Chapitre 13

Fonctions trigonométriques

13.1 Parité et périodicité

13.1.1 Parité

Définition 13.1. *Soit f une fonction définie sur un intervalle $\mathcal{D}_f$ de $\mathbb{R}$.*

- *$\mathcal{D}_f$ est centré en 0 si et seulement si pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, $-x \in \mathcal{D}_f$.*
- *f est **paire** sur $\mathcal{D}_f$ si et seulement si $\mathcal{D}_f$ est centré en 0 et pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, $f(-x) = f(x)$.*
- *f est **impaire** sur $\mathcal{D}_f$ si et seulement si $\mathcal{D}_f$ est centré en 0 et pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, $f(-x) = -f(x)$.*

Proposition 13.1. ***[Admise]*** *Soit f une fonction définie sur un intervalle $\mathcal{D}_f$ de $\mathbb{R}$. On note $\mathscr{C}_f$ la courbe de f dans un repère orthogonal $\left(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\right)$.*

- *Si f est **paire** sur $\mathcal{D}_f$, alors $\mathscr{C}_f$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.*
- *Si f est **impaire** sur $\mathcal{D}_f$, alors $\mathscr{C}_f$ est symétrique par rapport à l'origine du repère.*

Exemples

- Les intervalles $[-1\,;1]$ et $]-2\,;2[$ sont centrés en 0 mais pas les intervalles $[-1\,;2]$ et $[-1\,;1[$.
- La fonction carré est paire sur $\mathbb{R}$ puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(-x)^2 = x^2$. Sa courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
- La fonction cube est impaire sur $\mathbb{R}$ puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(-x)^3 = -x^3$. Sa courbe est symétrique par rapport à l'origine du repère.
- Les fonctions exponentielle, logarithme, racine ne sont ni paires ni impaires.

Proposition 13.2. ***[Admise]*** *Soit f une fonction définie sur un intervalle $\mathcal{D}_f$ de $\mathbb{R}$. Si f est paire ou impaire sur $\mathcal{D}_f$, alors on peut restreindre l'étude de f sur $\mathcal{D}_f$ à $\mathcal{D}_f \cap \mathbb{R}_+$ ou $\mathcal{D}_f \cap \mathbb{R}_+$.*

13.1.2 Périodicité

Définition 13.2. *Soient f une fonction définie sur un intervalle $\mathcal{D}_f$ de $\mathbb{R}$ et $T \in \mathbb{R}_+^*$. f est **périodique** de période T si et seulement si , pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, $f(x+T) = f(x)$.*

Proposition 13.3. ***[Admise]*** *Soit f une fonction définie sur un intervalle $\mathcal{D}_f$ de $\mathbb{R}$. On note $\mathscr{C}_f$ la courbe de f dans un repère orthogonal $\left(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\right)$. Si f est T-périodique, alors $\mathscr{C}_f$ est invariante par translation de vecteur $T\vec{i}$.*

Proposition 13.4. ***[Admise]*** *Soit f une fonction définie sur un intervalle $\mathcal{D}_f$ de $\mathbb{R}$. Si f est T-périodique, alors on peut restreindre l'étude de f sur $\mathcal{D}_f$ à n'importe quel intervalle d'amplitude T inclus dans $\mathcal{D}_f$.*

Remarque : on se ramène généralement à des intervalles de la forme $[0\,;T]$ ou $\left[-\dfrac{T}{2}\,;\dfrac{T}{2}\right]$.

Proposition 13.5. ***[Admise]*** *Soit f une fonction définie sur un intervalle $\mathcal{D}_f$ de $\mathbb{R}$. i f est T-périodique et paire ou impaire, alors on peut restreindre l'étude de f sur $\mathcal{D}_f$ à l'intervalle $\left[0\,;\dfrac{T}{2}\right]$.*

Exercices : 13.1 à 13.3.

13.2 Fonctions cosinus et sinus

13.2.1 Définitions et propriétés

Définition 13.3. *Soient $x \in \mathbb{R}$ et M le point du cercle trigonométrique associé à x dans un repère orthogonal.*

- *La fonction **cosinus** est la fonction qui à tout réel x associe $\cos(x)$, où $\cos(x)$ désigne l'abscisse du point M.*
- *La fonction **sinus** est la fonction qui à tout réel x associe $\sin(x)$, où $\sin(x)$ désigne l'ordonnée du point M.*

Proposition 13.6.

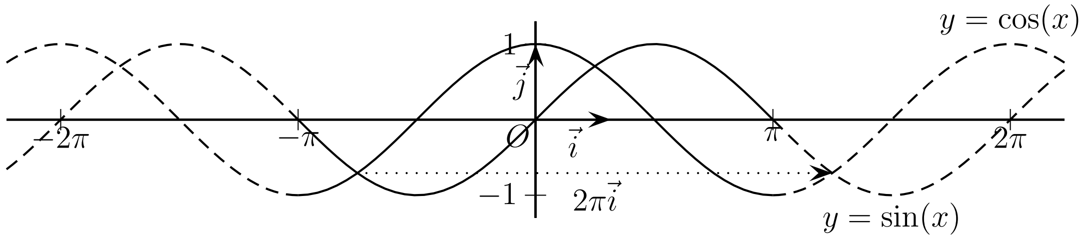
- *La fonction cosinus est paire : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos(-x) = \cos(x)$.*
- *La fonction sinus est impaire : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin(-x) = -\sin(x)$.*

Proposition 13.7. *Les fonctions cosinus et sinus sont 2π-périodiques : pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a*

$$\cos(x + 2\pi) = \cos(x) \quad \textit{et} \quad \sin(x + 2\pi) = \sin(x).$$

Démonstration. Les points d'affixes x et $x + 2\pi$ ayant les mêmes images sur le cercle trigonométrique par enroulement de la droite réelle autour du cercle – de périmètre 2π –, on obtient le résultat. □

Définition 13.4. *Les courbes représentatives des fonctions cosinus et sinus sont des **sinusoïdes**.*



Remarques : on observe sur le graphe ci-dessus :

— la périodicité des fonctions sinus et cosinus avec le même schéma de courbe courbe qui se répète tout les intervalles de longueurs 2π (traits pleins et pointillés) ;

— la parité du cosinus, sa courbe représentative a pour axe de symétrie l'axe des ordonnées ;

— l'imparité du sinus, sa courbe représentative a pour centre de symétrie l'origine du repère.

Exercices : 13.4 à 13.7 ; 13.25 et 13.26.

13.2.2 Formulaire de trigonométrie

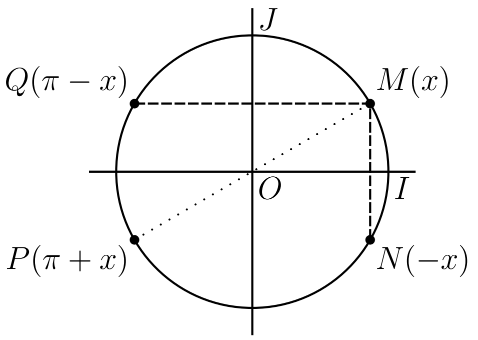
Proposition 13.8. ***[Formules d'addition]*** *Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, on a*

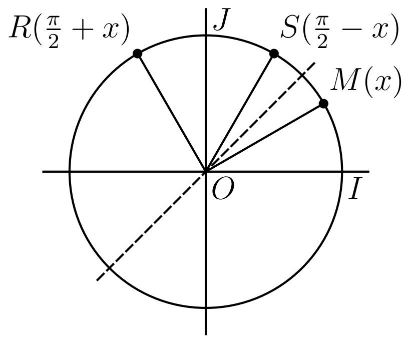
1. $\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$;
2. $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$;
3. $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$;
4. $\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$.

Démonstration. Voir cours de première. □

Corollaire 13.1. *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a*

1. $\cos(x \pm \pi) = -\cos(x)$;
2. $\cos(\pi \pm x) = -\cos(x)$;
3. $\cos\left(x \pm \dfrac{\pi}{2}\right) = \mp\sin(x)$;
4. $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} \pm x\right) = \mp\sin(x)$;
5. $\sin(x \pm \pi) = -\sin(x)$;
6. $\sin(\pi \pm x) = \mp\sin(x)$;
7. $\sin\left(x \pm \dfrac{\pi}{2}\right) = \pm\cos(x)$;
8. $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} \pm x\right) = \cos(x)$.





Exemple : On souhaite calculer $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$. Or $\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{4}$, donc

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}.$$

De même,

$$\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

Proposition 13.9. ***[Formules de duplication]*** *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a*

1. $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 2\cos^2(x) - 1 = 1 - 2\sin^2(x)$;
2. $\sin(2x) = 2\sin(x) \times \cos(x)$.

Exemple : On souhaite résoudre dan $[0\,;2\pi]$ l'équation trigonométrique

$$\cos(2x) = \sin(x).$$

On a $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2(x)$ donc l'équation ci-dessus est équivalente à

$$2\sin^2(x) + \sin(x) - 1 = 0.$$

Posons $X = \sin(x)$, on doit alors résoudre $2X^2 + X - 1 = 0$. On calcule le discriminant de ce polynôme de degré deux : $\Delta = 9$. Il a donc deux racines : $X_1 = -1$ et $X_2 = \dfrac{1}{2}$. On a donc deux possibilités :

$$\sin(x) = -1 \quad \text{ou} \quad \sin(x) = \frac{1}{2}.$$

Résolvant cette équation sur $[0\,;2\pi]$, on en déduit que $x \in \left\{\dfrac{3\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{6}\,;\dfrac{5\pi}{6}\right\}$.

Exercices : 13.8 à 13.13 ; 13.27 à 13.29.

13.2.3 Dérivation et primitive

Propriété 13.1. *Les fonctions cosinus et sinus sont dérivables sur $\mathbb{R}$.*

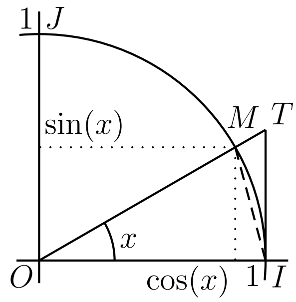
Primitive $F : x \mapsto$	$\sin(x)$	$-\cos(x)$
Fonction $f : x \mapsto$	$\cos(x)$	$\sin(x)$
Dérivée $f' : x \mapsto$	$-\sin(x)$	$\cos(x)$

Démonstration.

1. Commençons par démontrer que $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$.

   Soit $x \in \left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$. On note M le point du cercle trigonométrique associé à x et T le point de (OM) tel que OIT soit rectangle en I. Dans le repère $(O\,;I\,;J)$, on a $M\,(\cos(x)\,;\sin(x))$. On en déduit que le triangle OMI a pour aire

   $$\mathcal{A}_{OMI} = \frac{\sin(x) \times 1}{2} = \frac{\sin(x)}{2}.$$



   Par ailleurs, puisque OIT est rectangle en I, on a

   $$\cos(x) = \frac{OI}{OT} \quad \text{et} \quad \sin(x) = \frac{IT}{OT}.$$

   Or, par définition, $OI = 1$, on en déduit donc que

$$OT = \frac{1}{\cos(x)} \quad \text{et} \quad IT = \sin(x) \times OT = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}.$$

On a alors $\mathcal{A}_{OMI} = \frac{OI \times IT}{2} = \frac{1}{2}\frac{\sin(x)}{\cos(x)}$. Comme l'aire d'un secteur angulaire d'angle θ et de rayon r vaut $\frac{\theta r^2}{2}$, on en déduit que l'aire du secteur angulaire aigu $\widehat{MOI}$ vaut $\mathcal{A}_{\widehat{MOI}} = \frac{x}{2}$.
On a alors

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_{OMI} < \mathcal{A}_{\widehat{MOI}} < \mathcal{A}_{OTI} &\implies \frac{\sin(x)}{2} < \frac{x}{2} < \frac{1}{2}\frac{\sin(x)}{\cos(x)} \\
&\implies 1 < \frac{x}{\sin(x)} < \frac{1}{\cos(x)} \\
&\implies 1 > \frac{\sin(x)}{x} > \cos(x).
\end{aligned}$$

Comme $\lim\limits_{x\to 0} \cos(x) = 1$, on en déduit par encadrement que $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\sin(x)}{x} = 1$. Enfin, comme sin est impaire, on a

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(-x)}{-x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(x)}{x} = 1.$$

Donc sin est dérivable en 0 et on a $\sin'(0) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$.

2. Démontrons à présent que $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{x} = 0$.

   Pour tout $x \in \left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$, on a

$$\begin{aligned}
\frac{\cos(x)-1}{x} &= \frac{(\cos(x)-1)(\cos(x)+1)}{x(\cos(x)+1)} \\
&= \frac{\cos^2(x)-1}{x(\cos(x)+1)} \\
&= \frac{-\sin^2(x)}{x(\cos(x)+1)} \\
&= -\frac{-\sin^2(x)}{x^2} \times \frac{x}{(\cos(x)+1)}.
\end{aligned}$$

   D'après le point précédent, on a $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin^2(x)}{x^2} = 1$. Par ailleurs, par quotient, on a $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{(\cos(x)+1)} = 0$. On en déduit que cos est dérivable en 0 et que $\cos'(0) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{x} = 0$.

3. Démontrons que sin est dérivable sur $\mathbb{R}$. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $h \neq 0$. On a
$$\begin{aligned}\frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h} &= \frac{\sin(x)\cos(h)+\sin(h)\cos(x)-\sin(x)}{h}\\ &= \frac{\sin(x)(\cos(h)-1)+\sin(h)\cos(x)}{h}\\ &= \sin(x)\frac{\cos(h)-1}{h}+\cos(x)\frac{\sin(h)}{h}.\end{aligned}$$
On déduit des points précédents que
$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h} = \sin(x)\times 0+\cos(x)\times 1 = \cos(x).$$
Donc sin est dérivable et $\sin'(x) = \cos(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
4. Démontrons enfin que cos est dérivable sur $\mathbb{R}$. On a pour tout réel x, $\cos(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ donc, par composition, cos est dérivable sur $\mathbb{R}$ et
$$\cos'(x) = -1\times\sin'\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = -\sin(x).$$

□

Propriété 13.2. *Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.*
- *La fonction $\cos(u)$ est dérivable sur I de dérivée $-u'\sin(u)$.*
- *La fonction $\sin(u)$ est dérivable sur I de dérivée $u'\cos(u)$.*

Démonstration. Conséquence de la proposition précédente et de la dérivation de $u \circ v$. □

Exemples :
1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin(3x+4)$. f est de la forme $\sin(u)$ avec $u(x) = 3x+4$ et donc $u'(x) = 3$. On a donc
$$f'(x) = u'(x)\cos(u(x)) = 3\cos(3x+4).$$
2. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin(5x^2-x)$. f est de la forme $\cos(u)$ avec $u(x) = 5x^2-x$ et donc $u'(x) = 10x-1$. On a donc
$$f'(x) = -u'(x)\sin(u(x)) = -(10x-1)\sin(5x^2-x) = (1-10x)\sin(5x^2-x).$$

Exercices : 13.14 à 13.22 ; 13.30 à 13.34.

13.3 Capacités attendues

- Connaître les propriétés de périodicité et de parité du cosinus et du sinus.
- Utiliser le cercle trigonométrique pour retrouver les formules liant cosinus et sinus ; utiliser ces formules.
- Résoudre une équation du type $\cos(x) = a$, une inéquation de la forme $\cos(x) \leqslant a$ sur $[-\pi\,;\pi]$.
- Dans le cadre de la résolution de problème, notamment géométrique, étudier une fonction simple définie à partir de fonctions trigonométriques, pour déterminer des variations, un optimum.

13.4 Exercices

13.4.1 Progresser

Parité et périodicité

Exercice 13.1. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, impaire et 4-périodique telle que $f(-1) = 3$.

1. Parmi les images suivantes, quelles sont celles que l'on peut déterminer ? Justifier.

   (a) $f(0)$. (b) $f(1)$. (c) $f(2)$. (d) $f(3)$.

2. À quel intervalle peut-on restreindre l'étude de f ?

Exercice 13.2. Étudier la parité des fonctions cosinus et sinus hyperboliques définie sur $\mathbb{R}$ par : $\mathrm{ch}(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}$ et $\mathrm{sh}(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}$.

Exercice 13.3. Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $T \in \mathbb{R}_+^*$.

1. Montrer que si f est paire alors f' est impaire.
2. Montrer que si f est impaire alors f' est paire.
3. Montrer que si f est T-périodique alors f' l'est aussi.

Propriétés de cosinus et sinus

Exercice 13.4. Les fonctions suivantes sont-elles paires, impaires ou ni l'un ni l'autre ?

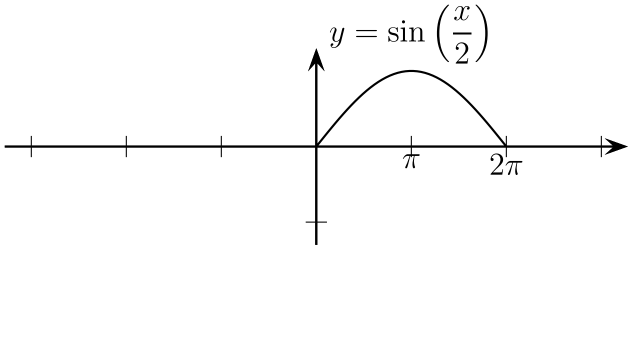
1. $f_1(x) = \sin(3x)$.
2. $f_2(x) = -2\cos(x)$.
3. $f_3(x) = 7x\sin(4x)$.
4. $f_4(x) = 3\cos(x) + 1$.

Exercice 13.5. Montrer que les fonctions suivantes sont 2π-périodiques.

1. $f_1(x) = \sin(x) + 1$.
2. $f_2(x) = -2\cos(x) + 1$.
3. $f_3(x) = \sin^2(x) + 1$.
4. $f_4(x) = \cos^2(x) + 2\sin(x) + 1$.

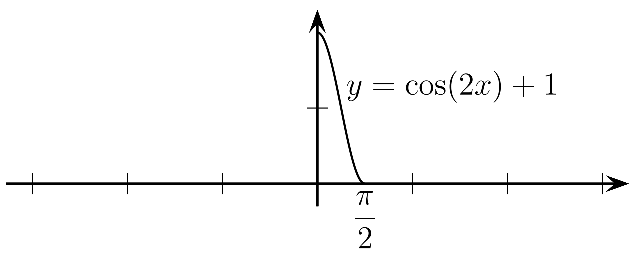
Exercice 13.6. Le graphe ci-contre représente sur $[0\,;2\pi]$ la fonction f définie par $f(x) = \sin\left(\dfrac{x}{2}\right)$.

1. Montrer que f est impaire.
2. Montrer que f est 4π-périodique.
3. Compléter le graphe de f ci-contre.



Exercice 13.7. Le graphe ci-contre représente sur $\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$ la fonction f définie par $f(x) = \cos(2x) + 1$.

1. Montrer que f est paire.
2. Montrer que f est π-périodique.
3. Compléter le graphe de f ci-contre.



Équations et inéquations trigonométriques

Exercice 13.8. Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

1. $\sin(x) = -1$.
2. $\sin(x) = -0,5$.
3. $\cos(x) = -1$.
4. $\cos(x) = -0,5$.

Exercice 13.9. Résoudre sur $[-\pi\,;\pi]$ les inéquations suivantes.

1. $\sin(x) < -0,5$.
2. $\sin(x) \geqslant -2$.
3. $\cos(x) > 0,5$.
4. $\cos(x) \leqslant -2$.

Exercice 13.10. À l'aide des formules de duplication, résoudre les équations trigonométriques suivantes.

1. $\sin(2x) = \sin(x)$.
2. $\sin(2x) = \cos(x)$.

Exercice 13.11. Résoudre dans $]-\pi\,;\pi]$ les inéquations suivantes.

1. $\dfrac{-\sqrt{3}}{2} \leqslant \sin(x) \leqslant \dfrac{1}{2}$.
2. $\dfrac{-\sqrt{2}}{2} < \cos(x) < \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Exercice 13.12. À l'aide des formules de duplication, résoudre les équations trigonométriques suivantes.

1. $\sin(2x) = \sqrt{3}\sin(x)$.
2. $\sin(2x) = -\sqrt{2}\cos(x)$.

Exercice 13.13. On cherche à résoudre l'équation trigonométrique

$$(E) : \cos(2x) = (\sqrt{2} - 2)\cos(x) + \sqrt{2} - 1.$$

1. Montrer que résoudre cette équation est équivalent à résoudre

$$2\cos^2(x) + (2 - \sqrt{2})\cos(x) - \sqrt{2} = 0.$$

2. On pose $X = \cos(x)$.
   (a) Montrer que $6 + 4\sqrt{2} = (2 + \sqrt{2})^2$.
   (b) En déduire les racines du polynôme $2X^2 + (2 - \sqrt{2})X - \sqrt{2}$.
   (c) En déduire les solutions de (E).

Fonctions trigonométriques

Exercice 13.14. Dériver les fonctions suivantes.

1. $f_1(x) = 3\cos(x) + 1$.
2. $f_2(x) = \sin(x^2) + 1$.
3. $f_3(x) = \cos(2x) + \sin(2x)$.
4. $f_4(x) = \cos(x^3 + x) - \sin(x^2 + 1)$.

Exercice 13.15. Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ des fonctions suivantes.

1. $f_1(x) = \cos(x) + \sin(x)$.
2. $f_2(x) = \cos(2x)$.
3. $f_3(x) = 2 + \sin(2x)$.
4. $f_4(x) = \cos(3x) + \sin\left(\dfrac{x}{3}\right)$.

Exercice 13.16. Déterminer dans chacun des cas suivants, si elle existe, la limite en $+\infty$ de f.

1. $f(x) = 3\sin(x) - 2$.
2. $f(x) = 3\sin(x) - 2x$.
3. $f(x) = 3\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) - 2$.

Exercice 13.17. Donner des encadrements des fonctions suivantes, i.e. leurs minimum et maximum s'ils existent (sans se soucier de leur domaine de définition).

1. $f_1(x) = 2\cos(x) + 1$.
2. $f_2(x) = -3\sin^2(x) + 5$.
3. $f_3(x) = \cos(\mathrm{e}^x)$.
4. $f_4(x) = \sin\left(\dfrac{\mathrm{e}^x\sqrt{x}}{\cos(x)}\right)$.
5. $f_5(x) = \dfrac{1}{1+\cos^2(x)}$.

Exercice 13.18. Dériver les fonctions suivantes, on précisera leurs domaines de définitions et de dérivabilité.

1. $f_1(x) = x\cos(x)$.
2. $f_2(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$.
3. $f_3(x) = \cos^2(x) + 2\cos(x) + 1$.
4. $f_4(x) = \sin^2(x) - 2\sin(x) + 1$.
5. $f_5(x) = \sin(x)\cos(x)$.
6. $f_6(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$.
7. $f_7(x) = \ln(x)\cos(x)$.
8. $f_8(x) = \sin(\ln(x))$.
9. $f_9(x) = \dfrac{\cos(x^2+1)}{\sin^2(x)+1}$.
10. $f_{10}(x) = \cos(\mathrm{e}^{\sin(x)})$.

Exercice 13.19. Déterminer une primitive sur l'intervalle I des fonctions suivantes.

1. $f_1(x) = \cos(x)\sin(x)\,;\ I = \mathbb{R}$.
2. $f_2(x) = 2\cos(x)\sin^3(x)\,;\ I = \mathbb{R}$.
3. $f_3(x) = x\cos(x^2) + \sin(x)\,;\ I = \mathbb{R}$.
4. $f_4(x) = \cos^2(x)\,;\ I = \mathbb{R}$.
5. $f_5(x) = \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}\,;\ I = \left]0\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$.
6. $f_6(x) = \dfrac{\cos(x)}{\sin^2(x)}\,;\ I = \left]0\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$.

Exercice 13.20. Déterminer dans chacun des cas suivants, si elle existe, la limite en 0 (éventuellement à gauche et à droite) de f.

1. $f(x) = 3\sin(x) - 2$.
2. $f(x) = 3x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) - 2x$.
3. $f(x) = 3\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) - 2$.

Exercice 13.21. Déterminer dans chacun des cas suivants, si elle existe, la limite en 0 (éventuellement à gauche et à droite) de f.

1. $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$.
2. $f(x) = \dfrac{\sin(3x)}{x}$.
3. $f(x) = \dfrac{\cos(x)}{x}$.
4. $f(x) = \dfrac{\cos(x)-1}{x}$.

Exercice 13.22. Soit f la fonction définie sur R par $f(x) = x - \cos(x)$. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$ dont on donnera un encadrement d'amplitude 10^{-2}.

13.4.2 Approfondir

Exercice 13.23. [Type bac]

Partie A Soit f la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = x^2 - 1 - \cos^2(x)$.

1. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
2. Démontrer que, pour tout $x \in [0\,;+\infty[$, $f'(x) = 2x + \sin(2x)$.
3. (a) Calculer $f'(0)$ et démontrer que, pour tout $x > 0$, $f'(x) > 0$.
   (b) En déduire les variations de f sur $[0\,;+\infty[$.
4. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[0\,;+\infty[$ dont on donnera un encadrement à 10^{-2} près.

Partie B Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 10$ et, pour tout $n \in N$, $u_{n+1} = \sqrt{1+\cos^2(u_n)}$.

1. Démontrer que, pour tout $n \geqslant 2$, $1 < u_n < 1,2$.
2. (a) Justifier que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut diverger ni vers $-\infty$ ni vers $+\infty$.
   (b) Justifier que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ, alors nécessairement $\ell \in [1\,;1,2]$.

Partie C À partir des deux premières parties, démontrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ, alors $\ell = \alpha$.

Exercice 13.24. [Fonction tangente] La fonction tangente, notée tan est la fonction définie pour tout réel x tel que $\cos(x) \neq 0$ par $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de tan.
2. Compléter le tableau suivant.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$
$\tan(x)$					

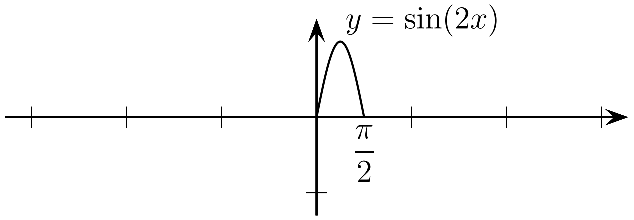
3. Déterminer la limite de $\tan(x)$ lorsque x tend vers $\dfrac{\pi}{2}$ par valeurs inférieures.
4. Montrer que tan est impaire et π-périodique.
5. Justifier que l'on peut réduire l'étude de tan à l'intervalle $\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$.
6. Montrer que tan est dérivable sur $\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$ et que sa dérivée est, pour tout $x \in \left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$,
$$\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x).$$
7. Déterminer les variations de tan sur $\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$.
8. Construire le tableau de variations de tan sur $[-\pi\,;\pi] \cap \mathcal{D}$.
9. Représenter graphiquement la fonction tangente.

13.4.3 S'entraîner

Propriétés de cosinus et sinus

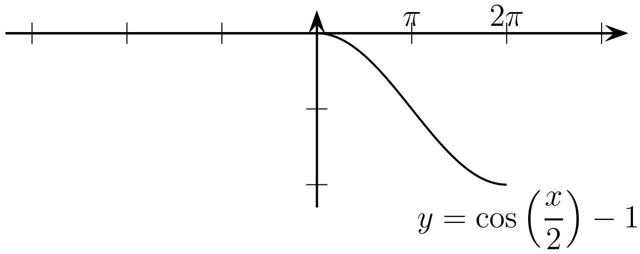
Exercice 13.25. Le graphe ci-contre représente sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ la fonction f définie par $f(x) = \sin(2x)$.

1. Montrer que f est impaire.
2. Montrer que f est π-périodique.
3. Compléter le graphe de f ci-contre.



Exercice 13.26. Le graphe ci-dessous représente sur $[0\,;2\pi]$ la fonction f définie par $f(x) = \cos\left(\frac{x}{2}\right) - 1$.

1. Montrer que f est paire.
2. Montrer que f est 4π-périodique.
3. Compléter le graphe de f ci-contre.



Équations et inéquations trigonométriques

Exercice 13.27. Résoudre dans $]-\pi\,;\pi]$ les inéquations suivantes.

1. $\frac{-\sqrt{3}}{2} \leqslant \cos(x) \leqslant \frac{1}{2}$.
2. $\frac{-\sqrt{2}}{2} < \sin(x) < \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Exercice 13.28. À l'aide des formules de duplication, résoudre les équations trigonométriques suivantes.

1. $\sin(2x) = -\sqrt{3}\cos(x)$.
2. $\sin(2x) = \sqrt{2}\sin(x)$.

Exercice 13.29. On cherche à résoudre l'équation trigonométrique

$$(E) : \cos(2x) = (\sqrt{2} - 2)\sin(x) + 1 - \sqrt{2}.$$

1. Montrer que résoudre cette équation est équivalent à résoudre

$$-2\sin^2(x) + (2 - \sqrt{2})\sin(x) + \sqrt{2} = 0.$$

2. On pose $X = \sin(x)$.
   (a) Montrer que $6 + 4\sqrt{2} = (2 + \sqrt{2})^2$.
   (b) En déduire les racines du polynôme $-2X^2 + (2 - \sqrt{2})X + \sqrt{2}$.
   (c) En déduire les solutions de (E).

Fonctions trigonométriques

Exercice 13.30. Dériver les fonctions suivantes, on précisera leurs domaines de définitions et de dérivabilité.

1. $f_1(x) = (x^2+1)\sin(x)$.
2. $f_2(x) = \dfrac{\cos(x)}{x^3}$.
3. $f_3(x) = x^2\sin(x) + x\cos^2(x)$.
4. $f_4(x) = \sin(3x^2-4x+1)$.
5. $f_5(x) = \sin(2x+1)\cos(2x-1)$.
6. $f_6(x) = \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}$.
7. $f_7(x) = \sqrt{x}\cos(x)$.
8. $f_8(x) = \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$.
9. $f_9(x) = \dfrac{\cos^2(x)+1}{\sin(x^2+1)}$.
10. $f_{10}(x) = \sin(\mathrm{e}^{\cos(x)})$.

Exercice 13.31. Déterminer une primitive sur l'intervalle I des fonctions suivantes.

1. $f_1(x) = 4\sin(x)\cos^5(x)\,;\ I = \mathbb{R}$.
2. $f_2(x) = x^2\sin(x^3)\,;\ I = \mathbb{R}$.
3. $f_3(x) = \sin^2(x)\,;\ I = \mathbb{R}$.
4. $f_4(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}\,;\ I = \left]\dfrac{\pi}{2}\,;\pi\right[$.
5. $f_5(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos^3(x)}\,;\ I = \left]\dfrac{\pi}{2}\,;\pi\right[$.

Exercice 13.32. Donner des encadrements des fonctions suivantes, i.e. leurs minimum et maximum s'ils existent (sans se soucier de leur domaine de définition).

1. $f_1(x) = 1 - 2\sin(x)$.
2. $f_2(x) = 4\cos^2(x) - 3$.
3. $f_3(x) = \sin(\sqrt{\mathrm{e}^x})$.
4. $f_4(x) = \cos\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2}\right)$.
5. $f_5(x) = \dfrac{-2}{1+\sin^2(x)}$.

Exercice 13.33. Déterminer dans chacun des cas suivants, si elle existe, la limite en 0 (éventuellement à gauche et à droite) de f.

1. $f(x) = 3\sin(x) - 2$.
2. $f(x) = 3x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) - 2x$.
3. $f(x) = 3\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) - 2$.

Exercice 13.34. Soit f la fonction définie sur $[-1\,;5]$ par

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{2}\left(\cos(x) + \sin(x) - 2x + 1\right).$$

1. Déterminer l'expression de $f'(x)$ pour tout $x \in [-1\,;5]$.
2. Soit g la fonction définie sur $[-1\,;5]$ par $g(x) = 2x - 3 - 2\sin(x)$.
   (a) Démontrer qu'il existe un unique réel $\alpha \in [2,2\,;2,3]$ tel que $g(\alpha) = 0$.
   (b) En déduire le tableau de variations de f sur $[-1\,;5]$.