$, elle y admet une primitive F. On a alors

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a) + F(c) - F(b) = F(c) - F(a) = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x.$$

□

Proposition 15.5. ***[Intégration des inégalités]*** *Soient f et g deux fonctions continues sur $[a\,;b]$.*

1. *Si pour tout $x \in [a\,;b]$, $f(x) \geqslant 0$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$.*
2. *Si pour tout $x \in [a\,;b]$, $f(x) \leqslant 0$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 0$.*
3. *Si pour tout $x \in [a\,;b]$, $f(x) \leqslant g(x)$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.*

Démonstration. Soient f et g deux fonctions continues sur $[a\,;b]$.

1. Si f est positive sur $[a\,;b]$, $\int f$ étant une aire, elle est positive.
2. Si f est négative sur $[a\,;b]$, alors la fonction $-f$ est positive sur $[a\,;b]$ et donc, d'après *1.*,
$$\int_a^b -f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0.$$
Or puisque $\displaystyle\int_a^b - f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, on obtient le résultat.
3. Si pour tout $x \in [a\,;b]$, $f(x) \leqslant g(x)$, alors $(g-f)(x) \geqslant 0$ et donc, d'après *1.*,
$$\int_a^b (g-f)(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0.$$
Or, par linéarité de l'intégrale,
$$\int_a^b (g-f)(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$
Donc
$$\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$$
et finalement
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

□

Remarque : Attention, la réciproque des propriétés précédente est fausse. Par exemple,

$$\int_{-1}^{2} x \, \mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{2} = \frac{3}{2}.$$

Mais sur $[-1\,;2]$, la fonction $x \mapsto x$ n'est pas positive puisqu'elle change de signe.

Exercices : 15.12 à 15.20 ; 15.39 à 15.41.

15.3 Intégrations par parties

Théorème 15.3. ***[Intégration par parties]*** *Soient deux fonctions u et v dérivables sur un intervalle $[a\,;b]$ telles que u' et v' soient continues sur $[a\,;b]$. Alors :*

$$\int_a^b u(x)v'(x) \, \mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x) \, \mathrm{d}x.$$

Démonstration. Les fonctions u et v étant dérivables, le produit $u \times v$ est dérivable et $(uv)' = u'v + uv'$. De plus, les fonctions u, v, u' et v' étant continues, la dérivée du produit $(uv)' = u'v + uv'$ est aussi continue. Donc :

$$\int_a^b (u(x)v(x))' \, \mathrm{d}x = \int_a^b (u'(x)v(x) + u(x)v'(x)) \, \mathrm{d}x = \int_a^b u'(x)v(x) \, \mathrm{d}x + \int_a^b u(x)v'(x) \, \mathrm{d}x.$$

Comme la fonction uv est une primitive de $(uv)'$, on obtient :

$$[u(x)v(x)]_a^b = \int_a^b (u(x)v(x))' \, \mathrm{d}x = \int_a^b u'(x)v(x) \, \mathrm{d}x + \int_a^b u(x)v'(x) \, \mathrm{d}x.$$

□

Remarques :

1. Il peut être utile de remarquer que $\displaystyle\int_a^b u(x) \, \mathrm{d}x = \int_a^b u(x) \times 1 \, \mathrm{d}x$ pour effectuer une intégration par parties en utilisant $v'(x) = 1$.
2. Pour simplifier la rédaction et éviter les erreurs il est conseillé d'utiliser une rédaction similaire au calcul de $(uv)'$ où apparaissent les fonctions u, v, u', v' ainsi que la formule à utiliser.
3. Il est possible de faire plusieurs intégrations par parties successivement.

Exemple : On cherche à calculer $\displaystyle\int_{-1}^{0} x\mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x$. On va considérer cette intégrale comme étant de la forme $\displaystyle\int uv'$ avec $u(x) = x$ et $v'(x) = \mathrm{e}^x$. On a alors $u'(x) = 1$ et $v(x) = \mathrm{e}^x$. Par intégration par parties, on a

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{0} x\mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x &= \int_{-1}^{0} u(x)v'(x) \, \mathrm{d}x \\
&= [u(x)v(x)]_{-1}^{0} - \int_{-1}^{0} u'(x)v(x) \, \mathrm{d}x \\
&= [x\mathrm{e}^x]_{-1}^{0} - \int_{-1}^{0} 1 \times \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x \\
&= \mathrm{e}^{-1} - [\mathrm{e}^x]_{-1}^{0} \\
&= \mathrm{e}^{-1} - (\mathrm{e}^0 - \mathrm{e}^{-1}) \\
&= 2\mathrm{e}^{-1} - 1.
\end{aligned}$$

Exercices : 15.21 à 15.26 ; 15.42 à 15.44.

15.4 Application du calcul intégral

15.4.1 Valeur moyenne d'une fonction sur un intervalle

Définition 15.4. *Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a\,;b]$. On appelle* ***valeur moyenne*** *de la fonction f sur l'intervalle $[a\,;b]$ le nombre réel :*

$$\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x.$$

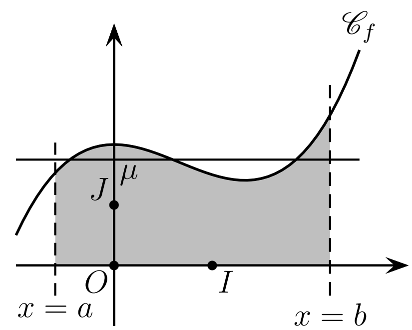
Exemple : La valeur moyenne de la fonction cube sur $[0\,;10]$ est :

$$\mu = \frac{1}{10-0} \int_0^{10} x^3 \, \mathrm{d}x = \frac{1}{10} \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^{10} = \frac{1}{10} \left(\frac{10^4}{4} - 0\right) = 2500.$$

Remarque : Si f est une fonction positive, en notant μ sa valeur moyenne sur l'intervalle $[a\,;b]$, on a

$$\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x = \mu(b-a).$$

L'aire sous la courbe de la fonction f est donc égale à l'aire du rectangle de largeur $(b-a)$ et de hauteur μ (c'est à dire, l'aire sous la courbe de la fonction constante égale à μ).



Exercices : 15.27 à 15.29 ; 15.45 et 15.46.

15.4.2 Calcul d'aire

Proposition 15.6. *Soit f une fonction continue et négative sur $[a\,;b]$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal. L'aire du domaine $\mathcal{D}_f$ délimité par $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$, exprimée en unité d'aire, est égale à*

$$\int_a^b -f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Démonstration. Soit f une fonction continue et négative sur $[a\,;b]$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal. On note $\mathcal{D}_{-f}$ le domaine délimité par $\mathscr{C}_{-f}$. $-f$ est positive sur $[a\,;b]$, on a par définition

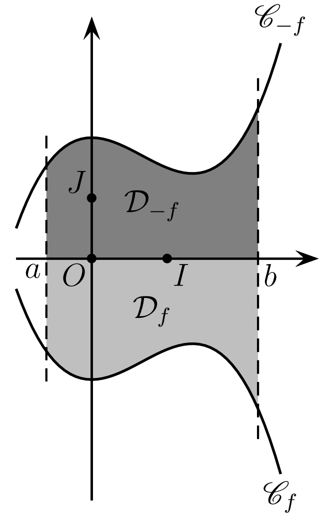
$$\text{aire}(\mathcal{D}_{-f}) = \int_a^b -f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Par symétrie de l'axe des abscisses, les aires des domaines $\mathcal{D}_f$ et $\mathcal{D}_{-f}$ sont égales, donc

$$\text{aire}(\mathcal{D}_f) = \int_a^b -f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Enfin, par linéarité, on a

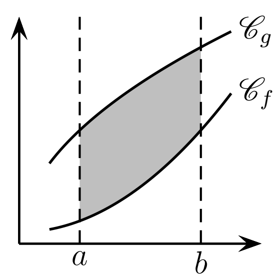
$$\text{aire}(\mathcal{D}_f) = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$



□

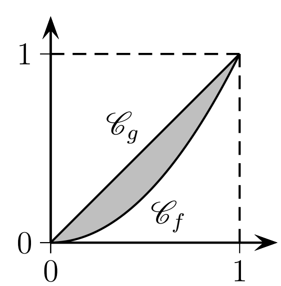
Proposition 15.7. *Soient f et g deux fonctions continues sur l'intervalle $[a\,;b]$ telles que $f \leqslant g$ sur $[a\,;b]$. Soient $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ leurs courbes représentatives dans un repère orthogonal. L'aire du domaine délimité par les courbes $\mathscr{C}_f$, $\mathscr{C}_g$ et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$, exprimée en unité d'aire, est égale à :*

$$\int_a^b (g(x)-f(x))\,\mathrm{d}x.$$



Exemple : Soient f et g les fonctions définies sur $[0\,;1]$ par $f(x)=x^2$ et $g(x)=x$. On peut aisément montrer que $f(x)\leqslant g(x)$ pour tout $x\in[0\,;1]$. L'aire du domaine défini par les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ et les droites d'équation $x=0$ et $x=1$ est donc donnée par

$$\int_0^1 (g(x)-f(x))\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x-x^2\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{6}.$$



Exercices : 15.30 à 15.33 ; 15.47.

15.5 Capacités attendues

— Estimer graphiquement ou encadrer une intégrale, une valeur moyenne.

— Calculer une intégrale à l'aide d'une primitive, à l'aide d'une intégration par parties.

— Majorer (minorer) une intégrale à partir d'une majoration (minoration) d'une fonction par une autre fonction.

— Calculer l'aire entre deux courbes.

— Étudier une suite d'intégrales, vérifiant éventuellement une relation de récurrence.

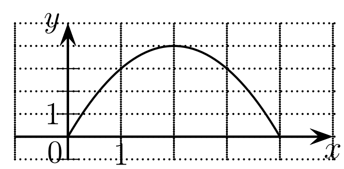
— Interpréter une intégrale, une valeur moyenne dans un contexte issu d'une autre discipline.

15.6 Exercices

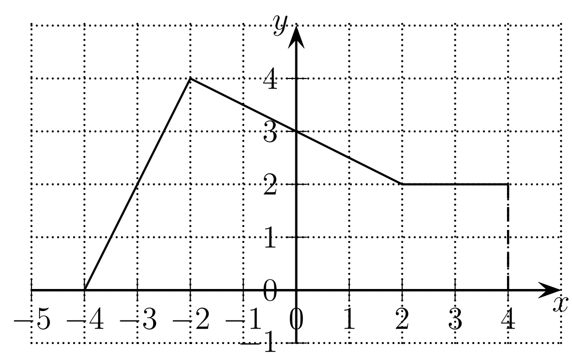
15.6.1 Progresser

Aire sous une courbe

Exercice 15.1. La fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;4]$ est représentée ci-contre. L'affirmation « $6 \leqslant \displaystyle\int_0^4 f(x)\ \mathrm{d}x \leqslant 16$ » est-elle vraie ?



Exercice 15.2. Dans le repère orthonormé ci-contre, on a tracé la courbe représentative d'une fonction f définie et continue sur l'intervalle $[-4\,;4]$. Déterminer mentalement :



1. $\displaystyle\int_{-4}^{-2} f(x)\ \mathrm{d}x\,;$
2. $\displaystyle\int_{-2}^{2} f(x)\ \mathrm{d}x\,;$
3. $\displaystyle\int_{2}^{4} f(u)\ \mathrm{d}u\,;$
4. $\displaystyle\int_{-4}^{4} f(t)\ \mathrm{d}t.$

Exercice 15.3. Soit f la fonction définie sur $[-1\,;1]$ par $f(x) = x^2 + 2x + 4$.

1. Démontrer que f est continue et positive sur $[-1\,;1]$.
2. Déterminer la valeur de l'aire sous la courbe de f sur $[-1\,;1]$.

Exercice 15.4. Soit la fonction f définie sur $[0\,;4]$ telle que :

— sur $[0\,;2]$, $f(x) = 0,75x\,;$

— sur $]2\,;4]$, $f(x) = -0,5x + 2,5$.

1. Représenter graphiquement la fonction f dans un repère orthonormé.
2. f est-elle continue sur $[0\,;4]$? Positive ?
3. Calculer $\displaystyle\int_0^4 f(x)\ \mathrm{d}x$.

Exercice 15.5. Dans chaque cas, préciser en justifiant, si l'affirmation est vraie ou fausse. Si l'affirmation est fausse, la rectifier pour qu'elle soit vraie.

1. Soit F la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $F(x)=\displaystyle\int_0^x \sqrt{t}\,\mathrm{d}t$. Affirmation : « sa dérivée est la fonction définie par $f(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ ».
2. Soit f la fonction définie sur $[2\,;+\infty[$ par $f(t)=\mathrm{e}^{t^2-1}$. Affirmation : « la fonction définie sur $[2\,;+\infty[$ par $F(x)=\displaystyle\int_2^x \mathrm{e}^{t^2-1}\,\mathrm{d}t$ est la primitive de f s'annulant en 2 ».

Méthode des rectangles

Exercice 15.6. [Méthode des rectangles, Python]

1. Compléter le programme suivant afin qu'il donne une approximation de l'aire sous la courbe de f définie par $f(x)=x^2$ sur $[1\,;2]$ à l'aide de la méthode des rectangles à gauche.

```
def f(x) :
    return ..........

def rect_gauche( .................... ) :
    dx = ...............
    aire = .....
    for i in range(.....) :
        x_i = ...............
        aire = .........................................
    return ..............
```

2. Adapter les programmes précédent à la méthode des milieux et des rectangles à droite.
3. Programmer et tester les programmes ci-dessus.

Primitives et calcul intégral

Exercice 15.7. Calculer les intégrales suivantes.

1. $\displaystyle\int_{-2}^{2} x\,\mathrm{d}x$.
2. $\displaystyle\int_{-4}^{0} t^3\,\mathrm{d}t$.
3. $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\,\mathrm{d}x$.
4. $\displaystyle\int_{-1}^{1} 3x^2-2x+\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$.
5. $\displaystyle\int_{-2}^{0} 2\mathrm{e}^u+u\,\mathrm{d}u$.
6. $\displaystyle\int_{1}^{9} \frac{1}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$.
7. $\displaystyle\int_{1}^{\mathrm{e}} \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u$.
8. $\displaystyle\int_{3}^{4} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$.
9. $\displaystyle\int_{5}^{5} \frac{\mathrm{e}^x-\sqrt{x}}{5+x^2+\ln(\sqrt{x})}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 15.8. Soit f la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{x^2+2x}{(x+1)^2}$.

1. Vérifier que la fonction $F : x \mapsto \dfrac{x^2}{x+1}$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}_+$.
2. Déterminer $\displaystyle\int_0^5 f(x)\,\mathrm{d}x$.

Exercice 15.9. Calculer les intégrales suivantes.

1. $\displaystyle\int_0^2 \frac{3x^2}{x^3+1}\,\mathrm{d}x$.
2. $\displaystyle\int_{\ln(2)}^{\ln(3)} \frac{2\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x$.
3. $\displaystyle\int_{-5}^{-3} 2x\mathrm{e}^{x^2+1}\,\mathrm{d}x$.
4. $\displaystyle\int_{-1}^{1} x\mathrm{e}^{-x^2+1}\,\mathrm{d}x$.
5. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$.
6. $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos(x)\sin(x)\,\mathrm{d}x$.
7. $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(x)\,\mathrm{d}x$.
8. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(x)\,\mathrm{d}x$.

Exercice 15.10. f est la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $f(x) = 2\dfrac{\ln(x)}{x} + x^2$.

1. En remarquant que $\dfrac{\ln(x)}{x}$ peut s'écrire $\dfrac{1}{x} \times \ln(x)$, déterminer une primitive de la fonction $x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x}$ sur $]0\,;+\infty[$.
2. Montrer que $\displaystyle\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x = \ln^2(3) + \frac{26}{3}$.

Exercice 15.11. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-2\}$ par $f(x) = \dfrac{3x^2+12x+11}{(x+2)^2}$.

1. Démontrer que, pour tout réel $x \neq -2$, $f(x) = 3 - \dfrac{1}{(x+2)^2}$.
2. Calculer $\displaystyle\int_{-1}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Propriétés de l'intégrale

Exercice 15.12.

1. Calculer mentalement $\displaystyle\int_{-1}^{3} 3f(x) + 4g(x)\,\mathrm{d}x$ où f et g sont deux fonctions continues sur l'intervalle $[-1\,;3]$ telles que : $\displaystyle\int_{-1}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x = 2$ et $\displaystyle\int_{-1}^{3} g(x)\,\mathrm{d}x = -2$.
2. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

   (a) $\displaystyle\int_{-1}^{0} 2\,\mathrm{d}t + \int_0^2 2\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{2} 2\,\mathrm{d}u$.

   (b) $\displaystyle\int_{-2}^{0} \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x < 0$.

Exercice 15.13. Soit g la fonction définie sur $[-2\,;2]$ par :

$$g(x)=\begin{cases} 1,5x+1 & \text{si } -2\leqslant x\leqslant 0,\\ 2x+1 & \text{si } 0\leqslant x\leqslant 2.\end{cases}$$

Calculer $\displaystyle\int_{-2}^{2} g(x)\,\mathrm{d}x$ en utilisant la relation de Chasles.

Exercice 15.14.

1. Étudier le signe de f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2-x-2$.
2. En déduire le signe de l'intégrale dans les cas suivants.

   (a) $\displaystyle\int_{-2}^{-1} f(x)\,\mathrm{d}x$. (b) $\displaystyle\int_{-1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$. (c) $\displaystyle\int_{3}^{5} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Exercice 15.15. Déterminer $\displaystyle\int_0^{\pi} \mathrm{e}^x\cos^2(x)\,\mathrm{d}x+\int_0^{\pi}\mathrm{e}^x\sin^2(x)\,\mathrm{d}x$.

Exercice 15.16. Soient $I_1=\displaystyle\int_0^1\frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ et $I_2=\displaystyle\int_0^1\frac{x^3}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.

1. Démontrer que $I_1=\dfrac{1}{2}\ln(2)$.
2. Calculer I_1+I_2 puis en déduire la valeur de I_2.

Exercice 15.17. Il est difficile de calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{1+t^3}\,\mathrm{d}t$ puisqu'une primitive est compliquée à trouver.

1. Justifier que pour tout $t\in\mathbb{R}_+$: $0\leqslant\dfrac{1}{1+t^3}\leqslant 1$.
2. En déduire un encadrement de $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{1+t^3}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 15.18. [Intégrale de la partie entière sur $\mathbb{R}_+$] Soit E la fonction partie entière sur $\mathbb{R}$. On note, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $I_n=\displaystyle\int_0^n E(x)\,\mathrm{d}x$.

1. Calculer I_0, I_1 et I_2.
2. Établir une relation de récurrence entre I_n et I_{n+1} pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.
3. On note, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $I_n=\displaystyle\int_n^{n+1}E(x)\,\mathrm{d}x$.

   (a) Calculer, pour tout $n\in\mathbb{N}$, I_n. En déduire la nature de (I_n).

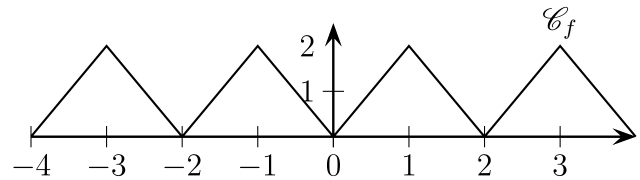
   (b) En déduire l'expression de I_n pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.
4. Déterminer à l'aide des questions précédentes l'expression de $\displaystyle\int_0^t E(x)\,\mathrm{d}x$ pour tout $t\in\mathbb{R}_+$.

Exercice 15.19. [Intégrale d'une fonction périodique] f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ périodique de période $T > 0$.

1. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(a) = \displaystyle\int_a^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x$.
   (a) Démontrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout réel a, $g'(a) = 0$.
   (b) Que peut-on en déduire pour g ?
2. Justifier alors que $\displaystyle\int_a^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^T f(x)\,\mathrm{d}x$.

Exercice 15.20. La fonction f définie sur l'intervalle $[-4\,;4]$, représentée dans le repère ci-dessous, modélise un signal en dents de scie obtenu en électronique.

La courbe représentative de f est 2-périodique, et symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. Calculer $\displaystyle\int_{-4}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x$.



Intégrations par parties

Exercice 15.21. Soit $K = \displaystyle\int_1^2 x^2 \ln(x)\,\mathrm{d}x$.

1. En utilisant la méthode d'intégration par parties, montrer que $K = \left[\dfrac{1}{3}x^3\ln(x)\right]_1^2 - \displaystyle\int_1^2 \dfrac{1}{3}x^2\,\mathrm{d}x$.
2. Vérifier alors que $K = \dfrac{8}{3}\ln(2) - \dfrac{7}{9}$.

Exercice 15.22. Déterminer la valeur exacte des intégrales suivantes en faisant une intégration par partie :

1. $\displaystyle\int_0^1 -x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$.
2. $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} (3x+1)\ln(x)\,\mathrm{d}x$.
3. $\displaystyle\int_0^{\pi} x\cos(x)\,\mathrm{d}x$.
4. $\displaystyle\int_{-1}^{1} 2x(8x+2)^2\,\mathrm{d}x$.
5. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{(5x+3)^3}\,\mathrm{d}x$.
6. $\displaystyle\int_{-1}^{3} 3x^3\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 15.23. [Intégrale du logarithme] Calculer $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \ln(x)\,\mathrm{d}x$. *Indication :* on pourra remarquer que $\ln(x) = 1 \times \ln(x)$.

Exercice 15.24. [Double intégration par parties] On souhaite calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^1 x^2\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$.

1. On pose $J = \displaystyle\int_0^1 x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$. À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que $J = 1$.
2. (a) À l'aide d'une intégration par parties, exprimer I en fonction de J.
   (b) En déduire la valeur de I.

Exercice 15.25. Calculer les intégrale suivantes à l'aide d'une double intégration par parties.

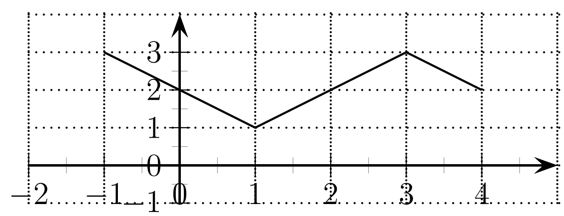
1. $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} x^2\cos(x)\,\mathrm{d}x$.
2. $\displaystyle\int_{-1}^{2} \frac{3}{2}x^5\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x$.
3. $\displaystyle\int_{0}^{3} \frac{x^2}{(x+1)^4}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 15.26. Soit $A = \displaystyle\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-x}\cos(x)\,\mathrm{d}x$. À l'aide d'une double intégration par partie, montrer que $A = \mathrm{e}^{-\pi} + 1 - A$. En déduire la valeur de A.

Valeur moyenne d'une fonction sur un intervalle

Exercice 15.27. La fonction f est représentée ci-contre sur $[-1\,;4]$. On note μ la valeur moyenne de f sur cet ensemble.

1. Justifier que $1 \leqslant \mu \leqslant 3$.
2. Que vaut μ ?



Exercice 15.28. Calculer la valeur moyenne sur $[-3\,;2]$ de la fonction f définie par $f(x) = -x+4$.

Exercice 15.29. La durée, en secondes, de téléchargement d'une vidéo sur un site internet peut être modélisée par une fonction positive f définie sur l'intervalle $[1\,;+\infty[$ par $f(t) = 6t - 8\ln(t) - 8$ où t désigne le nombre d'internautes, en millier, connectés simultanément.

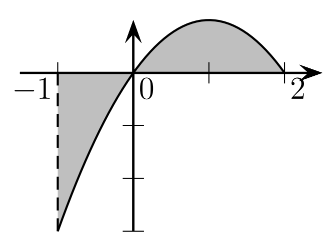
1. Montrer que la fonction F définie sur $[1\,;+\infty[$ par $F(t) = 3t^2 - 8t\ln(t)$ est une primitive de f sur l'intervalle $[1\,;+\infty[$.
2. Calculer et interpréter $\displaystyle\frac{1}{3}\int_1^4 f(t)\,\mathrm{d}t$.

Calcul d'aire

Exercice 15.30. f est la fonction définie sur $]-2\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{-4}{(x+2)^2}$. On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal. Calculer l'aire, en u.a, du domaine compris entre $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses, et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

Exercice 15.31. La fonction f est représentée dans le repère ci-contre. L'aire, en u.a, du domaine grisé, est égale à :

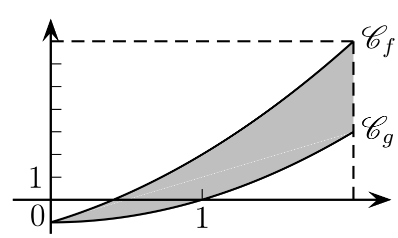
1. $\displaystyle\int_{-1}^{2} f(t)\,\mathrm{d}t$.
2. $\displaystyle\int_{-1}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^2 f(t)\,\mathrm{d}t$.
3. $\displaystyle\int_{-1}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^2 f(t)\,\mathrm{d}t$.
4. $\displaystyle -\int_{-1}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^2 f(t)\,\mathrm{d}t$.



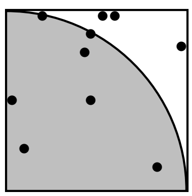
Exercice 15.32. f et g sont les fonctions définies sur l'intervalle $[0\,;2]$ par :

$$f(x) = x^2 + 2x - 1 \quad \text{et} \quad g(x) = x^2 - 1.$$

Calculer l'aire, en u.a, grisée ci-contre.



Exercice 15.33. [Méthode de Monté Carlo] La méthode de Monté Carlo est une technique statistique d'approximation d'aires et de volumes. Elle consiste à générer aléatoirement un grand nombre de points dans une aire (ou un volume) connue contenant l'aire (ou le volume) dont on souhaite une estimation, puis à compter compter le nombre de points présents dans l'aire à estimer. Par exemple, estimons l'aire d'un quart de cercle de rayon 1 à l'aide de la méthode Monté Carlo. Pour cela, on considère le carré de côté de 1 – lequel contient le quart de cercle – comme ci-dessous et on génère des points aléatoirement dans ce carré.



La probabilité qu'un point généré aléatoirement dans le carré soit en fait dans le quart de cercle est égale à $p = \dfrac{\mathcal{A}_q}{\mathcal{A}_c}$ où $\mathcal{A}_q$ est l'aire du quart de cercle et $\mathcal{A}_c$ celle du carré. Avec cet exemple, p est calculable, on a $\mathcal{A}_q = \dfrac{\pi}{4}$ et $\mathcal{A}_c = 1$, donc $p = \dfrac{\pi}{4}$.

En générant aléatoirement un grand nombre de points dans le carré, la proportion de points présents dans le quart de cercle doit tendre vers la probabilité p :

$$\frac{\text{nombre de points dans le quart de cercle}}{\text{nombre de points dans le carré}} \to p = \frac{\pi}{4} \simeq 0,785.$$

On peut observer que dans le cas ci-dessus, on a sept points sur dix dans le carré, soit une proportion de 0,7, ce qui est déjà assez proche de 0,785. Il est possible d'augmenter la précision de cette approximation en augmentant le nombre de points générés aléatoirement.

Remarque : la probabilité p n'est pas calculable en général et c'est tout l'intérêt de la méthode de Monté Carlo : obtenir une approximation de p pour en déduire une de $\mathcal{A}_q$ puisque $\mathcal{A}_q = p \times \mathcal{A}_c$.

1. À quelle condition un point $M\,(x\,;y) \in [0\,;1]^2$ appartient au quart de cercle ?
2. Compléter la fonction ci-dessous prenant en entrée un nombre de points n, générant aléatoirement ces n points dans le carré $[0\,;1]^2$, puis renvoyant la proportion de points présents dans le quart de cercle.

```
from .......... import ..........

def monte_carlo(..........) -> .......... :
     assert ..................................................
     nbr_points_quart_cercle = .....
     for point in range(.....) :
          x = ..............
          y = ..............
          distance = ........................
          if ................... :
               nbr_points_quart_cercle += .....
     return .......................................
```

15.6.2 Approfondir

Exercice 15.34. [D'après Bac, Polynésie 2019] On considère la suite (I_n) définie pour tout entier naturel n par $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x}\,\mathrm{d}x$.

1. Calculer I_0 et $I_0 - I_1$. En déduire I_1.
2. Montrer que pour tout entier naturel n, $I_n - I_{n+1} = \dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{n+1}$.
3. Proposer un algorithme permettant de déterminer, pour un entier naturel n donné, la valeur de I_n.
4. Soit n un entier naturel non nul. On admet que si $x \in \left[0\,;\frac{1}{2}\right]$, alors $0 \leqslant \dfrac{x^n}{1-x} \leqslant \dfrac{1}{2^{n-1}}$.
   (a) Montrer que $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{2^n}$.
   (b) En déduire la limite de la suite (I_n).
5. Pour tout entier naturel non nul n , on pose $S_n = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2} + \cdots + \dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{n}$.
   (a) Écrire S_n de manière rigoureuse à l'aide du symbole somme $\sum$.
   (b) Montrer que pour tout entier naturel non nul n, $S_n = I_0 - I_n$.
   (c) En déduire la limite de la suite (S_n).

Exercice 15.35. [Série harmonique, Python] On définit la suite $(H_n)_{n\geqslant 1}$ par $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. Calculer H_1 et H_2.
2. Démontrer que la suite $(H_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante.
3. (a) Écrire un algorithme en Python permettant de calculer le terme H_n pour $n \geqslant 1$ donné.
   (b) Conjecturer la limite de la suite $(H_n)_{n\geqslant 1}$.
4. On considère un entier k tel que $k \geqslant 1$.
   (a) Déterminer un encadrement de $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$.
   (b) En sommant les inégalités pour k allant de 1 à n, démontrer que $H_n - 1 \leqslant \ln(n) \leqslant H_{n-1}$, puis que $\ln(n+1) \leqslant H_n \leqslant 1 + \ln(n)$.
   (c) En déduire que la suite $(H_n)_{n\geqslant 1}$ diverge.
   (d) Montrer que $\left(\dfrac{H_n}{n}\right)_{n\geqslant 1}$ converge vers 0.
5. (a) Démontrer que ma suite $(H_n - \ln(n))_{n\geqslant 1}$ est décroissante et minorée par 0.
   (b) Que peut-on en déduire pour la suite $(H_n - \ln(n))_{n\geqslant 1}$. La limite de cette suite est appelée constante d'Euler et est notée γ.

15.6.3 S'entraîner

Aire sous une courbe

Exercice 15.36. Dans chacun des cas, représenter la fonction donnée sur l'intervalle d'intégration, puis calculer l'intégrale demandée.

1. $\displaystyle\int_1^5 x - 1 \,\mathrm{d}x.$
2. $\displaystyle\int_{-2}^8 4 \,\mathrm{d}x.$
3. $\displaystyle\int_{-3}^{-1} -2x \,\mathrm{d}x.$

Exercice 15.37. Donner la fonction dérivée des fonctions suivantes sur I.

1. $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^x t^2 \,\mathrm{d}t$ et $I = \mathbb{R}_+$.
2. $g : x \mapsto \displaystyle\int_{-3}^x \mathrm{e}^{2t+4} \,\mathrm{d}t$ et $I = [-3\,;+\infty[$.

Primitives et calcul intégral

Exercice 15.38. Calculer les intégrales suivantes.

1. $\displaystyle\int_{-2}^2 x^4 + 2x^2 - 1 \,\mathrm{d}x.$
2. $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos(t) \,\mathrm{d}t.$
3. $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{x^3} \,\mathrm{d}x.$
4. $\displaystyle\int_{-2}^2 \mathrm{e}^u + \mathrm{e}^{-u} \,\mathrm{d}u.$
5. $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(t) \,\mathrm{d}t.$
6. $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \,\mathrm{d}x.$
7. $\displaystyle\int_{-1}^0 (9u^2 - 6u)\mathrm{e}^{-u^3+u^2} \,\mathrm{d}u.$
8. $\displaystyle\int_0^1 \frac{t-2}{(t^2-4t+1)^2} \,\mathrm{d}t.$
9. $\displaystyle\int_0^{\pi^2} \frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} \,\mathrm{d}x.$

Propriétés de l'intégrale

Exercice 15.39. Soient f et g deux fonctions continue sur $[-2\,;3]$ telles que

$$\int_{-2}^2 f(x) \,\mathrm{d}x = -1 \quad \text{et} \int_{-2}^2 g(x) \,\mathrm{d}x = -3.$$

Déterminer $\displaystyle\int_{-2}^2 2f(x) - \frac{3}{2}g(x) \,\mathrm{d}x.$

Exercice 15.40. Soit f la fonction définie sur $[-3\,;3]$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 3x - 1 & \text{si } -3 \leqslant x \leqslant 0, \\ -x^3 + x^2 - 1 & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 3. \end{cases}$$

Calculer $\displaystyle\int_{-3}^3 f(x) \,\mathrm{d}x.$

Exercice 15.41.

1. Démontrer que, pour tout réel $x \in [0\,;2]$, $\dfrac{x^3}{5} \leqslant \dfrac{x^3}{1+x^2} \leqslant x^3$.
2. En déduire un encadrement de $\displaystyle\int_0^2 \frac{x^3}{1+x^2} \,\mathrm{d}x.$

Intégrations par parties

Exercice 15.42. Déterminer la valeur exacte des intégrales suivantes en faisant une intégration par partie :

1. $\displaystyle\int_{-1}^{3} (t+2)\mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t.$
2. $\displaystyle\int_{1}^{e} x\ln(x) \,\mathrm{d}x.$
3. $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 4x\sin(x) \,\mathrm{d}x.$
4. $\displaystyle\int_{-2}^{4} -x(8x+2)^5 \,\mathrm{d}x.$
5. $\displaystyle\int_{-2}^{\mathrm{e}} \frac{5x}{(3x-9)^3} \,\mathrm{d}x.$
6. $\displaystyle\int_{0}^{4} 4(2x+1)^3\mathrm{e}^{x^2+x-1} \,\mathrm{d}x.$

Exercice 15.43. Calculer les intégrale suivantes à l'aide d'une double intégration par parties.

1. $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^2\sin(x) \,\mathrm{d}x.$
2. $\displaystyle\int_{-1}^{0} x^5\mathrm{e}^{x^2-1} \,\mathrm{d}x.$
3. $\displaystyle\int_{0}^{1} -x^8(2x^3+1)^4 \,\mathrm{d}x.$
4. $\displaystyle\int_{1}^{3} \frac{36x^5}{(2-3x^2)^4} \,\mathrm{d}x.$

Exercice 15.44. Soit $B = \displaystyle\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-x}\sin(x) \,\mathrm{d}x$. À l'aide d'une double intégration par partie, déterminer la valeur de B.

Valeur moyenne d'une fonction sur un intervalle

Exercice 15.45. Calculer la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle I dans chacun des cas suivants.

1. $f(x) = \cos(x)$ et $I = [-\pi\,;\pi]$.
2. $f(x) = \sin(x)$ et $I = [-\pi\,;\pi]$.

Exercice 15.46. La Sylphe SARL fabrique et commercialise des pokéballs. Le bénéfice $B(x)$ de l'entreprise, en millier de pokédollars, en fonction du prix x des pokéballs, en centaine de pokédollars, est modélisé sur l'intervalle $[4\,;10]$ par :

$$B(x) = (x-4)\mathrm{e}^{-0,25x+5}.$$

1. Pour quel prix ce bénéfice est-il maximum ? Justifier.
2. Déterminer les réels a et b pour lesquels la fonction $F : x \mapsto (ax+b)\mathrm{e}^{-0,25x+5}$ est une primitive de B sur l'intervalle $[4\,;10]$.
3. Calculer le bénéfice moyen, eu pokédollars, réalisé par la Sylphe SARL sur l'intervalle $[4\,;10]$. Arrondir à l'unité.

Calcul d'aire

Exercice 15.47. On a représenté dans le repère ci-contre, la courbe de la fonction $x \mapsto 3x^2+x-2$. Calculer l'aire, en u.a, grisée.